

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ  
Кафедра фундаментальної математики

**КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА**

на тему: «АНАЛІТИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК КРАЙОВОЇ  
ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ  
НА МНОГОЗВ'ЯЗНІЙ ОБЛАСТІ»

Виконала: студентка 2 курсу, групи 8.1118-з  
спеціальності 111 математика  
(шифр і назва спеціальності)  
освітньої програми математика  
М.В. Савчук  
(ініціали та прізвище)  
доцент кафедри фундаментальної  
математики, доцент,  
Керівник к.ф.-м.н. Д'яченко Н.М.  
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)  
старший викладач кафедри загальної  
математики, к.ф.-м.н.  
Рецензент Гречнева М.О.  
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

Факультет математичний

Кафедра фундаментальної математики

Рівень вищої освіти магістр

Спеціальність 111 математика

(шифр і назва)

Освітня програма математика

**ЗАТВЕРДЖУЮ**

Завідувач кафедри  
фундаментальної математики,  
д.т.н., доцент

\_\_\_\_\_ Гребенюк С.М.  
(підпис)

« \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2019 р.

**ЗАВДАННЯ**  
**НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТЦІ**

Савчук Марії Вікторівні

(прізвище, ім'я та по батькові)

1. Тема роботи Аналітичний розв'язок крайової задачі теорії аналітичних функцій на  
многозв'язній області

керівник роботи Д'яченко Наталія Миколаївна, к.ф.-м.н., доцент

(прізвище, ім'я та по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затвержені наказом ЗНУ від « 26 » 09 2019 року № 1790-С

2. Строк подання студентом роботи 09.12.2019

3. Вихідні дані до роботи 1. Постановка задачі.  
2. Перелік літератури.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)

1. Постановка задачі.

2. Основні теоретичні відомості.

3. Вивчити методику розв'язання задачі Рімана на многозв'язній області

4. Навести приклади і розв'язати конкретні крайові задачі

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень) \_\_\_\_\_

Презентація

## 6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання 02.09.2019

## КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	вересень 2019	Виконано
2.	Збір вихідних даних.	жовтень 2019	Виконано
3.	Обробка методичних та теоретичних джерел.	жовтень 2019	Виконано
4.	Розробка першого та другого розділу.	листопад 2019	Виконано
5.	Розробка третього розділу.	листопад-грудень 2019	Виконано
6.	Оформлення та нормоконтроль кваліфікаційної роботи.	грудень 2019	Виконано
7.	Захист кваліфікаційної роботи.	10 січня 2020	

Студент

\_\_\_\_\_ (підпис)

М.В. Савчук

\_\_\_\_\_ (ініціали та прізвище)

Керівник роботи

\_\_\_\_\_ (підпис)

Н.М. Д'яченко

\_\_\_\_\_ (ініціали та прізвище)

**Нормоконтроль пройдено**

Нормоконтролер

\_\_\_\_\_ (підпис)

І.Г. Ткаченко

\_\_\_\_\_ (ініціали та прізвище)

## РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Аналітичний розв'язок крайової задачі теорії аналітичних функцій на многозв'язній області»: 53 с., 8 рис., 14 джерел, 2 додатки.

ІНДЕКС КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ РІМАНА, ІНТЕГРАЛ ТИПУ КОШІ, КРАЙОВА ЗАДАЧА РІМАНА ТЕОРІЇ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ, МНОГОЗВ'ЯЗНА ОБЛАСТЬ, МНОГОЗВ'ЯЗНА ПІВПЛОЩИНА.

Об'єкт дослідження – крайові задачі теорії аналітичних функцій на многозв'язній області.

Мета роботи: дослідити методику розв'язання крайової задачі Рімана на многозв'язній області; навести приклади і розв'язати конкретні крайові задачі Рімана на многозв'язних областях в тому числі на обмеженій многозв'язній області, на многозв'язній площині, на многозв'язній півплощині.

Метод дослідження – аналітичний.

У роботі наведено методику Гахова Ф.Д. для розв'язання задачі Рімана на однозв'язній та многозв'язній областях [6]. Наведено авторські приклади розв'язання крайових задач Рімана на дво- та тризв'язній обмежених областях для різних значень індексу. Приведені приклади даної задачі на многозв'язних необмежених областях. Останній приклад демонструє випадок, де одним із контурів виступає дійсна вісь.

## SUMMARY

Master's Qualification Thesis «The Analytical Solution to the Boundary Value Problem of the Theory of Analytical Functions on the Multiply Connected Domain»: 53 pages, 8 figures, 14 references, 2 supplements.

AN INDEX OF THE RIEMANN BOUNDARY VALUE PROBLEM, AN INTEGRAL OF CAUCHY TYPE, A BOUNDARY RIEMANN VALUE PROBLEM OF THE THEORY OF ANALYTIC FUNCTIONS, MULTIPLY CONNECTED DOMAIN, MULTIPLY CONNECTED SIMIPLANE.

The object of the study is boundary value problems of the theory of analytical functions on the multiply connected domain.

The aim of the study is to explore the method of solving the Riemann boundary value problem on the multiply connected domain; to give examples and solve some specific Riemann boundary value problems on the multiply connected domain, including a the multiply connected domain, a the multiply connected plane, a the multiply connected simiplane.

The research method is analytical.

The paper describes the method of Gakhov F.D. of solving the Riemann problem on multiply connected domain [6]. The author presents examples of solving Riemann boundary-value problems in two- and three-bounded regions for different index values. Here are examples of this problem in multifaceted unbounded domains. The last example demonstrates a case where one of the contours is a real axis.

## ЗМІСТ

Завдання на кваліфікаційну роботу.....	2
Реферат.....	4
Summary.....	5
Вступ.....	7
1 Теоретичні відомості відносно задачі Рімана для многозв'язної обмеженої області.....	8
1.1 Постановка задачі.....	8
1.2 Загальний розв'язок задачі.....	11
2 Наведення прикладів розв'язання задачі Рімана для многозв'язної обмеженої області.....	15
2.1 Випадок однозв'язної обмеженої області.....	15
2.2 Випадок двозв'язної обмеженої області з додатним індексом задачі.....	18
2.3 Випадок тризв'язної обмеженої області з нульовим індексом .....	22
2.4 Випадок тризв'язної обмеженої області з від'ємним індексом задачі ...	26
3 Розв'язання задачі Рімана на многозв'язній необмеженій області.....	30
3.1 Зауваження щодо розв'язання задачі Рімана на многозв'язній площині.....	30
3.2 Приклад розв'язання задачі Рімана на многозв'язній площині .....	30
3.3 Зауваження щодо розв'язання задачі Рімана на многозв'язній півплощині.....	34
3.4 Приклад розв'язання задачі Рімана на многозв'язній півплощині.....	34
Висновки.....	41
Перелік посилань.....	42
Додаток А Відомі поняття та твердження, що використовуються у роботі.....	44
Додаток Б Крайова задача Рімана на зімкненому контурі і на дійсній осі.....	49

## ВСТУП

Крайові задачі теорії аналітичних функцій (ТАФ) мають широке застосування в таких областях науки як математична фізика, теорія пружності, дифракція хвиль та аеродинаміка. Саме тому практичне застосування крайовими задачами ТАФ викликає велику зацікавленість.

Розгорнутий опис методів розв'язання крайових задач теорії аналітичних функцій наведено в роботі Гахова Ф.Д. [6]. Окремі випадки таких методів розглянуто Кулієвим В.Д. [8], Літвінчуком Г.С. [12], Лаврент'євим М.А., Шабатом Б.В. [10]. У ході розв'язання крайових задач ТАФ з'являється необхідність обчислення інтегралів типу Коші та сингулярних інтегралів з ядром Коші, методику обчислення яких Гандель Ю.В. [5] описав у своїй роботі.

Нині над теорією крайових задач продовжують працювати Бабаєв А.А., Салаєв В.В. [2], Левінский С.В. [11], Плакси С.А., Васильєвої Ю.В. [3].

Метою роботи є: вивчити методику розв'язання крайової задачі Рімана на многозв'язній області; навести приклади і розв'язати конкретні крайові задачі Рімана на многозв'язних областях, в тому числі: на обмеженій многозв'язній області, на многозв'язній площині, на многозв'язній півплощині. На першому етапі потрібно вивчити методику Гахова Ф.Д. [6] розв'язання крайових задач теорії аналітичних функцій на однозв'язній і многозв'язній областях. В підручнику Гахова Ф.Д. [6] наведено лише теоретичні положення щодо розв'язання задачі Рімана на многозв'язній області, але не наведено конкретних задач для многозв'язних областей. Візьмемо за основу одну із задач на однозв'язній області, запропоновану Гаховим Ф.Д. [6] до розв'язання, і наведемо приклади многозв'язних обмежених областей на яких розглянемо задачі Рімана з тією ж крайовою умовою. При цьому розглянемо найбільш характерні випадки дво- і трив'язних областей з додатними і від'ємними індексами.

У підручнику Гахова Ф.Д. [6] виписано зауваження щодо розв'язання задачі Рімана на многозв'язній площині. Це відповідає випадку необмеженої

многозв'язної області. Для наведення конкретного прикладу розв'язання такої задачі будемо діяти за зазначеною вище схемою.

До випадку необмеженої області Гаховим Ф.Д. наведено зауваження, яке фактично вказує на методику розв'язання крайових задач у цьому випадку. Діючи за аналогією до цієї методики і методики розв'язання задачі на многозв'язній області, зробимо висновки щодо розв'язання задачі Рімана на многозв'язній півплощині. Після цього наведемо авторські приклади розв'язання такої задачі.

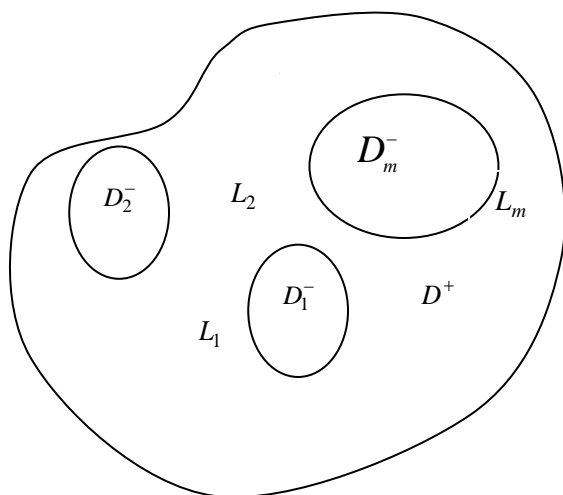
Усі авторські приклади підлягатимуть перевірці щодо достовірності отриманого розв'язку.



# 1 ТОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ВІДНОСНО ЗАДАЧІ РІМАНА ДЛЯ МНОГОЗВ'ЯЗНОЇ ОБМЕЖЕНОЇ ОБЛАСТІ

## 1.1 Постановка задачі

Нехай  $L = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_m$  – це сукупність  $m+1$  непересічних контурів, а всі



інші містяться у контурі  $L_0$  (рис. 1.1).

Будемо називати  $D^+$  ( $m+1$ ) – зв'язну область, яка лежить всередині контура  $L_0$  і поза контурів  $L_1, L_2, \dots, L_m$ .

Доповнення  $D^+ + L$  до повної площині позначимо як  $D^-$ .

Рисунок 1.1

Зауважимо, що додатним напрямом оббігу контура  $L$  вважається той, який залишає область  $D^+$  ліворуч, тобто контур  $L_0$  потрібно обходити проти годинникової стрілки, а контури  $L_1, L_2, \dots, L_m$  – за годинниковою. Будемо вважати початок координат розташованим в області  $D^+$ .

Спершу зазначимо, що задача про стрибок

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = g(t)$$

розв'язується за тією ж формулою

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau) d\tau}{\tau - z},$$

що й у випадку однозв'язної області, відповідно до формул Сохоцького, які, як зазначено в [6], мають однаковий вигляд як для многозв'язної області, так і для однозв'язної.

Крайові умови однорідної та неоднорідної задачі Рімана формулюються наступним чином:

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) - \text{(однорідна задача)},$$

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t) - \text{(неоднорідна задача)}.$$

Позначимо  $\kappa_k = \frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_{L_r}$ , де всі контури оббігаються у щойно встановленому додатному напрямку. Індекс задачі позначимо як

$$\kappa = \sum_{k=0}^m \kappa_k. \quad (1.1)$$

Якщо  $\kappa_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) для внутрішніх контурів дорівнюють нулю, тоді розв'язок задачі має однаковий вигляд з розв'язком для однозв'язної області (див. додаток А).

Для перетворення загального випадку до найпростішого, застосуємо функцію

$$\prod_{k=1}^m (t - z_k)^{\kappa_k},$$

де  $z_k$  – деякі точки, що лежать всередині контурів  $L_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ).

Виходячи з  $[\arg(t - z_k)]_{L_j} = 0$ , якщо  $k \neq j$ , й  $[\arg(t - z_k)]_{L_j} = -2\pi$ , у результаті отримаємо:

$$\frac{1}{2\pi} \left[ \arg \prod_{k=1}^m (t - z_k)^{\kappa_k} \right]_{L_j} = \frac{1}{2\pi} [\arg(t - z_j)^{\kappa_j}]_{L_j} = -\kappa_j \quad (j = 1, \dots, m).$$

Звідси

$$\left( \arg \left[ G(t) \prod_{k=1}^m (t - z_k)^{\kappa_k} \right] \right)_{L_j} = 0 \quad (j = 1, \dots, m).$$

Обчислимо повний приріст аргументу функції  $G(t) \prod_{k=1}^m (t - z_k)^{\kappa_k}$  при оббігу

контура  $L_0$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \left( \arg \left[ G(t) \prod_{k=1}^m (t - z_k)^{\kappa_k} \right] \right)_{L_0} &= \frac{1}{2\pi} [\arg G(t)]_{L_0} + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^m [\kappa_k \arg(t - z_k)]_{L_0} = \\ &= \kappa_0 + \sum_{k=1}^m \kappa_k = \kappa. \end{aligned}$$

Оскільки початок координат лежить в області  $D^+$ , тоді отримаємо

$$[\arg t]_{L_k} = 0 \quad (j = 1, \dots, m), \quad [\arg t]_{L_0} = 2\pi.$$

Звідси

$$\left( \arg \left[ t^{-\kappa} \prod_{k=1}^m (t - z_k)^{\kappa_k} G(t) \right] \right)_L = 0. \quad (1.2)$$

## 1.2 Загальний розв'язок задачі

Спершу розберемо однорідну задачу. Крайову умову

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) \quad (1.3)$$

запишемо наступним чином:

$$\Phi^+(t) = \frac{t^\kappa}{\prod_{k=1}^m (t - z_k)^{\kappa_k}} \left[ t^{-\kappa} \prod_{k=1}^m (t - z_k)^{\kappa_k} G(t) \right] \Phi^-(t). \quad (1.4)$$

Функцію  $t^{-\kappa} \prod_{k=1}^m (t - z_k)^{\kappa_k} G(t)$ , індекс якої на кожному із контурів

$L_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) дорівнює нулю, представимо у вигляді відношення

$$t^{-\kappa} \prod_{k=1}^m (t - z_k)^{\kappa_k} G(t) = \frac{e^{\Gamma^+(t)}}{e^{\Gamma^-(t)}}, \quad (1.5)$$

де

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln[\tau^{-\kappa} \prod_{k=1}^m (\tau - z_k)^{\kappa_k} G(\tau)]}{\tau - z} d\tau. \quad (1.6)$$

Далі крайову умову (1.4) запишемо як

$$\prod_{k=1}^m (t - z_k)^{\kappa_k} \frac{\Phi^+(t)}{e^{\Gamma^+(t)}} = t^\kappa \frac{\Phi^-(t)}{e^{\Gamma^-(t)}}.$$

Спираючись на теорему про аналітичне продовження та узагальнену теорему Ліувілля, занотуємо:

$$\begin{cases} \Phi^+(z) = \prod_{k=1}^m (z - z_k)^{-\kappa_k} e^{\Gamma^+(z)} P_{\kappa}(z), \\ \Phi^-(z) = z^{-\kappa} e^{\Gamma^-(z)} P_{\kappa}(z). \end{cases} \quad (1.7)$$

Завуважимо, що розв'язок відрізняється від розв'язку (Б.14), (Б.15) задачі для однозв'язної області лише наявністю у функції  $\Phi^+(z)$  множника

$\prod_{k=1}^m (z - z_k)^{-\kappa_k}$ . За додаткової умови  $\Phi^-(\infty) = 0$  в формулах (1.7) потрібно брати

многочлен  $P_{\kappa-1}(z)$ .

Канонічна функція задачі буде мати вигляд:

$$X^+(z) = \prod_{k=1}^m (z - z_k)^{-\kappa_k} e^{\Gamma^+(z)}; \quad X^-(z) = z^{-\kappa} e^{\Gamma^-(z)}. \quad (1.8)$$

Наступним кроком необхідно отримати формули для граничних значень на контурі канонічної функції  $X(z)$ . Тому беремо в формулі (1.6) граничні значення та застосовуючи формули Сохоцького запишемо:

$$\Gamma^{\pm}(t) = \pm \frac{1}{2} \ln[t^{-\kappa} \Pi(t)G(t)] + \Gamma(t),$$

де  $\Gamma(t)$  – це головне значення інтеграла (1.6)

$$\Pi(t) = \prod_{k=1}^m (t - z_k)^{\kappa_k}.$$

Переходячи в формулах (1.8) до границі при  $z \rightarrow t$ , отримаємо:

$$X^+(t) = \sqrt{\frac{G(t)}{t^\kappa \Pi(t)}} e^{\Gamma(t)}, \quad X^-(t) = \frac{1}{\sqrt{t^\kappa \Pi(t) G(t)}} e^{\Gamma(t)}. \quad (1.9)$$

Знак кореня визначається вибором гілки функції  $\ln[t^{-\kappa} \Pi(t) G(t)]$ , яка може бути взята довільно.

Далі перейдемо до неоднорідної задачі. Запишемо крайову умову

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t)$$

наступним чином

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \Psi^+(t) = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} - \Psi^-(t),$$

де  $\Psi(z)$  визначається формулою (Б.16).

Звідси отримуємо загальний розв'язок:

$$\Phi(z) = X(z)[\Psi(z) + P_\kappa(z)] \quad (1.10)$$

або

$$\Phi(z) = X(z)[\Psi(z) + P_{\kappa-1}(z)] \quad (1.11)$$

за умови  $\Phi^-(\infty) = 0$ .

При  $\kappa < 0$  неоднорідна задача розв'язана тоді і тільки тоді, коли виконуються умови

$$\int_L \frac{g(t)}{X^+(t)} t^{k-1} dt = 0, \quad (1.12)$$

де  $k$  приймає значення від 1 до  $-\kappa-1$ , якщо шукаються, обмежені на нескінченності, від 1 до  $-\kappa$ , якщо вважати, що  $\Phi^-(\infty) = 0$ .

При виконанні умови (1.12) розв'язок можна отримати з формул (1.10) або (1.11):  $P(z) \equiv 0$ .

## 2 НАВЕДЕННЯ ПРИКЛАДІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ РІМАНА ДЛЯ МНОГОЗВ'ЯЗНОЇ ОБМЕЖЕНОЇ ОБЛАСТІ

### 2.1 Випадок однозв'язної обмеженої області

**Приклад 2.1** Розв'язати крайову задачу

$$\Phi^+(t) = \frac{(t-i)(t-3i)}{(t+i)(t+2i)} \Phi^-(t) + \frac{9t}{(t+i)^2(t+2i)(t-i)}, \quad t \in L$$

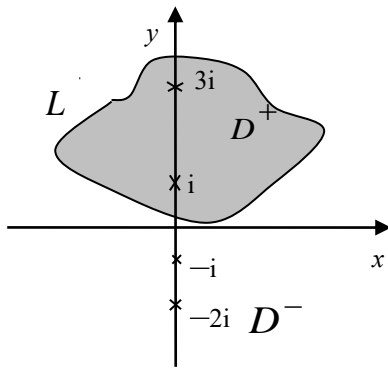


Рисунок 2.1

за таких припущень:  $-i, -2i \in D^-$ ,  $i, 3i \in D^+$ , а також умови  $\Phi^-(\infty) = 0$ .

**Розв'язання.** Зображення даної області наведено на рисунку 2.1. Згідно з загальним виглядом крайової умови задачі Рімана, знаходимо  $G(t)$  та  $g(t)$ :

$$G(t) = \frac{(t-i)(t-3i)}{(t+i)(t+2i)} \quad g(t) = \frac{9t}{(t+i)^2(t+2i)(t-i)}$$

Зважаючи, що в області  $D^+$  функція  $G(z) = \frac{(z-i)(z-3i)}{(z+i)(z+2i)}$  має два нулі і не має

полісів, індекс функції  $G(t)$ :

$$\kappa = \text{ind}G(t) = 2.$$

Далі знайдемо функцію  $\Gamma(z)$ , використовуючи формулу (Б.10):



$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln[(\tau - z_0)^{-\kappa} G(\tau)]}{\tau - z} d\tau,$$

і оберемо  $z_0 = i$ , тоді

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\ln\left((\tau - i)^{-2} \cdot \frac{(\tau - i)(\tau - 3i)}{(\tau + i)(\tau + 2i)}\right)}{\tau - z} d\tau.$$

Оскільки функція щільності останнього інтеграла типу Коші

$$f(z) = \ln \frac{z - 3i}{(z - i)(z + i)(z + 2i)} \text{ є сумою функції } f_1(z) = \ln \frac{z - 3i}{z - i}, \text{ аналітичної в області}$$

$$D^-, \text{ і функції } f_2(z) = \ln \frac{1}{(z + i)(z + 2i)}, \text{ аналітичної в } D^+, \text{ то згідно з (А.3) і (А.4)}$$

одержимо

$$\Gamma(z) = \begin{cases} \ln \frac{1}{(z + i)(z + 2i)}, & z \in D^+, \\ -\ln \frac{z - 3i}{z - i}, & z \in D^-. \end{cases}$$

Відповідно до формул (Б.9) знайдемо функції  $X^{\pm}(z)$ :

$$X^+(z) = e^{\Gamma^+(z)} = \frac{1}{(z + i)(z + 2i)}, \quad X^-(z) = e^{\Gamma^-(z)} = \frac{z - i}{z - 3i}.$$

Використовуючи формулу (Б.16), запишемо:

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \cdot \frac{d\tau}{\tau - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{9\tau}{(\tau + i)(\tau - i)} \cdot \frac{d\tau}{\tau - z}.$$

Розглянемо функцію щільності останнього інтеграла типу Коші. Даний інтеграл є сумою функції  $f_1(z) = \frac{1}{z+i}$ , аналітичної в області  $D^+$ , і функції  $f_2(z) = \frac{1}{z-i}$ , аналітичної в  $D^-$ . Згідно з (А.3) і (А.4) одержимо:

$$\Psi(z) = \begin{cases} \frac{1}{z+i}, & z \in D^+; \\ -\frac{1}{z-i}, & z \in D^-. \end{cases}$$

Звідси

$$\Psi^+(z) = \frac{1}{z+i}, \quad \Psi^-(z) = -\frac{1}{z-i}.$$

Шуканий розв'язок знаходимо, застосовуючи формулу (Б.14), (Б.15)

$$\Phi^+(z) = X^+(z) \cdot [P_\kappa(z) + \Psi^+(z)] = \frac{1}{(z+i)(z+2i)} \cdot \left[ A \cdot z^2 + B \cdot z + C + \frac{1}{z+i} \right],$$

$$\Phi^-(z) = (z-z_0)^{-\kappa} \cdot X^-(z) \cdot [P_\kappa(z) + \Psi^-(z)] = \frac{1}{(z-i)(z-2i)} \cdot \left[ A \cdot z^2 + B \cdot z + C - \frac{1}{z-i} \right].$$

Розв'язок цієї крайової задачі, задовольняє умову  $\Phi^-(\infty) = 0$ . З цього випливає, що  $A = 0$ .

Отже, розв'язок крайової задачі Рімана має вигляд:

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{(z+i)(z+2i)} \cdot \left[ B \cdot z + C + \frac{1}{z+i} \right],$$

$$\Phi^-(z) = \frac{1}{(z-i)(z-2i)} \cdot \left[ B \cdot z + C - \frac{1}{z-i} \right].$$

**Відповідь.**  $\Phi^+(z) = \frac{1}{(z+i)(z+2i)} \cdot \left[ B \cdot z + C + \frac{1}{z+i} \right],$

$$\Phi^-(z) = \frac{1}{(z-i)(z-2i)} \cdot \left[ B \cdot z + C - \frac{1}{z-i} \right].$$

## 2.2 Випадок двозв'язної обмеженої області з додатним індексом задачі

**Приклад 2.2** За умови  $\Phi^-(\infty) = 0$  розв'язати крайову задачу Рімана

$$\Phi^+(t) = \frac{(t-i)(t-3i)}{(t+i)(t+2i)} \Phi^-(t) + \frac{6t}{(t+i)^2(t+2i)(t-i)}, t \in L$$

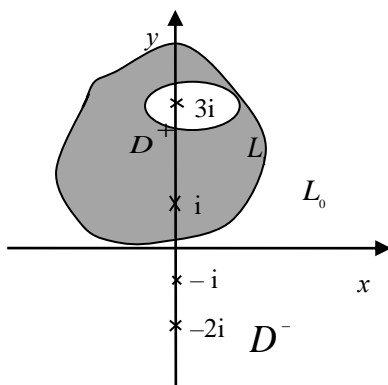


Рисунок 2.2

за таких припущень: точка  $z_1 = 3i$  лежить всередині контура  $L_1$ , точка  $z_2 = i$  лежить зовні контура  $L_1$  і всередині контура  $L_0$ , точки  $z_3 = -i$ ,  $z_4 = -2i$  лежать зовні контура  $L_0$ .

**Розв'язання.** Зображення даної двозв'язної області наведено на рисунку 2.2. Беручи до уваги загальний вигляд крайової

умови, у даному випадку запишемо:

$$G(t) = \frac{(t-i)(t-3i)}{(t+i)(t+2i)}, \quad g(t) = \frac{6t}{(t+i)^2(t+2i)(t-i)}.$$

Спершу розглянемо контур  $L_1$  та знайдемо індекс функції  $G(t) = \frac{(t-i)(t-3i)}{(t+i)(t+2i)}$ .

Функція  $G(z)$  має нулі  $i$  і  $3i$ , причому точка  $i$  лежить зовні контура  $L_1$ , що відповідає області  $D_1^+$ , а точка  $3i$  лежить всередині вказаного контура, що

відповідає області  $D_1^-$ . Звідси,  $N_1^+ = 1$ . Полюсами цієї функції є точки  $-i$  і  $-2i$ . Обидві ці точки належать  $D_1^+$ , тому  $P_1^+ = 2$ . Отже,

$$\kappa_1 = N_1^+ - P_1^+ = 1 - 2 = -1.$$

Тепер перейдемо до розгляду контура  $L_0$ . Так як знайдені вище нулі належать області  $D_1^+$ , робимо висновок, що  $N_0^+ = 2$ . Бачимо, що обидва полюси належать  $D_0^-$ , з цього витікає, що  $P_0^+ = 0$ . Отже,

$$\kappa_0 = N_0^+ - P_0^+ = 2 - 0 = 2.$$

Обчислимо індекс функції за формулою (1.1):

$$\kappa = \text{ind}G(t) = \kappa_0 + \kappa_1 = 1.$$

Далі знайдемо функцію  $\Gamma(z)$ , використовуючи формулу аналогічну (1.6)

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln \left[ (\tau - z_0)^{-\kappa} \prod_{k=1}^m (\tau - z_k)^{\kappa_k} G(\tau) \right]}{\tau - z} d\tau, \quad (2.1)$$

та оберемо  $z_0 = i$ . У даному випадку  $z_1 = 3i$  – точка, що лежить всередині контура  $L_1$ , тоді

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\ln \left( (\tau - i)^{-1} (\tau - 3i)^{-1} \cdot \frac{(\tau - i)(\tau - 3i)}{(\tau + i)(\tau + 2i)} \right)}{\tau - z} d\tau.$$

Функція щільності  $f(z) = \ln \frac{1}{(z+i)(z+2i)}$  в даному випадку є аналітичною в області в  $D^+$ , тому згідно з (А.3) отримаємо

$$\Gamma(z) = \begin{cases} \ln \frac{1}{(z+i)(z+2i)}, & z \in D^+, \\ 0, & z \in D^-. \end{cases}$$

Знайдемо функцію  $X^\pm(z)$  за формулою, аналогічною (1.8)

$$X^+(z) = \prod_{k=1}^m (z - z_k)^{-\kappa_k} e^{\Gamma^+(t)}; \quad X^-(z) = (z - z_0)^{-\kappa} e^{\Gamma^-(t)}, \quad (2.2)$$

одержимо:

$$X^+(z) = \prod_{k=1}^m (z - z_k)^{-\kappa_k} e^{\Gamma^+(t)} = \frac{z - 3i}{(z+i)(z+2i)};$$

$$X^-(z) = (z - i)^{-\kappa} e^{\Gamma^-(t)} = \frac{1}{z - i}.$$

Застосовуючи формулу (Б.16), отримаємо:

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \cdot \frac{d\tau}{\tau - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{6\tau}{(\tau+i)(\tau-i)(\tau-3i)} \cdot \frac{d\tau}{\tau - z}.$$

Функцією щільності для останнього інтегралу є  $f(z) = \frac{6z}{(z+i)(z-i)(z-3i)}$ . Дана

функція складається з функції  $f_1(z) = -\frac{3i}{4(z+i)}$ , функції  $f_2(z) = -\frac{3i}{2(z-i)}$  і функції

$f_3(z) = \frac{9i}{4(z-3i)}$ , які є аналітичними в області  $D^+, D^-, D^+$  відповідно. Тому згідно з

(A.3) і (A.4) одержимо:

$$\Psi(z) = \begin{cases} -\frac{3i}{4(z+i)} + \frac{9i}{4(z-3i)}, z \in D^+; \\ \frac{3i}{2(z-i)}, z \in D^-. \end{cases}$$

Звідси

$$\Psi^+(z) = -\frac{3i}{4(z+i)} + \frac{9i}{4(z-3i)}, \quad \Psi^-(z) = \frac{3i}{2(z-i)}.$$

Шуканий розв'язок знаходимо, застосовуючи формули (1.11) з урахуванням умови  $\Phi^-(\infty) = 0$ :

$$\Phi^+(z) = X^+(z) \left[ P_{\kappa-1}(z) + \Psi^+(z) \right] = \frac{z-3i}{(z+i)(z+2i)} \left[ -\frac{3i}{4(z+i)} + \frac{9i}{4(z-3i)} + B \right],$$

$$\Phi^-(z) = X^-(z) \left[ P_{\kappa-1}(z) + \Psi^-(z) \right] = \frac{1}{z-i} \left[ B + \frac{3i}{2(z-i)} \right].$$

**Відповідь.**  $\Phi^+(z) = \frac{z-3i}{(z+i)(z+2i)} \left[ -\frac{3i}{4(z+i)} + \frac{9i}{4(z-3i)} + B \right],$

$$\Phi^-(z) = \frac{1}{z-i} \left[ B + \frac{3i}{2(z-i)} \right].$$

Для перевірки авторської задачі з прикладу 2.2 проведемо перевірку отриманого розв'язку. Спочатку знайдемо граничні значення функцій  $\Phi^\pm(z)$ :

$$\Phi^+(t) = \lim_{\substack{z \rightarrow t \\ z \in D^+}} \Phi^+(z) = \frac{t-3i}{(t+i)(t+2i)} \left[ -\frac{3i}{4(t+i)} + \frac{9i}{4(t-3i)} + B \right],$$

$$\Phi^-(t) = \lim_{\substack{z \rightarrow t \\ z \in D^-}} \Phi^-(z) = \frac{1}{t-i} \left[ B + \frac{3i}{2(t-i)} \right].$$

Далі знайдені граничні значення підставимо у крайову умову

$$\Phi^+(t) = \frac{(t-i)(t-3i)}{(t+i)(t+2i)}, \quad \Phi^-(t) + \frac{6t}{(t+i)^2(t+2i)(t-i)}$$

та як результат отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{t-3i}{(t+i)(t+2i)} \left[ -\frac{3i}{4(t+i)} + \frac{9i}{4(t-3i)} + B \right] &= \frac{(t-i)(t-3i)}{(t+i)(t+2i)} \frac{1}{t-i} \left[ B + \frac{3i}{2(t-i)} \right] + \\ &+ \frac{6t}{(t+i)^2(t+2i)(t-i)}. \end{aligned}$$

Бачимо, що наведена рівність є тотожністю. Що й треба було довести.

### 2.3 Випадок трив'язної обмеженої області з нульовим індексом

#### Приклад 2.3 Розв'язати крайову задачу Рімана

$$\Phi^+(t) = \frac{(t-i)(t-3i)}{(t+i)(t+2i)} \Phi^-(t) + \frac{5t}{(t+i)^2(t+2i)(t-i)}, \quad t \in L$$

за таких припущень: точка  $z_1 = 3i$  лежить всередині контура  $L_1$ , точка  $z_2 = i$  лежить всередині контура  $L_2$ , точки  $z_3 = -i$ ,  $z_4 = -2i$  лежать зовні контура  $L_0$ .

**Розв'язання.** Зображення області наведено на рисунку 2.3. Вважаючи на загальний вигляд крайової умови, у даному випадку отримаємо:

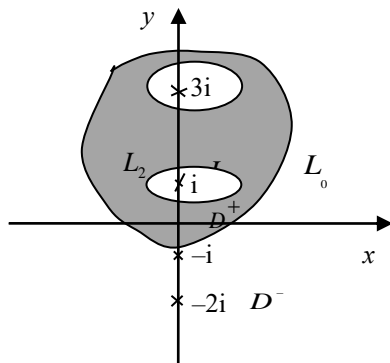


Рисунок 2.3

$$G(t) = \frac{(t-i)(t-3i)}{(t+i)(t+2i)}, \quad g(t) = \frac{5t}{(t+i)^2(t+2i)(t-i)}.$$

Знайдемо індекс функції  $G(t) = \frac{(t-i)(t-3i)}{(t+i)(t+2i)}$  для контура  $L_1$ . Функція  $G(z) = \frac{(z-i)(z-3i)}{(z+i)(z+2i)}$  має нулі

$i$  і  $3i$ , причому точка  $i$  лежить зовні контура  $L_1$  що відповідає області  $D_1^+$ , а точка  $3i$  лежить всередині цього контура, що відповідає області  $D_1^-$ . Отже,  $N_1^+ = 1$ . Полюсами цієї функції є точки  $-i$  і  $-2i$ . Обидві ці точки належать  $D_1^+$ , тому  $P_1^+ = 2$ . Отже,

$$\kappa_1 = N_1^+ - P_1^+ = 1 - 2 = -1.$$

Далі знайдемо індекс функції  $G(t) = \frac{(t-i)(t-3i)}{(t+i)(t+2i)}$  для контура  $L_2$ . Функція

$G(z) = \frac{(z-i)(z-3i)}{(z+i)(z+2i)}$  має нулі  $i$  і  $3i$ , причому точка  $3i$  лежить зовні контура  $L_2$ ,

що відповідає області  $D_2^-$ , а точка  $i$  лежить всередині цього контура, що відповідає області  $D_2^+$ . Отже,  $N_2^+ = 1$ . Полюсами цієї функції являються точки  $-i$  і  $-2i$ . Обидві ці точки належать  $D_2^+$ , тому  $P_2^+ = 2$ . Отже,

$$\kappa_2 = N_2^+ - P_2^+ = 1 - 2 = -1.$$



Розглянемо контур  $L_0$ . Знайдені вище нулі належать області  $D_1^+$ , тому  $N_0^+ = 2$ . Обидва полюси належать  $D_0^-$ , тому  $P_0^+ = 0$ . Отже,

$$\kappa_0 = N_0^+ - P_0^+ = 2 - 0 = 2.$$

Обчислимо індекс функції за формулою (1.1)

$$\kappa = \text{ind}G(t) = \kappa_0 + \kappa_1 + \kappa_2 = 2 - 1 - 1 = 0.$$

Для знаходження функції  $\Gamma(z)$  застосуємо формулу (2.1). Оберемо  $z_0 \in D^+$  – довільна, тоді

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln \left( (\tau - z_0)^0 (\tau - 3i)^{-1} (\tau - i)^{-1} \cdot \frac{(\tau - i)(\tau - 3i)}{(\tau + i)(\tau + 2i)} \right)}{\tau - z} d\tau.$$

Беручи до уваги, що функція щільності  $f(z) = \ln \frac{1}{(z+i)(z+2i)}$  останнього інтеграла типу Коші є аналітичною в області  $D^+$ , згідно з (A.3) одержимо

$$\Gamma(z) = \begin{cases} \ln \frac{1}{(z+i)(z+2i)}, & z \in D^+, \\ 0, & z \in D^-. \end{cases}$$

Знайдемо функцію  $X^\pm(z)$  за формулою (2.2):

$$X^+(z) = \prod_{k=1}^m (z - z_k)^{-\kappa_k} e^{\Gamma^+(t)} = \frac{(z-3i)(z-i)}{(z+i)(z+2i)};$$

$$X^-(z) = (z - z_0)^{-\kappa} e^{\Gamma^-(t)} = 1.$$

За допомогою формули (Б.16), отримаємо:

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \cdot \frac{d\tau}{\tau - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{5\tau(\tau+i)(\tau+2i)}{(\tau+i)^2(\tau+2i)(\tau-i)^2(\tau-3i)} \cdot \frac{d\tau}{\tau - z}.$$

В даному випадку функція щільності  $f(z) = \frac{5z}{(z+i)(z-3i)(z-i)^2}$  є аналітичною в

області  $D^-$ . Тому відповідно до (А.4) отримаємо:

$$\Psi(z) = \begin{cases} 0, z \in D^+; \\ -\frac{5z}{(z+i)(z-i)^2(z-3i)}, z \in D^-. \end{cases}$$

Звідси

$$\Psi^+(z) = 0, \quad \Psi^-(z) = -\frac{5z}{(z+i)(z-i)^2(z-3i)}.$$

Із формули (1.11) випливає:

$$\Phi^+(z) = X^+(z) \left[ P_\kappa(z) + \Psi^+(z) \right] = \frac{(z-3i)(z-i)}{(z+i)(z+2i)} \cdot c,$$

$$\Phi^-(z) = X^-(z) \left[ P_\kappa(z) + \Psi^-(z) \right] = -\frac{5z}{(z+i)(z-i)^2(z-3i)} + c.$$

**Відповідь.**  $\Phi^+(z) = \frac{(z-3i)(z-i)}{(z+i)(z+2i)}c$ ,  $\Phi^-(z) = -\frac{5z}{(z+i)(z-i)^2(z-3i)} + c$ .

Даний приклад 2.3 також є авторським, аналогічно прикладу 2.2 було проведено перевірку. Після підстановки граничних значень функцій розв'язку, отримано тотожність.

## 2.4 Випадок трив'язної обмеженої області з від'ємним індексом задачі

### Приклад 2.4 Розв'язати крайову задачу Рімана

$$\Phi^+(t) = \frac{(t-i)(t-3i)}{(t+i)(t+2i)}\Phi^-(t) + \frac{12t}{(t+i)^2(t+2i)(t-i)}$$

за таких припущень: точка  $z_1 = 3i$  лежить всередині контура  $L_1$ , точка  $z_2 = i$  лежить всередині контура  $L_2$ , точка  $z_3 = -i$ , лежить всередині контура  $L_0$ ,  $z_4 = -2i$  лежать зовні контура  $L_0$ .

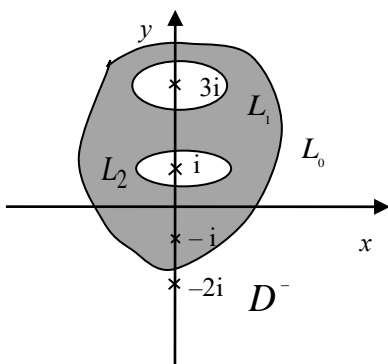


Рисунок 2.4

**Розв'язання.** Наведена область проілюстрована на рисунку 2.4. Беручи до уваги загальний вигляд крайової умови, у даному випадку запишемо:

$$G(t) = \frac{(t-i)(t-3i)}{(t+i)(t+2i)}, \quad g(t) = \frac{12t}{(t+i)^2(t+2i)(t-i)}.$$

Знайдемо індекс функції  $G(t) = \frac{(t-i)(t-3i)}{(t+i)(t+2i)}$  для контура  $L_1$ . Функція  $G(z)$

має нулі  $i$  і  $3i$ , причому точка  $i$  лежить зовні контура  $L_1$ , що відповідає області  $D_1^+$ , а точка  $3i$  лежить всередині цього контура, що відповідає області  $D_1^-$ . Отже,  $N_1^+ = 1$ . Полюсами цієї функції є точки  $-i$  і  $-2i$ . Так як обидві ці точки належать  $D_1^+$ , робимо висновок, що  $P_1^+ = 2$ . Отже,

$$\kappa_1 = N_1^+ - P_1^+ = 1 - 2 = -1.$$

Далі виконаємо аналогічні розрахунки для контура  $L_2$ . Функція  $G(z)$  має нулі  $i$  і  $3i$ , причому точка  $3i$  лежить зовні контура  $L_2$ , що відповідає області  $D_2^-$ , а точка  $i$  лежить всередині цього контура, що відповідає області  $D_2^+$ . Отже,  $N_2^+ = 1$ . Полюсами цієї функції являються точки  $-i$  і  $-2i$ . Обидві ці точки належать  $D_2^+$ , тому  $P_2^+ = 2$ . Отже,

$$\kappa_2 = N_2^+ - P_2^+ = 1 - 2 = -1.$$

Розглянемо контур  $L_0$ . Знайдені вище нулі належать області  $D_0^+$ , тому  $N_0^+ = 2$ . Поліус  $-i$  належать області  $D_0^+$ , а  $-2i$  належать області  $D_0^-$ , тому  $P_0^+ = 1$ . Отже,

$$\kappa_0 = N_0^+ - P_0^+ = 2 - 1 = 1.$$

Обчислимо індекс функції за формулою (1.1):

$$\kappa = \text{ind}G(t) = \kappa_0 + \kappa_1 + \kappa_2 = 1 - 1 - 1 = -1.$$

Для знаходження функції  $\Gamma(z)$  застосуємо формулу (2.1). Оберемо  $z_0 = -i$ , тоді

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln \left( (\tau + i)^1 (\tau - 3i)^{-1} (\tau - i)^{-1} \cdot \frac{(\tau - i)(\tau - 3i)}{(\tau + i)(\tau + 2i)} \right)}{\tau - z} d\tau.$$

Розглянемо функцію щільності  $f(z) = \ln \frac{1}{(z + 2i)}$  останнього інтеграла типу Коші.

Ця функція є аналітичною в області  $D^+$ . Відповідно до (A.3) одержимо

$$\Gamma(z) = \begin{cases} \ln \frac{1}{(z + 2i)}, & z \in D^+, \\ 0, & z \in D^-. \end{cases}$$

Знайдемо функцію  $X^\pm(z)$  за формулою (2.2):

$$X^+(z) = \prod_{k=1}^m (z - z_k)^{-\kappa_k} e^{\Gamma^+(t)} = \frac{(z - 3i)(z - i)}{(z + 2i)};$$

$$X^-(z) = (z - z_0)^{-\kappa} e^{\Gamma^-(t)} = z + i.$$

Застосовуючи формулу (B.16), отримаємо:

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \cdot \frac{d\tau}{\tau - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{12\tau(\tau + 2i)}{(\tau + i)^2 (\tau + 2i)(\tau - i)^2 (\tau - 3i)} \cdot \frac{d\tau}{\tau - z}.$$

Щоб визначити функцію  $\Psi(x)$  розглянемо функцію щільності

$$f(z) = \frac{12z}{(z + i)^2 (z - 3i)(z - i)^2}. \text{ Функція щільності останнього інтеграла типу Коші є}$$

сумою функції  $f_1(z) = \frac{3i}{16(z+i)} - \frac{3}{4(z+i)^2}$  та  $f_2(z) = \frac{9i}{16(z-3i)} - \frac{3i}{4(z-i)} + \frac{3}{2(z-i)^2}$ ,

які є аналітичними в області  $D^-$  і в області  $D^+$  відповідно. Відповідно до (A.3) і (A.4) запишемо:

$$\Psi(z) = \begin{cases} \frac{9i}{16(z-3i)} - \frac{3i}{4(z-i)} + \frac{3}{2(z-i)^2}, z \in D^+; \\ \frac{3i}{16(z+i)} - \frac{3}{4(z+i)^2}, z \in D^-. \end{cases}$$

Звідси

$$\Psi^+(z) = \frac{9i}{16(z-3i)} - \frac{3i}{4(z-i)} + \frac{3}{2(z-i)^2},$$

$$\Psi^-(z) = \frac{3i}{16(z+i)} - \frac{3}{4(z+i)^2}.$$

Шуканий розв'язок знаходимо, застосовуючи формули (1.11):

$$\Phi^+(z) = X^+(z) \cdot [P_K(z) + \Psi^+(z)] = \frac{(z-3i)(z-i)}{(z+2i)} \cdot \left[ \frac{9i}{16(z-3i)} - \frac{3i}{4(z-i)} + \frac{3}{2(z-i)^2} \right],$$

$$\Phi^-(z) = X^-(z) \cdot [P_K(z) + \Psi^-(z)] = (z+i) \left[ \frac{3i}{16(z+i)} - \frac{3}{4(z+i)^2} \right].$$

**Відповідь.** 
$$\Phi^+(z) = \frac{(z-3i)(z-i)}{(z+2i)} \cdot \left[ \frac{9i}{16(z-3i)} - \frac{3i}{4(z-i)} + \frac{3}{2(z-i)^2} \right],$$

$$\Phi^-(z) = (z+i) \left[ \frac{3i}{16(z+i)} - \frac{3}{4(z+i)^2} \right].$$

Наведений приклад 2.4 є авторським. Тому, аналогічно прикладу 2.2, було проведено перевірку. У результаті підстановки граничних значень функцій розв'язку отримано тотожність.

## 3 РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ РІМАНА НА МНОГОЗВ'ЯЗНІЙ НЕОБМЕЖЕНІЙ ОБЛАСТІ

### 3.1 Зауваження щодо розв'язку задачі Рімана на многозв'язній площині

Розглядаючи задачу Рімана на многозв'язній площині, ми бачимо, що відсутній зовнішній контур  $L_0$  і область  $D^+$  являє собою площину з отворами. Причому, нескінченно віддалена точка міститься в  $D^+$ , а не в  $D^-$ , як у випадках, наведених вище. В роботі Гахова Ф.Д. [6] наведено, як видозмінюється розв'язок задачі у даному випадку. Важливо враховувати поведінку на нескінченності функції  $\Phi^+(z)$ , а не  $\Phi^-(z)$ . Основна відмінність полягає в тому, що в ролі функції, яка має нульовий індекс щодо всіх контурів  $L_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) виступає функція

$\prod_{k=1}^m (t - z_k)^{\kappa_k} G(t)$ . Зауважимо, що до цієї функції не входить множник  $t^{-\kappa}$ . Звідси

ми робимо висновок, що для отримання розв'язку задачі достатньо повторити всі проведені раніше кроки, опустивши цей множник.

### 3.2 Приклад розв'язання задачі Рімана на многозв'язній площині

**Приклад 3.1** За умови  $\Phi^+(\infty) = 0$  розв'язати крайову задачу Рімана

$$\Phi^+(t) = \frac{(t-i)(t-2i)}{(t+i)(t+2i)} \Phi^-(t) + \frac{2t}{(t+i)^2(t+2i)(t-i)}$$

за таких припущень: точка  $z_1 = -2i$  лежить всередині контура  $L_2$ , точка  $z_2 = -i$  лежить зовні контура  $L_1$ , точка  $z_3 = i$  лежить всередині контура

$L_3$ , а точка  $z_4 = 2i$  лежить зовні цих контурів. При цьому, немає контура, який містив би в собі всі три зазначені контури  $L_1, L_2, L_3$ . Відповідна необмежена область проілюстрована на рисунку 3.1.

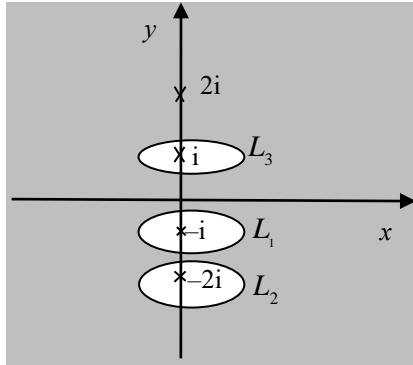


Рисунок 3.1

**Розв'язання.** Беручи до уваги загальний

вигляд

крайової умови, у даному випадку запишемо:

$$G(t) = \frac{(t-i)(t-2i)}{(t+i)(t+2i)}, \quad g(t) = \frac{2t}{(t+i)^2(t+2i)(t-i)}.$$

Спершу розглянемо функцію

$G(t) = \frac{(t-i)(t-2i)}{(t+i)(t+2i)}$  та знайдемо індекс для контура  $L_1$ . Бачимо, що функція  $G(z)$

має такі нулі  $-i$  і  $2i$ , та обидві ці точки належать області  $D_1^+$ . Отже,  $N_1^+ = 2$ .

Полюсами цієї функції є точки  $-i$  і  $-2i$ . Точка  $-i$  лежить всередині контура

$L_1$ , що відповідає області  $D_1^-$ , а точка  $-2i$  - зовні цього контура, що відповідає

області  $D_1^+$ , тому робимо висновок, що  $P_1^+ = 1$ . Отже,

$$\kappa_1 = N_1^+ - P_1^+ = 2 - 1 = 1.$$

Тепер розглянемо контур  $L_2$ . Функція  $G(z) = \frac{(z-i)(z-2i)}{(z+i)(z+2i)}$  має нулі  $i$  і  $2i$ , обидві

ці точки належать області  $D_2^+$ . Отже,  $N_2^+ = 2$ . Полюсами цієї функції є точки

$-i$  і  $-2i$ . Точка  $-2i$  лежить зовні контура  $L_2$  що відповідає області  $D_2^-$ , а точка

$-i$  лежить всередині цього контура, що відповідає області  $D_2^+$ , тому робимо

висновок, що  $P_2^+ = 1$ . Отже,



$$\kappa_2 = N_2^+ - P_2^+ = 2 - 1 = 1.$$

Перейдемо до контура  $L_3$ . Нулі цієї функції  $i$  і  $2i$ , причому точка  $i$  належать області  $D_3^-$ , а точка  $2i$  належить  $D_3^+$ , тому  $N_3^+ = 1$ . Обидва полюси є точками області  $D_3^+$ , тому  $P_3^+ = 2$ . Отже,

$$\kappa_3 = N_3^+ - P_3^+ = 1 - 2 = -1.$$

Для проведення наступних розрахунків, обчислимо індекс функції за формулою (1.1):

$$\kappa = \text{ind}G(t) = \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 = 1.$$

Знаходимо функцію  $\Gamma(z)$ :

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln \left( (\tau + i)^1 (\tau + 2i)^1 (\tau - i)^{-1} \cdot \frac{(\tau - i)(\tau - 2i)}{(\tau + i)(\tau + 2i)} \right)}{\tau - z} d\tau.$$

Для даного випадку функція щільності останнього інтеграла типу Коші –  $f(z) = \ln(z - 2i)$ . Наведена функція є аналітичною в області  $D^-$ , то згідно з (A.4) запишемо

$$\Gamma(z) = \begin{cases} 0, & z \in D^+, \\ -\ln(z - 2i), & z \in D^-. \end{cases}$$

За формулою (2.2) обчислимо функцію  $X^\pm(z)$ :

$$X^+(z) = \prod_{k=1}^m (z - z_{\kappa_k})^{-\kappa_k} e^{\Gamma^+(t)} = \frac{z - i}{(z + i)(z + 2i)},$$

$$X^-(z) = e^{\Gamma^-(t)} = \frac{1}{z-2i}.$$

Застосовуючи формулу (Б.16), отримаємо:

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \cdot \frac{d\tau}{\tau-z} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{2\tau}{(\tau+i)(\tau-i)^2} \cdot \frac{d\tau}{\tau-z}.$$

Бачимо, що функція щільності  $f(z) = \frac{2z}{(z+i)(z-i)^2}$  останнього інтеграла

аналітична в області  $D^+$ , причому  $f(\infty) = 0$ , тому застосовуючи формули (А.3) і (А.4) одержимо:

$$\Psi(z) = \begin{cases} \frac{2z}{(z+i)(z-i)}, & z \in D; \\ 0, & z \in D. \end{cases}$$

Звідси

$$\Psi^+(z) = \frac{2z}{(z+i)(z-i)^2}, \quad \Psi^-(z) = 0.$$

Враховуючи умову  $\Phi^+(\infty) = 0$ , знаходимо шуканий розв'язок відповідно до формули (1.11):

$$\begin{aligned} \Phi^+(z) &= X^+(z) \cdot \left[ P_{\kappa-1}(z) + \Psi^+(z) \right] = \frac{z-i}{(z+i)(z+2i)} \cdot \left[ A + \frac{2z}{(z+i)(z-i)^2} \right], \\ \Phi^-(z) &= X^-(z) \cdot \left[ P_{\kappa-1}(z) + \Psi^-(z) \right] = \frac{1}{z-2i} [A+0]. \end{aligned}$$

У результаті попередніх розрахунків отримано розв'язок:

$$\Phi^+(z) = \frac{z-i}{(z+i)(z+2i)} \cdot \left[ A + \frac{2z}{(z+i)(z-i)^2} \right], \quad \Phi^-(z) = \frac{1}{z-2i} [A+0].$$

**Відповідь.** 
$$\Phi^+(z) = \frac{z-i}{(z+i)(z+2i)} \cdot \left[ A + \frac{2z}{(z+i)(z-i)^2} \right], \quad \Phi^-(z) = \frac{A}{z-2i}.$$

Для цього прикладу також було проведено перевірку. Після підстановки граничних значень функцій розв'язку, отримано тотожність.

### 3.3 Зауваження щодо розв'язання задачі Рімана на многозв'язній півплощині

При розв'язанні задачі Рімана на многозв'язній півплощині одним із контурів  $L_0$  вважатимемо дійсну вісь. За область  $D^+$  будемо вважати ту частину верхньої комплексної півплощини, яка лежить зовні всіх контурів  $L_k$  ( $k=1,2,\dots,m$ ), що задовольняють зазначеним раніше припущенням. Доповнення до об'єднання цієї області з всіма контурами позначається через  $D^-$ . За таких домовленостей оббіг всіх контурів буде задавати додатній напрямок. Припустимо, що  $z_0$  – точка, що належить області  $D^+$ . Формули для отримання розв'язку збігаються з описаними в розділі 1.

### 3.4 Приклад розв'язання задачі Рімана на многозв'язній півплощині

#### Приклад 3.2 Розв'язати крайову задачу Рімана

$$\Phi^+(t) = \frac{t-2i}{t-i} \Phi^-(t) + \frac{t+bi}{t^2+1}$$

за таких припущень: точка  $z_1 = 2i$  лежить всередині контура  $L_2$ , точка  $z_2 = i$  лежить всередині контура  $L_1$ .

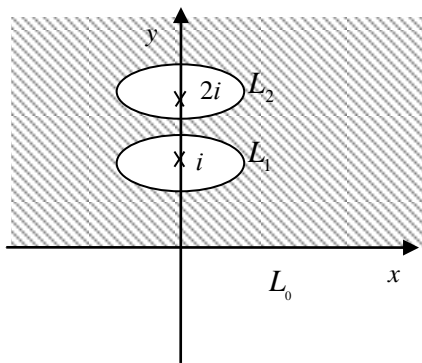


Рисунок 3.2

**Розв'язання.** Для даного випадка функції  $G(t)$  та  $g(t)$  матимуть вигляд:

$$G(t) = \frac{t-2i}{t-i}, \quad g(t) = \frac{t+bi}{t^2+1}.$$

Тепер знайдемо індекс функції  $G(t)$  на дійсній осі  $L_0 = (-\infty; +\infty)$  (рис. 3.2). В цьому випадку  $D_0^+$  – верхня півплощина. Нулем функції

$G(z) = \frac{z-2i}{z-i}$  є точка  $z = 2i$ , яка належить  $D_0^+$ , а полюсом – точка  $z = i$ , яка теж

належить  $D_0^+$ . Отже,  $N_0^+ = 1, P_0^+ = 1$ . Тоді

$$\kappa_0 = N_0^+ - P_0^+ = 1 - 1 = 0.$$

Далі виконаємо ті ж дії для контура  $L_1$ . Функція  $G(z) = \frac{z-2i}{z-i}$  має один нуль в

області  $D_1^+$  (ця область утворюється із точок, що лежать зовні контура  $L_1$ ). Проте функція  $G(z)$  не має полюсів в цій області. Отже, отримаємо:

$$\kappa_1 = N_1^+ - P_1^+ = 1 - 0 = 1.$$

Наступним кроком розглянемо контур  $L_2$ . Функція  $G(z) = \frac{z-2i}{z-i}$  не має нулів, і має один полюс в області  $D_2^+$ . Ця область утворюється із точок, що лежать зовні контура  $L_2$ . Отже,

$$\kappa_2 = N_2^+ - P_2^+ = 0 - 1 = -1.$$

За допомогою формули (1.1) обчислимо індекс функції

$$\kappa = \text{ind}G(t) = \kappa_0 + \kappa_1 + \kappa_2 = 0 + 1 - 1 = 0.$$

Оберемо у якості  $z_0$  довільну точку області  $D^+$ , яка відмінна від  $i$  та  $2i$ . Знайдемо функцію  $\Gamma(z)$  застосовуючи формулу (3.1):

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln \left( (\tau - z_0)^0 (\tau - i)^1 (\tau - 2i)^{-1} \cdot \frac{\tau - 2i}{\tau - i} \right)}{\tau - z} d\tau = 0.$$

Для знаходження функції  $X^\pm(z)$  застосуємо формулу (1.8):

$$X^+(z) = (z - i)^{-1} (z - 2i)^1 \cdot 1 = \frac{z - 2i}{z - i};$$

$$X^-(z) = (z - z_0)^{-0} \cdot 1 = 1.$$

Застосовуючи формулу (Б.16), запишемо:

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{(\tau + bi)(\tau - i)}{(\tau^2 + 1)(\tau - 2i)} \frac{d\tau}{\tau - z}.$$

Функція щільності  $f(z) = \frac{z+bi}{(z+i)(z-2i)}$  останнього інтеграла типу Коші є аналітичною в області  $D^+$ , причому  $f(\infty) = 0$ . Згідно з (A.4) одержимо:

$$\Psi(z) = \begin{cases} \frac{z+bi}{(z+i)(z-2i)}, & z \in D^-; \\ 0, & z \in D^+. \end{cases}$$

Звідки

$$\Psi^+(z) = \frac{z+bi}{(z+i)(z-2i)}, \quad \Psi^-(z) = 0.$$

Спираючись на формули (3.4), запишемо шуканий розв'язок:

$$\Phi^+(z) = X^+(z) \left[ P_\kappa(z) + \Psi^+(z) \right] = \frac{z-2i}{z-i} \left[ \frac{z+bi}{(z+i)(z-2i)} + c \right],$$

$$\Phi^-(z) = X^-(z) \left[ P_\kappa(z) + \Psi^-(z) \right] = c.$$

**Відповідь.**  $\Phi^+(z) = \frac{z-2i}{z-i} \left[ \frac{z+bi}{(z+i)(z-2i)} + c \right], \quad \Phi^-(z) = c.$

**Приклад 3.3** За умови  $\Phi^{\pm}(\infty) = 0$  розв'язати крайову задачу Рімана

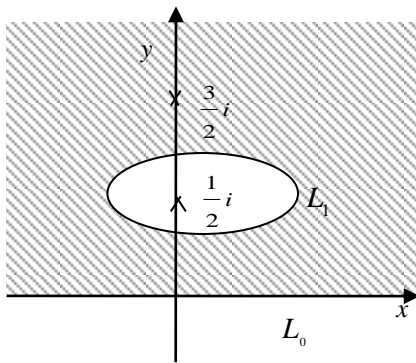


Рисунок 3.3

$$\Phi^+(t) = \frac{\frac{3}{2}i - t}{t - \frac{1}{2}i} \Phi^-(t) + \frac{a}{t - \frac{1}{2}i}$$

за таких припущень: точка  $z_1 = \frac{1}{2}i$  лежить

всередині контура  $L_1$ .

**Розв'язання.** Зображення області наведено на рисунку 3.3. У даному випадку отримаємо:

$$G(t) = \frac{\frac{3}{2}i - t}{t - \frac{1}{2}i}, \quad g(t) = \frac{a}{t - \frac{1}{2}i}.$$

Знайдемо індекс функції  $G(t) = \frac{\frac{3}{2}i - t}{t - \frac{1}{2}i}$  для контура  $L_1$ . Функція  $G(z) = \frac{\frac{3}{2}i - z}{z - \frac{1}{2}i}$  має

один нуль, і не має полюсів. Отже,

$$\kappa_1 = N_1^+ - P_1^+ = 1 - 0 = 1.$$

Розглянемо контур  $L_0$ . Функція  $G(z) = \frac{\frac{3}{2}i - z}{z - \frac{1}{2}i}$  має один нуль, і має один полюс.

Отже,

$$\kappa_0 = N_0^+ - P_0^+ = 1 - 1 = 0.$$

Обчислимо індекс функції за формулою (1.1)

$$\kappa = \text{ind}G(t) = \kappa_0 + \kappa_1 = 0 + 1 = 1.$$

Для знаходження функції  $\Gamma(z)$  застосуємо формулу (1.6). Оберемо  $z_0 = \frac{3i}{2}$ , тоді

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln \left( \left( -\tau + \frac{3}{2}i \right)^{-1} \left( \tau - \frac{1}{2}i \right)^1 \cdot \frac{\frac{3}{2}i - \tau}{\tau - \frac{1}{2}i} \right)}{\tau - z} d\tau = 0.$$

Знайдемо функцію  $X^\pm(z)$  за формулою (1.8):

$$X^+(z) = \left( z - \frac{1}{2}i \right)^{-1} \cdot 1 = \frac{1}{z - \frac{1}{2}i};$$

$$X^-(z) = 1 \cdot \left( -z + \frac{3}{2}i \right)^{-1} = \frac{1}{-z + \frac{3}{2}i}.$$

Застосовуючи формулу (Б.16), отримаємо:

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \cdot \frac{d\tau}{\tau - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_L a \cdot \frac{d\tau}{\tau - z}.$$

Бачимо, що функція щільності  $f(z) = a$  останнього інтеграла типу Коші є аналітичною в області  $D^+$ . Відповідно до (А.3) одержимо:



$$\Psi(z) = \begin{cases} a, z \in D^+; \\ 0, z \in D^-. \end{cases}$$

Звідки

$$\Psi^+(z) = a, \quad \Psi^-(z) = 0.$$

З урахуванням мови на нескінченності, розв'язок знаходимо за формулою (3.4):

$$\Phi^+(z) = X^+(z) \cdot [P_{\kappa-1}(z) + \Psi^+(z)] = i \cdot \frac{z - \frac{3}{2}i}{z - \frac{1}{2}i} \cdot c,$$

$$\Phi^-(z) = X^-(z) \cdot [P_{\kappa-1}(z) + \Psi^-(z)] = -i \cdot \left[ \frac{f}{z - \frac{3}{2}i} + c \right].$$

**Відповідь.**  $\Phi^+(z) = ci \cdot \frac{2z - 3i}{2z - i}, \quad \Phi^-(z) = -i \cdot \left[ \frac{2f}{2z - 3i} + c \right].$

Після отримання розв'язків прикладів 3.1 і 3.2, їх граничні значення було підставлено у відповідні їм крайові умови. В результаті, отримано тотожності. Це свідчить про те, що знайдені функції є розв'язками відповідних крайових задач.

## ВИСНОВКИ

Крайові задачі теорії аналітичних функцій мають застосування в механіці деформівного твердого тіла, в гідро- і аеромеханіці, в задачах математичної фізики, тому задачі, розглянуті в роботі є актуальними.

У роботі досліджено крайову задачу Рімана теорії аналітичних функцій на многозв'язній області. Теоретичні відомості щодо такої задачі наведено в роботі Гахова Ф.Д.. Приклади, запропоновані в дипломній роботі є авторськими. Вони включають випадки крайових задач на многозв'язних обмежених і необмежених областях. Розглянуто різноманітні випадки значень індекса задачі.

У другому розділі наведено приклади задач з дво- і тризв'язними областями. Ці задачі ґрунтуються на крайовій умові прикладу Гахова Ф.Д. наведеному для однозв'язної області. Варіанти зображення многозв'язної області обиралися за принципом охоплення різноманітних випадків додатнього і від'ємного індексів.

У третьому розділі розглядаються задачі Рімана на многозв'язних необмежених областях. Першим таким прикладом була задача на многозв'язній площині, а інші на півплощині. Теоретичні зауваження щодо необмежених многозв'язних областей були наведені в роботі Гахова Ф.Д. Такі задачі мають найбільші прикладні застосування.

Оскільки всі приклади роботи авторськими то для перевірки вірогідності отриманих розв'язків було проведено перевірки. Для цього, граничні значення розв'язків підставлено в крайову умову, яка перетворилася в тотожність.

## ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Александров В.М., Чебаков М.И. Введение в механику контактных взаимодействий. Ростов-на-Дону : ООО «ЦВВР», 2007. 114 с.
2. Бабаев А.А., Салаев В.В. Краевые задачи и сингулярные уравнения на спрямляемом контуре // *Мат. заметки*. 1982. № 4. С. 571– 580.
3. Васильева Ю.В., Плакса С.А. Кусочно-непрерывная краевая задача Римана на спрямляемой кривой // *Укр. мат. журн.* 2006. № 5. С. 616 – 628.
4. Векуа Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений. Москва : Наука, 1970. 379 с.
5. Гандель Ю.В. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Харьков : Харьковский нац. ун-т им. В. Н. Каразина, 2001. 92 с.
6. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. Москва : Наука, 1977. 640 с.
7. Конторович М.И. Операционное исчисление и нестандартные явления в электрических цепях. Москва : Машиностроение, 1987. 298 с.
8. Кулиев В.Д. Сингулярные краевые задачи. Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2005. 750 с.
9. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. Москва : Наука, 1973. 736 с.
10. Левинский С.В. Краевые задачи для функций, полианалитических в области : дис... канд. физ.- мат. наук / Одесский ун-т. Одесса, 1991.
11. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. Москва : Наука, 1977. 448 с.
12. Kutlu K. On Riemann boundary value problem // *Turkish Journal of Mathematics*, 2000. № 1. P. 1 – 17.
13. Салимов Р.Б., Сулейманов А.З. Новый подход к решению однородной краевой задачи Римана на луче с бесконечным индексом // *Известия вузов*. 2017. №5. С. 71–76.

14. Крайові задачі теорії аналітичних функцій: навч. посіб. для студентів освітньо-кваліфікац-го рівня «спеціаліст» і осв. ст. «магістр» спец-ті «Математика» (за напрямками) / С.І. Гоменюк, С.М. Гребенюк, Н.М. Д'яченко, О.О. Тітова. Запоріжжя: ЗНУ, 2015. 91 с.

## ДОДАТОК А

### Відомі поняття та твердження, що використовуються у роботі

#### А.1 Функції, які задовольняють умові Гельдера. Поняття та властивості індексу функції

Нехай  $\gamma$  – деякий гладкий контур і  $\varphi(t)$  – функція точок контура  $\gamma$ . Кажуть, що функція  $\varphi(t)$  задовольняє на контурі  $\gamma$  умову Гельдера, якщо для будь-яких двох точок  $t_1$  і  $t_2$  контура  $\gamma$  виконується нерівність

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leq A |t_1 - t_2|^\lambda, \quad (\text{A.1})$$

де  $A$  та  $\lambda$  – додатні сталі.

Якби  $\lambda$  було більше одиниці [6], то з умови (A.1) випливало би, що похідна  $\varphi'(t)$  у всіх точках контура  $\gamma$  дорівнювала би нулю, тобто функція  $\varphi(t)$  була би сталою на контурі  $\gamma$ . Тому будемо вважати, що  $0 < \lambda \leq 1$ . Якщо  $\lambda = 1$ , то умова Гельдера збігається з умовою Ліпшиця.

Із (A.1) випливає: якщо функція  $\varphi(t)$  на  $\gamma$  задовольняє умову Гельдера, то вона на контурі  $\gamma$  неперервна.

Теорема А.1 [6, 14] Якщо  $\lambda < \lambda_1$  і  $\varphi(t) \in H_{\lambda_1}(\gamma)$ , то  $\varphi(t) \in H_\lambda(\gamma)$ , тобто  $H_{\lambda_1}(\gamma) \subset H_\lambda(\gamma)$ .

Нехай  $\gamma$  – гладкий замкнений контур і  $G(t)$  – задана на ньому неперервна функція, яка не перетворюється в нуль. Згідно з [9] індексом  $\kappa$  функції  $G(t)$  відносно контура  $\gamma$  називається поділений на  $2\pi$  приріст її аргументу при обході кривої  $\gamma$  в додатному напрямі:

$$\kappa = \text{Ind}G(t) = \frac{1}{2\pi} \left[ \arg G(t) \right] \Big|_{\gamma}. \quad (\text{A.2})$$

Властивості індексу:

1) якщо  $G(t)$  є крайове значенні функції, аналітичної всередині або зовні контура, то індекс її дорівнює числу нулів всередині контура  $\gamma$  або відповідно числу нулів зовні контура  $\gamma$ , взятому зі знаком « $\leftarrow$ ».

2) якщо функція  $G(t)$  аналітична всередині контура  $\gamma$ , за винятком скінченного числа точок, де вона може мати плюси, то число нулів потрібно замінити на різницю числа нулів і полюсів. При цьому нулі і полюси враховуються стільки разів, яка у них кратність [9].

## **А.2 Інтеграл типу Коші на контурі. Сингулярний криволінійний інтеграл**

Нехай  $\gamma$  – деякий гладкий замкнений контур на площині комплексної змінної  $z$ . Область яка лежить всередині контура  $\gamma$ , будемо називати внутрішньою і позначати  $D^+$ , а доповнюючи до  $D^+ \cup \gamma$  область, яка містить нескінченно віддалену точку, будемо називати зовнішньою і позначати  $D^-$ .

Якщо функція [9]  $f(z)$  – функція, аналітична в  $D^+$  і неперервна в  $D^+ \cup \gamma$ , то за формулою Коші

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\tau)}{\tau - z} d\tau = \begin{cases} f(z), z \in D^+; \\ 0, z \in D^-. \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Якщо ж  $f(z)$  аналітична в області  $D^-$  і неперервна в  $D^- \cup \gamma$ , то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\tau)}{\tau - z} d\tau = \begin{cases} f(\infty), z \in D^+; \\ -f(z) + f(\infty), z \in D^-. \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

За додатній напрямок обходу контура  $\gamma$  будемо приймати той, при якому область  $D^+$  залишається зліва. Інтеграл, який стоїть зліва в формулах (A.3),(A.4), називається інтегралом Коші.

Нехай [9] тепер  $\gamma$  – гладкий замкнений або незамкнений контур, цілком розташований в скінченній частині площини, а  $\phi(\tau)$  – неперервна функція точок контура  $\gamma$ . Тоді інтеграл

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\phi(\tau)}{\tau - z} d\tau, \quad (\text{A.5})$$

побудований так само, як і інтеграл Коші, називається інтегралом типу Коші.

Функція  $\phi(\tau)$  називається його щільністю, а  $\frac{1}{\tau - z}$  – ядром.

Інтеграл типу Коші являє собою функцію, аналітичну на всій комплексній площині, за винятком точок контура  $\gamma$ .

Якщо  $\gamma$  – замкнений контур, то  $\Phi(z)$  розпадається на дві аналітичні функції:  $\Phi^+(z)$ , визначену в області  $D^+$ , і  $\Phi^-(z)$ , визначену в області  $D^-$ .

властивість:  $\Phi^-(\infty) = 0$ .

Нехай  $\gamma$  – гладкий контур, а  $t, \tau$  – його точки. Розглянемо особливий криволінійний інтеграл

$$\int_{\gamma} \frac{\phi(\tau)}{\tau - z} d\tau. \quad (\text{A.7})$$

Відомо, що [6] сингулярний інтеграл (А.7) для функції  $\varphi(\tau)$ , яка задовольняє умову Гельдера, існує в розумінні головного значення за Коші.

### А.3 Формули Сохоцького

Нехай  $\varphi(\tau)$  задовольняє на  $\gamma$  умову Гельдера. Розглянемо інтеграл типу Коші

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\phi(\tau)}{\tau - z} d\tau. \quad (\text{А.8})$$

Позначимо через

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\phi(\tau)}{\tau - t} d\tau \quad (\text{А.9})$$

значення сингулярного інтеграла (А.8) на  $\gamma$ . Будемо вважати контур  $\gamma$  замкненим і гладким. Позначимо через  $\Phi^+(t)$  граничні значення аналітичних функції  $\Phi(z)$  при прямуванні точки  $z$  зсередини  $\gamma$  до точки  $t$  контура, а через  $\Phi^-(t)$ , – при прямуванні зовні.

Мають місце формули [6]:

$$\Phi^+(t) = \frac{1}{2} \phi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\phi(\tau)}{\tau - t} d\tau; \quad (\text{А.10})$$

$$\Phi^-(t) = -\frac{1}{2} \phi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\phi(\tau)}{\tau - t} d\tau; \quad (\text{А.11})$$



отримані вперше в 1873 р. математиком Ю.В. Сохоцьким [1,6], називаються формулами Сохоцького. При цьому формулам (A.10), (A.11) можна надати такого вигляду:

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t); \quad (\text{A.12})$$

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = \frac{1}{\pi i} \cdot \int_{\gamma} \frac{\phi(\tau)}{\tau - t} d\tau. \quad (\text{A.13})$$

Формули Сохоцького справедливі і для розімкненого гладкого контура, вони мають відповідно вигляд (A.10) – (A.13), але під  $\Phi^+(t)$  і  $\Phi^-(t)$  розуміємо крайове значення  $\Phi(z)$ , якщо  $z \rightarrow t$  відповідно зліва або справа контура  $\gamma$ . Окрім того, формули Сохоцького встановлені для гладких контурів, тобто в точках гладкості контура  $\gamma$ . Для кутових точок вони також будуть мати місце, але набувають дещо іншого вигляду.

## ДОДАТОК Б

### Крайова задача Рімана на зімкненому контурі і на дійсній осі

#### Б.1 Задача Рімана на замкненому контурі

Нехай  $\gamma$  – простий гладкий замкнений контур, який розбиває комплексну площину на дві області: внутрішню  $D^+$  і зовнішню  $D^-$ . Без обмеження загальності міркувань будемо вважати, що точка  $z_0 \in D^+$ . Нехай на  $\gamma$  задані функції  $G(t)$  і  $g(t)$ , які задовольняють умову Гельдера, причому  $G(t) \neq 0$ .

Задача Рімана полягає в наступному [6]: знайти функції  $\Phi^+(z)$  і  $\Phi^-(z)$ , аналітичні відповідно в областях  $D^+$  і  $D^-$ , які задовольняють на контурі  $\gamma$  крайову умову

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in \gamma, \quad (\text{Б.1})$$

де  $\Phi^\pm(t)$  – крайові значення функцій  $\Phi^\pm(z)$  із областей  $D^\pm$  відповідно. При цьому функція  $G(t)$  називається коефіцієнтом задачі Рімана, а функція  $g(t)$  – її вільним членом. Якщо  $g(t) \equiv 0$ , задача Рімана називається однорідною.

При  $G(t) \equiv 1$  маємо задачу «про стрибок». Задача (Б.1) набуває вигляду

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = g(t), \quad t \in \gamma, \quad (\text{Б.2})$$

і, згідно з формулами Сохоцького (А.23) розв'язку задачі (Б.2) можна надати вигляду

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\tau)}{\tau - z} d\tau. \quad (\text{Б.3})$$

Таким чином, в класі функцій, які щезають на нескінченності ( $\Phi^{-}(\infty) = 0$ ), задача (Б.2) має єдиний розв'язок (Б.3). Якщо ж відкинути додаткову умову  $\Phi^{-}(\infty) = 0$ , то розв'язок задачі (Б.2), очевидно, буде визначатися формулою

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\tau)}{\tau - z} d\tau + \text{const}. \quad (\text{Б.4})$$

При  $g(t) \equiv 0$  маємо однорідну задачу

$$\Phi^{+}(t) = G(t)\Phi^{-}(t), t \in \gamma. \quad (\text{Б.5})$$

Нехай  $\kappa = \text{Ind}G(t)$ . Будемо вважати спочатку, що  $\kappa = 0$ . Позначимо задля скорочення [6]:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\ln G(\tau)}{\tau - z} d\tau. \quad (\text{Б.6})$$

Тоді розв'язками задачі (Б.5) за умови  $\Phi^{-}(\infty) = 1$ , будуть функції

$$\Phi^{+}(z) = e^{\Gamma^{+}(z)}, \Phi^{-}(z) = e^{\Gamma^{-}(z)}. \quad (\text{Б.7})$$

Якщо умова  $\Phi^{-}(\infty) = 1$  відсутня, то в формулі (Б.6) згідно з (Б.4) треба додати довільний доданок. Тоді розв'язок задачі (Б.5) буде мати вигляд

$$\Phi^+(z) = Ae^{\Gamma^+(z)}, \Phi^-(z) = Ae^{\Gamma^-(z)}. \quad (\text{Б.8})$$

де  $A$  – довільна стала.

Нехай тепер  $\kappa \neq 0$ .

$$X^+(z) = e^{\Gamma^+(z)}, X^-(z) = e^{\Gamma^-(z)}, \quad (\text{Б.9})$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\ln[(\tau - z_0)^{-k} G(\tau)]}{\tau - z} d\tau. \quad (\text{Б.10})$$

Якщо  $k > 0$ , то рівність (Б.10) визначає функцію, яка аналітична у всій площині і має на нескінченності полюс порядку  $\kappa$ , тобто це многочлен порядку  $\kappa$   $P_k(t)$ . Тоді розв'язок задачі (Б.5) має вигляд

$$\Phi^+(z) = X^+(z)P_k(z), \Phi^-(z) = (z - z_0)^{-k} X^-(z)P_k(z); \quad (\text{Б.11})$$

якщо  $k < 0$ , то рівність (Б.10) визначається функцією, яка аналітична в усій площині і має на нескінченності нуль порядку  $k$ , тобто в цьому випадку  $\Phi^+(z) = \Phi^-(z) \equiv 0$  – задача (Б.5) має лише тривіальний розв'язок.

Таким чином, якщо  $k = 0$ , то однорідна задача Рімана за умови  $\Phi^-(\infty) = 1$  має єдиний розв'язок, що визначається формулами (Б.7); якщо  $k < 0$ , то однорідна задача Рімана має лише нульовий розв'язок; якщо ж  $k > 0$ , то однорідна задача Рімана має розв'язок, що визначається формулами (Б.11), (Б.9), (Б.10). В цьому випадку однорідна задача Рімана має  $k + 1$  лінійно незалежний розв'язок

$$\begin{aligned} \Phi_k^+(z) &= z^k X^+(z), \\ \Phi_k^-(z) &= (z - z_0)^{k-\kappa} X^-(z), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \kappa, \end{aligned} \quad (\text{Б.12})$$

де  $X^\pm(z)$  визначаються формулою (Б.9).

Розглядається неоднорідна задача

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), t \in \gamma. \quad (\text{Б.13})$$

Нехай  $k = \text{Ind}G(t)$ . Якщо розв'язок задачі (Б.13) визначає має вигляд

$$\Phi^+(z) = X^+(z) \left[ \Psi^+(z) + P_k(z) \right], \quad (\text{Б.14})$$

$$\Phi^-(z) = (z - z_0)^{-k} X^-(z) \left[ \Psi^-(z) + P_k(z) \right], \quad (\text{Б.15})$$

де  $X^\pm(z)$  визначаються за формулами (Б.9), (Б.10), а

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \cdot \frac{d\tau}{\tau - z}. \quad (\text{Б.16})$$

Якщо  $k < 0$ , то рівність (Б.17) визначає функцію, аналітичну на всій площині, яка перетворюється в нуль на нескінченності. Тоді неоднорідна задача Рімана (Б.13) має розв'язок

$$\Phi^+(z) = X^+(z)\Psi^+(z), \quad (\text{Б.17})$$

$$\Phi^-(z) = (z - z_0)^{-k} X^-(z)\Psi^-(z). \quad (\text{Б.18})$$

При  $k = -1$  задача (Б.13) має єдиний розв'язок, що визначається формулами (Б.17), (Б.18), (Б.9), (Б.10), (Б.16). якщо ж  $k < -1$ , то неоднорідна задача (Б.13), взагалі кажучи, нерозв'язна, оскільки в цьому випадку з (Б.21) випливає, що  $\Phi^-(z)$  на нескінченності може мати полюс порядку  $-k - 1$ . Умови, за яких функція  $\Phi^-(z)$  не буде мати полюса на нескінченності мають вигляд [6]:

$$\int_{\gamma} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \tau^{k-1} d\tau = 0, k = 1, 2, \dots, -k - 1. \quad (\text{Б.22})$$

Таким чином, якщо  $k \geq 0$ , то розв'язок неоднорідної задачі визначається формулами (Б.18), (Б.19) і залежить від  $k + 1$  довільної сталої; якщо  $k = -1$ , то неоднорідна задача Рімана розв'язна і має єдиний розв'язок, що визначається формулами (Б.20), (Б.21); якщо ж  $k < -1$ , то неоднорідна задача Рімана, взагалі кажучи, нерозв'язна. У випадку виконання умов розв'язності (Б.22) вона буде розв'язною і матиме єдиний розв'язок, що визначається формулами (Б.20), (Б.21).