

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра фундаментальної математики

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА

на тему: «АНАЛІЗ ЧИСОВИХ РЕЗУЛЬТАТІВ РОЗВ'ЯЗКУ
ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ГАММЕРШТЕЙНА
ПЛОСКОЇ КОНТАКТНОЇ ЗАДАЧІ З УРАХУВАННЯМ
ТЕРТЯ І ШОРСТКОСТІ, ЩО ДЕФОРМУЄТЬСЯ
ЗА ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНИМ ЗАКОНОМ,
ДЛЯ МАЛИХ КОЕФІЦІЄНТІВ ШОРСТКОСТІ»

Виконала: студентка 2 курсу, групи 8.1118
спеціальності 111 математика
(шифр і назва спеціальності)

освітньої програми математика

А.К. Юрченко

(ініціали та прізвище)

доцент кафедри фундаментальної
математики,

Керівник доцент, к.ф.-м.н. Д'яченко Н.М.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Рецензент доцент кафедри загальної математики,
доцент, к.ф.-м.н. Стеганцев Є.В.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет математичний

Кафедра фундаментальної математики

Рівень вищої освіти магістр

Спеціальність 111 математика

(шифр і назва)

Освітня програма математика

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри
фундаментальної математики,
д.т.н., доцент

Гребенюк С.М.
(підпис)

« 31 » травня 2019 р.

З А В Д А Н Н Я
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТЦІ

Юрченко Анастасії Костянтинівні

(прізвище, ім'я та по батькові)

1. Тема роботи Аналіз числових результатів розв'язку інтегрального рівняння
Гаммерштейна плоскої контактної задачі з урахуванням тертя і шорсткості,
що деформується за експоненціальним законом, для малих коефіцієнтів шорсткості

керівник роботи Д'яченко Наталя Миколаївна, к.ф.-м.н., доцент

(прізвище, ім'я та по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затвержені наказом ЗНУ від « 29 » травня 2019 року № 811-с

2. Строк подання студентом роботи 09.12.2019

3. Вихідні дані до роботи 1. Постановка задачі.

2. Перелік літератури.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)

1. Постановка задачі.

2. Основні теоретичні відомості.

3. Обґрунтувати можливість застосування методу редукції.

4. Провести аналіз числових результатів щодо впливу шорсткості і тертя на контактні характеристики.

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень) _____

Презентація

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання 31.05.2019

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	Вересень 2019	Виконано
2.	Збір вихідних даних.	Жовтень 2019	Виконано
3.	Обробка методичних та теоретичних джерел.	Листопад 2019	Виконано
4.	Розробка першого, другого та третього розділу.	Листопад 2019	Виконано
5.	Розробка четвертого та п'ятого розділу.	Грудень 2019	Виконано
6.	Оформлення та нормоконтроль кваліфікаційної роботи.	Грудень 2019	Виконано
7.	Захист кваліфікаційної роботи.	Січень 2020	

Студент _____
(підпис)

А.К. Юрченко
(ініціали та прізвище)

Керівник роботи _____
(підпис)

Н.М. Д'яченко
(ініціали та прізвище)

Нормоконтроль пройдено

Нормоконтролер _____
(підпис)

І.Г. Ткаченко
(ініціали та прізвище)

ЗМІСТ

Завдання на кваліфікаційну роботу.....	3
Реферат	5
Summary	6
Вступ.....	7
1 Огляд літератури	10
1.1 Моделювання шорсткості поверхні	10
1.2 Зв'язок законів деформування шорсткості	18
2 Постановка плоскої контактної задачі та її інтегральне рівняння.....	20
3 Зведення інтегрального рівняння Гаммерштейна до нескінченної системи нелінійних алгебраїчних рівнянь та дослідження існування єдиного розв'язку рівняння Гаммерштейна	27
3.1 Зведення інтегрального рівняння Гаммерштейна до нескінченної системи нелінійних алгебраїчних рівнянь	27
3.2 Властивості лінійного оператора, через який виражається нелінійний оператор даної задачі	31
3.3 Область визначення оператора G	35
3.4 Дослідження на неперервність образу неперервної на відрізьку $[-1,1]$ функції при дії оператора G	36
3.5 Перевірка умови стискання оператора G	37
4 Аналіз числових результатів задачі.....	41
5 Метод редукції розв'язування нескінченної системи нелінійних рівнянь.....	49
Висновки	54
Перелік посилань.....	57
Додаток А.....	60

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Аналіз числових результатів розв'язку інтегрального рівняння Гаммерштейна плоскої контактної задачі з урахуванням тертя і шорсткості, що деформується за експоненціальним законом, для малих коефіцієнтів шорсткості»: 63 с., 10 рис., 23 джерела.

ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНИЙ ЗАКОН ДЕФОРМУВАННЯ ШОРСТКОСТІ, ІНТЕГРАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ГАММЕРШТЕЙНА, МЕТОД РЕДУКЦІЇ, ПЛОСКА КОНТАКТНА ЗАДАЧА, ТЕРТЯ, ШОРСТКІСТЬ, ШТАМП З ПЛОСКОЮ ОСНОВОЮ.

Об'єкт дослідження – інтегральне рівняння Гаммерштейна.

Мета роботи: побудувати аналітичний розв'язок інтегрального рівняння Гаммерштейна, що характеризує плоску контактну задачу з урахуванням тертя і шорсткості, що деформується за експоненціальним законом, для малих коефіцієнтів шорсткості, проаналізувати числові результати щодо впливу на контактні характеристики параметрів шорсткості і тертя.

Метод дослідження – принцип стискаючих відображень, метод редукції.

Розглянуто плоску контактну задачу про вдавлювання штампа в пружну смугу з урахуванням тертя і шорсткості при експоненціальному законі деформування, для малих коефіцієнтів шорсткості. Щоб звести рівняння задачі до інтегрального рівняння Гаммерштейна введено допоміжну функцію і малий параметр Боголюбова-Крилова. Визначено умови існування єдиного розв'язку рівняння Гаммерштейна на множині його визначення. Ці умови задають обмеження на коефіцієнти шорсткості, що відповідають ознаці їх малості.

Для знаходження аналітичного розв'язку поставленої задачі, інтегральне рівняння зведено до нескінченної системи нелінійних алгебраїчних рівнянь. Для одержання наближеного розв'язку задачі для малих коефіцієнтів шорсткості обґрунтовано можливість застосування методу редукції. Проведено аналіз числових результатів щодо впливу шорсткості і тертя на контактні характеристики.

SUMMARY

Master's Qualification Thesis «The Analysis of Numerical Results of the Hammerstein Integral Equation of a Flat Contact Problem Taking into Account a Friction and a Roughness Deformed as on the Exponential Law, for Small Roughness Coefficients»: 63 pages, 10 figures, 23 references.

THE EXPONENTION LAW OF ROUGHNESS DEFORMATION, THE HAMMERSTEIN INTEGRAL EQUATION, A REDUCTION METHOD, A FLAT CONTACT PROBLEM, A FRICTION, A ROUGHNESS, A PUNCH.

The object of the study is the Hammerstein integral equation.

The aim of the study is to construct the analytical decision of the Hammerstein integral equation of a flat contact problem with a consideration of friction and roughness deformed by exponential law, for small roughness coefficients; analysis of the numerical results and influence of the friction and roughness on contact characteristics.

The method of research is contracting mappings theorem, a reduction method.

There is considered the plane contact problem about the indentation of a punch in the elastic strip, taking into account friction and roughness by the exponential deformation law, for small roughness coefficients. This equation is transformed to the Hammerstein integral equation in operator form by means of special replacement Bogolyubov-Krylov.

To find the analytic solution of the problem, the integral equation is reduced to an infinite system of nonlinear algebraic equations. The formula is obtained to calculate the punch deepening in an elastic strip. Next it is deduced the system of the nonlinear algebraic equations. To obtain an approximate solution of the problem for small roughness coefficients, it is proved that the reduction method can be used. There are analyzed the numerical results and the influence of the friction and roughness on the contact characteristics in this paper.

ВСТУП

У машинобудуванні та будівельній практиці часто спостерігається контактування різних деталей споруд, механізмів, машин тощо. Саме тому широкого розвитку набули контактні задачі. Такі задачі теорії пружності – задачі дослідження розподілу деформацій і напружень у системі твердих тіл, що мають спільні дотичні області (поверхні дотику).

Якщо розглядати контактні задачі з точки зору класичної постановки, то вони базуються на припущенні, що поверхня ідеально гладка, але на практиці таких тіл не існує. Трибологія [4, 7] – наука, що вивчає взаємодію твердих тіл при їх відносному русі, враховуючи тертя, зношування, змащування цих об'єктів. Спочатку, досягнення у цій сфері використовували при будіванні кораблів. Згодом, розвивались авіація, машинобудування, космонавтика, металообробна промисловість і усюди для побудови тих чи інших об'єктів необхідно було враховувати їх контактну взаємодію.

Для дослідження деформацій в елементах інженерних споруд є базовими розв'язання контактних задач теорії пружності механіки деформованого тіла. Методи, що розвинуті в теорії контактних задач, дозволяють знайти розподіл тиску в місцях контакту. Це дає можливість відповісти на питання концентрації напружень.

Контактна задача є однією з найбільш значущих і складних у математичному відношенні проблем теорії пружності. З нею часто доводиться стикатися при розрахунку різних об'єктів – деталей підшипників і підп'ятників, опорних частин мостів, зубів зубчастих коліс і т.д. Саме тому розв'язанням контактних задач вже досить тривалий час приділяється значна увага.

Вперше контактна просторова задача була досліджена Генріхом Герцом ще у XIX сторіччі. Надалі ці задачі розвивали його послідовники А.І. Лур'є [16], І.Я. Штаєрман [21], Л.А. Галін [5], І.Г. Горячева [7],

В.М. Александров [1], А.К. Приварников [19], О.Г. Гоман, С.Ф. Шишканова [6] та інші.

І.Я. Штаерман [21] був перший, хто врахував шорсткість шару в постановці контактних задач. Надалі цю проблему досліджували в своїх роботах Л.О. Галін [5], І.Г. Горячева [7] та ін.

Просторові контактні задачі з урахуванням тертя та шорсткості вивчалися також в роботах О.І. Александрова, О.В. Грабко [2], V. Pauk [23], Г.А. Шишканової [20] та Н.М. Д'яченко [9, 10, 11].

На даному етапі дуже багато вітчизняних та іноземних дослідників, які займаються комп'ютерним моделюванням шорсткості, а також створенням математичних моделей шорстких контактуючих поверхонь. Завдяки цим працям, отримано лінійну, степеневу та експоненціальну моделі деформування шорсткості, що виражають залежність змінання мікрориступів шорсткості від тиску. При незначних зовнішніх навантаженнях застосовуються перші два закони деформування, при великих – третій. Це пов'язано з тим, що зростання зовнішнього навантаження приводить до збільшення зміщень мікрориступів шорсткості. Мікрориступи шорсткості мають обмежену висоту, тому їх змінання обмежене зверху. Таку властивість щодо залежності змінань мікрориступів шорсткості від зовнішнього тиску має експоненціальний закон. Це явище не спостерігається для інших законів. Крім того для малих зовнішніх навантажень такі змінання для лінійної і експоненціальної залежності близькі. Останнє встановлює зв'язок між різними законами деформування шорсткості.

Інтегральне рівняння розподілу нормального тиску під смуговим плоским і неплоским штампами, що вдавлюється у пружний півпростір з шорсткою поверхнею при степеневому законі деформування шорсткості наведені в монографії І.Г. Горячової [7]. Там також містяться і певні числові розв'язки цієї задачі для деяких великих коефіцієнтів шорсткості при степеневому законі деформування шорсткості.

Спираючись на відоме інтегральне рівняння, а також на відомий експоненціальний закон деформування шорсткості з урахуванням тертя між штампом і пружною смугою, розглянуто інтегральне рівняння даної задачі.

У даній роботі розглядається і досліджується існування єдиного розв'язку інтегрального рівняння Гамерштейна, що характеризує контактну взаємодію задачі про вдавнення штампа з плоскою основою в пружний шар з шорсткою поверхнею з урахуванням тертя, якщо припускати, що мікрорівності шорсткості змінюються за експоненціальним законом і мають незначну висоту. Крім того, будується аналітичний розв'язок даної задачі, що подається степеневим рядом, коефіцієнти якого є розв'язками нескінченної системи нелінійних алгебраїчних рівнянь.

Для знаходження аналітичного розв'язку поставленої задачі у початкове інтегральне рівняння введено малий параметр Боголюбова-Крилова, за допомогою заміни зведено до інтегрального рівняння Гаммерштейна. А сам розв'язок (функція нормального тиску) представляється степеневим рядом та виводиться система нелінійних алгебраїчних рівнянь, до якої зводиться задача. Також виведено і записано формульний вираз для обчислення занурення штампа в пружний шар.

Для одержання наближеного розв'язку задачі доводиться можливість використання методу редукції за умов, за яких існує єдиний розв'язок рівняння Гаммерштейна. Проводиться аналіз числових результатів щодо впливу на контактні характеристики параметрів шорсткості і тертя. Поставлена задача була розв'язана вперше.

1 ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

1.1 Моделювання шорсткості поверхні

У цьому підрозділі відобразимо отримані І.В. Крагельським, М.Н. Добичіним [14] данні про моделювання шорсткості поверхонь.

Поверхня твердих тіл шорстка, і ця обставина істотно змінює характер їх контактної взаємодії. Шорсткість визначається як сукупність нерівностей, відстань між якими набагато менше базової довжини, на якій вивчаються властивості поверхні. Шорсткість утворює мікрорельєф поверхні, який, як правило, має складний статистичний характер. Мікрорельєф може наноситися штучно або вийти в результаті видів обробки поверхонь. В теперішній час широко використовуються поверхні з регулярним мікрорельєфом, параметри якого вибираються з розрахунку оптимальної роботи вузла тертя. Особливо це має місце в приладах для обробки і накопичення інформації.

Можна привести приклад, який ілюструє вплив шорсткості поверхні на контактні характеристики спряженій. Радіус площадки контакту сфери з шорсткою поверхнею як відомо і образку з гладкою поверхнею завжди більше того, який слідує з теорії Герца для ідеально гладких тіл. При цьому відмінність тим більша, чим менше навантаження і більша шорсткість поверхні сфери.

Так поверхні після токарної обробки мають регулярну структуру, пов'язану з глибиною різання і швидкістю подачі, однак висоти боріздох будуть змінюватися статично. Більшість оброблених поверхонь, наприклад після шліфовки, мають сформовану верству, яка в першому наближенні може моделюватися одновимірною шорсткістю.

Перша спроба врахувати шорсткість шару в постановці контактних задач була зроблена І.Я. Штаєрманом [21], котрий розглянув комбінований шар, при навантаженні якого разом з деформацією усього пружного тіла в цілому виникають додаткові локальні деформації, що зумовлені шорсткістю поверхні. При цьому допускалось, що локальні деформації пропорційні тиску в даній точці.

Експериментальні і теоретичні дослідження закономірностей деформування шорсткого шару показали, що локальні деформації підкоряються степеневому закону у вигляді $w = Bp^K$, де w – переміщення в напрямку дії тиску; B і K – параметри ($0 < K \leq 1$) [4, 5, 8]. Це стало можливим завдяки моделюванню системи однотипних за формою виступів, розподілених за висотою (дискретна модель шорсткості).

Моделювання шорсткості складається з двох етапів: перший – вибір конкретної форми виступу, другий – моделювання закону розподілу виступів за висотою.

Вибір конкретної форм виступу довільний. При цьому, дослідники керуються найрізноманітнішими міркуваннями. У роботі [14] наведено досить повний перелік форм виступів, який супроводжується аналізом їх переваг і недоліків.

Дослідження рельєфу поверхонь різними засобами дає уявлення про форми і розміри цих виступів. Вони не мають правильної геометричної форми. Необхідно для спрощення вибрати модель одиничного виступу з числа простих геометричних фігур: сферичних сегментів, циліндричних стержнів, еліпсоїдів, конусів та інших. З цих форм нерівностей сферичні, циліндричні та еліпсоїдні найбільш вірогідні.

Еліпсоїдна модель – найбільш реальна, особливо для тих поверхонь, технологія отримання яких пов'язана з використанням інструментів для обробки поверхонь. Однак використання цієї моделі пов'язано з труднощами. Моделювання виступів сферами найбільш зручне і достатньо задовольняє дослідників.

Модель шорсткості поверхні, що складається зі сферичних сегментів, розташованих на жорсткому шарі, припускає, що зближення двох тіл визначається лише деформаціями гладких тіл і шорсткого шару. Визначається, що близькі контакти мікронерівностей не впливають один на одного.

Після моделювання шорсткості зазначеними способами стало можливим дослідження різних характеристик контакту сферичних поверхонь з шорстким шаром: розмір одиничних плям контакту, їх кількість, розмір площадки контакту. У цих дослідженнях отримано такий результат: розмір площадки контакту пропорційний тиску в степені, що не більший за одиницю.

Моделювання закону розподілу виступів за висотою дослідниками було різним: від виродженого (виступи лежать на одному рівні, що є нереальним), лінійного і нормального.

І.В. Крагельський [14] у 1943 р. запропонував для аналізу закономірностей тертя стрижневу і сферичну моделі шорстких поверхонь. Моделі визначалися такими параметрами: щільністю нерівностей (кількість нерівностей на одиницю площини), величиною нормального відхилення вершин нерівностей. Зокрема, для сферичної моделі було введено радіус закруглення вершин нерівностей, який вважався постійним.

Найбільше розповсюдження отримала саме модель нерівностей у формі сферичних сегментів. Для опису жорсткостей поверхонь використовується теорія випадкових функцій і полів, яка надає більш повного уявлення про рельєф поверхонь.

Значний експериментальний матеріал, накопичений щодо фактичної площі контакту, дозволив виділити найбільш характерні особливості процесу формування фактичних площадок; ці особливості і утворюють модель шорсткої поверхні, яка зводиться до такого:

а) контакт шорстких поверхонь має дискретний характер;

б) елементарні контакти (фактичні плями контакту) виникають у результаті як пружних так і пластичних деформацій;

в) фактична площа контакту і діюче навантаження Q пов'язані співвідношенням [4, 5, 8]

$$A_r = \text{const}Q^n, \quad (1.1)$$

де $0 < n \leq 1$;

г) із ростом навантаження збільшується площа фактичного контакту за рахунок виникнення нових плям контакту, при цьому розмір плям залишається фактично постійним.

Усі контакти можна розбити на три групи: пружні, пластичні і проміжні – пружно пластичні. Оскільки закономірності для таких контактів будуть різними, важливо знати умови, за яких реалізується той або інший вид контакту. Зародження пластичних деформацій починається тоді, коли тиск досягає критичного значення. Випадок пластичного контакту має незрівнянно менше практичне значення, ніж пружний контакт. Це пов'язано з тим, що якщо навіть при першому навантаженні спостерігаються пластичні деформації, то при повторних навантаженнях силою, яка не перевищує первісний рівень, пластичний контакт вироджується в пружний. У роботі будуть розглядатися лише пружні контакти.

Розглянута дискретна модель базується на структурних уявленнях про шорсткий шар, елементом якого є мікронерівність, а взаємодія поверхонь при терті на плямах контакту являє собою контакт двох мікронерівностей.

У своєму первісному варіанті дискретна модель не враховує вплив мікроступів, тобто напружено-деформований стан матеріалу в області плями контакту повністю визначається навантаженням, що сприймається цим контактом. Ця гіпотеза забезпечує гарну відповідність між теорією і експериментом при малій щільності контакту. Однак, у тих випадках, коли

ця гіпотеза не виконується, це припущення призводить до помилкових результатів. Наочним прикладом обмеженості такої моделі є насичення площі контакту на полімерних матеріалах і гумах. Вони показали, що при великих відношеннях номінально тиску до модуля пружності полімеру приріст площі фактичного контакту із зростом навантажень тим менша, чим більша величина фактичної площі дотику.

Наведемо деякі формули залежності зближення шорстких поверхонь від тиску. Із класичної задачі контакту двох еліпсоїдів [17] відомо, що зближення тіл виражається формулою

$$w = n_{\delta} 0.5 \left(\frac{9}{4} I^2 K_{\Sigma} P^2 \right)^{1/3}, \quad (1.2)$$

де K_{Σ} – сума головних кривизн тіл, $I = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}$, n_{δ} – коефіцієнт, що залежить від навантаження контактуючих поверхонь і їх взаємного розташування. Для зближення параболоїдного штампа з пружним півпростором справедливо

$$w = 2 \left(\frac{3\pi P k^*}{8} \right)^{2/3}, \quad k^* = \frac{1 - \nu^2}{\pi E}. \quad (1.3)$$

Для зближення двох шорстких тіл була одержана формула

$$w = CP^m, \quad (1.4)$$

де $m = \frac{3}{5}$, C для сталених зразків дорівнює $\frac{4}{80}$, для чавунних – $\frac{10}{130}$.

І.В. Крагельський [14], моделюючи шорсткі поверхні набором стрижнів, що деформуються пружно, отримав, що зближення задовольняє формулі

$$w = \left(\frac{6q_c}{k\gamma_1\gamma_2} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (1.5)$$

де q_c – контурний тиск, $k = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2}$ – наведений коефіцієнт жорсткості,

$K_i = \frac{E_i}{2r(1-\nu^2)}$, r – радіус плями контакту, γ – тангенс гладкості, що дорівнює похідній зближення по площі дотику.

Також був приведений розрахунок пружного деформування в стику, моделюючи шорсткість поверхні набором мікростовпчиків прямокутної форми. Розподіл мікростовпчиків за висотою описувався многочленом другого степеня. він отримав такий вираз для зближення шорсткості поверхні з гладкою [4, 5].

$$w = 0,794 H_{\max} \sqrt[3]{\frac{P\theta}{A_a E}}, \quad (1.6)$$

де H_{\max} – максимальна висота нерівностей, A_a – номінальна площа, θ – коефіцієнт, що враховує вплив мікрогеометрії і понижену міцність поверхневих шарів.

І.В. Крагельський наводить дослідження щодо втілення і зім'яття системи циліндричних та сферичних штампів у пружний півпростір. У кожному випадку одержана степенева залежність втілення і зім'яття від тиску. Одна з формул, отримана ним, має вигляд

$$w = H_{\max} K_4 \left(\frac{r}{H_{\max}} \right)^{\frac{1}{2\nu^* + 1}} \left(\frac{P}{E} \right)^{\frac{2}{2\nu^* + 1}}, \quad (1.7)$$

$$K_4 = \left(\frac{0,75(1-\nu)^2 \pi}{K_2 \nu^* b} \right)^{\frac{2}{2\nu^* + 1}}.$$

Тут r – радіус сфери, що моделює мікроступ, H_{\max} – максимальна висота мікро виступу, ν^*, b, K_2 – коефіцієнти, що характеризують шорсткість поверхні [14].

Коефіцієнти шорсткості. Залежність зм'яття мікроступів від тиску може виражатися однією з таких залежностей [2, 4, 8]:

$$W' = B[p(\rho, \theta)]^K, \quad (1.8)$$

$$W'' = h \left(1 - \frac{\exp(-\beta p(\rho, \theta))}{E} \right), \quad (1.9)$$

де B, K, h, α – показники шорсткості, що відповідають степеневому та експоненціальному законам. Коефіцієнти шорсткості можуть бути знайдені експериментально, як середньостатистичні для такого типу поверхні, а також із формул. Наведемо деякі з цих формул

Для подальшого розгляду нам знадобиться лише залежність зближення від тиску у вигляді

$$w = B_1 P_1^K, \quad (1.10)$$

де $P_1 = \frac{1-\nu^2}{\pi E} P$. Згідно з формулою (1.7)

$$B_1 = H_{\max} K_4 \left(\frac{r}{H_{\max}} \right)^{\frac{1}{2v^*+1}} \left(\frac{\pi}{1-v^2} \right)^{\frac{2}{2v^*+1}}, \quad (1.11)$$

$$K = \frac{2}{2v^*+1}. \quad (1.12)$$

Наприклад, для алюмінієвих шліфованих поверхонь $B_1 = 10^{-6} \div 10^{-5}$, а $K = 2/7 \div 2/5$, для фрезерованих алюмінієвих поверхонь – $B_1 = 10^{-5} \div 10^{-4}$ і $K = 2/5$ відповідно; якщо поверхня необроблена, то перше значення може бути для алюмінію більшим за 0,03, а друге – від 0,4 до 1. Для сталевих поверхонь, що оброблені торцевим фрезуванням (6 клас шорсткості), значення $B_1 = 1,24 \cdot 10^{-4}$, $K = 0,456$.

Ще відзначимо, що у формулі Бартенєва–Лаврентьєва $A = 1 - \exp(-\beta p / E)$ коефіцієнт β може бути знайдений не лише з експерименту, а також із формули [14].

$$\beta = \left\{ \frac{\pi^{1/2}}{2^{1/2v^*} k_v} P \left(\frac{b^{1/v^*} r}{H_{\max}} \right) \frac{1-v^2}{E} \right\}^{\frac{2v^*}{2v^*+1}}.$$

Для шліфованих поверхонь пресформ (шорсткість 7–8 класу) $\beta = 1,8 \div 2,6$.

Відзначимо також, що формула (1.1) придатна лише при $P/E \approx 10^{-4} \div 10^{-2}$, для більших значень цієї величини потрібно користуватися формулою Бартенєва–Лаврентьєва.

1.2 Зв'язок законів деформування шорсткості

При моделюванні контактної взаємодії штампа з пружною шорсткою смугою складають інтегральне рівняння, першим доданком якого є переміщення точки за рахунок зім'яття мікровиступів, що відповідають степеневому закону деформування шорсткості

$$W_1^{(1)}(x) = B[p^{(1)}(x)]^\kappa,$$

або експоненціальному

$$W_1^{(2)}(x) = h(1 - \exp(-\beta p^{(2)}(x) / E)),$$

де B і κ ($\kappa \in (0;1]$), h і β - параметри шорсткості відповідних законів, E - модуль пружності. Другий доданок виражає пружні переміщення смуги. Права частина рівняння містить невідоме поглиблення штампа. Коефіцієнти шорсткості B і h характеризують якість обробки поверхні смуги.

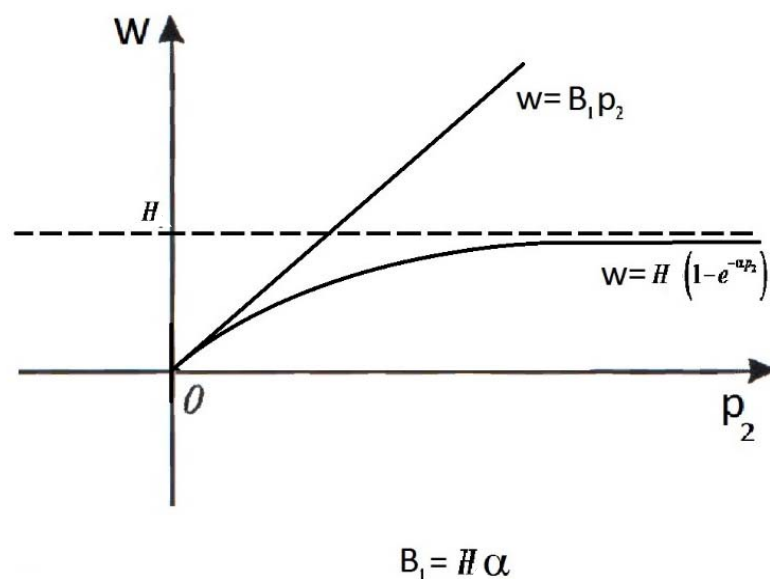


Рисунок 1.1 – Зв'язок законів деформування шорсткості

Зв'язок між степеневою і експоненціальною моделями. Зазначимо, що при невеликих тисках, коли $\beta p(\rho, \theta)/E$ – мале, зім'яття мікровиступів шорсткості близькі $W' \approx W''$ при $K = 1$, звідки

$$B = h\beta/E .$$

З експериментальних досліджень А.П. Соколовського, Г.М. Бартенєва, В.В. Лаврентьєва, І.В. Крагельського та інших випливає, що для великих навантажень близькою до реальності є модель, що описується експоненційною залежністю. Із збільшенням тиску зім'яття мікровиступів шорсткості у випадку експоненційного закону не збільшується необмежено, як у випадку степеневого закону, а наближається до фіксованого значення. Це більше відповідає реальності, оскільки максимальна висота мікровиступів шорсткості обмежена.

2 ПОСТАНОВКА ПЛОСКОЇ КОНТАКТНОЇ ЗАДАЧІ ТА ЇЇ ІНТЕГРАЛЬНЕ РІВНЯННЯ

Розглянемо задачу про напружений стан, який з'являється в шорсткій товстій смузї при вдавлюванні в неї з тертям штампа. Будемо припускати, що штамп знаходиться у стані граничної рівноваги під дією нормальної сили Q , котра вдавлює штамп шириною $2a$, і сили F , яка дорівнює добутку коефіцієнта тертя ρ на величину сили Q (рис. 2.1).

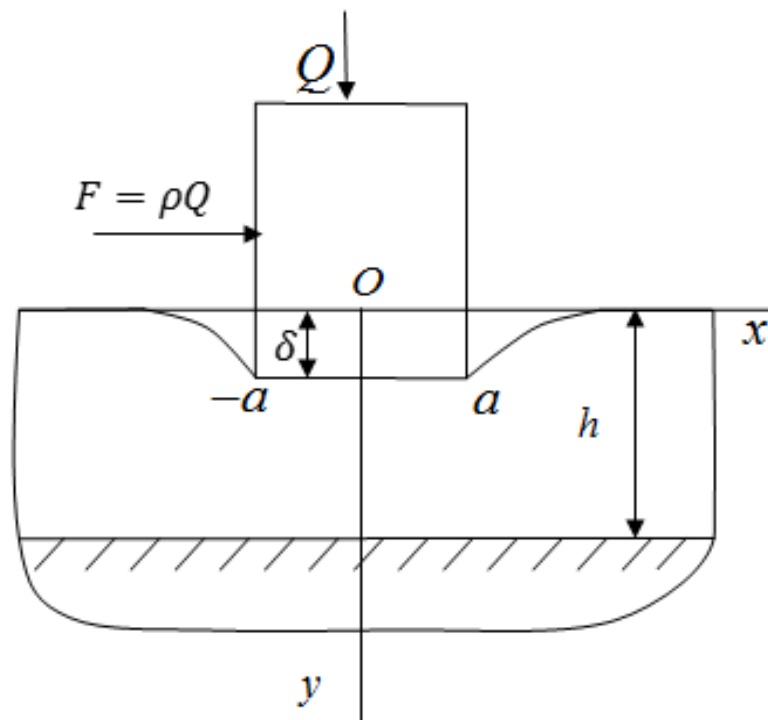


Рисунок 2.1 – Схема контакту штампа з пружним шаром

Будемо розглядати штамп з плоскою основою, який вдавлюється в пружну смугу $\{|x| < +\infty, 0 < y < h\}$ силою Q , що діє у напрямку осі Oy .

Далі будемо використовувати такі позначення: $\tau_{xy}(x)$ – функція дотичних напруг, які виникають у шарі, $u(x, h)$ – функція переміщень вздовж осі Ox ,

$v(x, h)$ – функція переміщень вздовж осі Oy , δ – заглиблення штампа при вдавненні, $\sigma_y(x)$ – функція нормальних напруг у шарі.

Дослідимо два випадки закріплення смуги [7]:

1. Смуга лежить на жорсткій основі без тертя:

$$\tau_{xy}(x, h) = 0, v(x, h) = 0, |x| < +\infty.$$

2. Смуга жорстко закріплена на основі

$$u(x, h) = v(x, h) = 0,$$

Граничні умови на поверхні $y = 0$ в обох випадках мають вигляд:

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(x, 0) = 0, \sigma_y(x, 0) = 0, a < |x| < +\infty, \\ \tau_{xy}(x, 0) + \rho\sigma_y(x, 0) = 0, v(x, 0) = \delta, |x| < a. \end{aligned}$$

Інтегральне рівняння поставленої контактної задачі про вдавлювання з тертям штампа з плоскою основою в товстий шорсткий шар, де δ – заглиблення штампа при вдавненні, E – модуль пружності, ν – коефіцієнт Пуасона має вигляд[5, 7]:

$$\begin{aligned} \delta = W(\sigma_y, x) - \\ - \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \left[\int_{-a}^a \sigma_y(x', 0) \cdot k\left(\frac{x-x'}{h}\right) dx' - \frac{1-2\nu}{2-2\nu} \pi \cdot \int_{-a}^x (-\tau_{xy}(x')) dx' \right], \quad (2.1) \end{aligned}$$

Будемо враховувати таке:

$$W(\sigma_y, x) = H \left[1 - e^{\frac{\beta}{E} \sigma_y(x, 0)} \right],$$

$$\sigma_y(x, 0) = -p(x),$$

$$\tau_{xy}(x, 0) = \rho p(x),$$

причому $p(x)$ – нормальний тиск, який діє на площадці контакту, ρ – коефіцієнт тертя, H, β – коефіцієнти шорсткості експоненціального закону.

Рівняння (2.1) набуде вигляду:

$$\delta = H \left[1 - e^{-\frac{\beta}{E} p(x)} \right] -$$

$$-\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \left[\int_{-a}^a -p(x') \cdot k\left(\frac{x-x'}{h}\right) dx' - \frac{1-2\nu}{2-2\nu} \pi \cdot \int_{-a}^x (-\rho p(x')) dx' \right]. \quad (2.2)$$

Проведемо певні перетворення з інтегральним рівнянням (2.2) з метою зведення його складових до безрозмірних. В результаті чого одержимо:

$$\delta = H \left[1 - e^{-\alpha \cdot C_1 p(x)} \right] + C_1 \int_{-a}^a p(x') \cdot k\left(\frac{x-x'}{h}\right) dx' - C_1 C_2 \int_{-a}^x \rho p(x') dx'. \quad (2.3)$$

Якщо має місце контактна взаємодія штампа з пружною смугою, то ядро інтегрального рівняння (2.3) має вигляд [7]:

$$k(t) = -\ln|t| + a_0,$$

де при $\nu = 0,3$ для задачі 1 коефіцієнт a_0 дорівнює $-0,352$ і для задачі 2 – $a_0 = -0,527$. Дане асимптотичне представлення ядра має місце для достатньо товстих смуг для яких $\lambda = \frac{a}{h} \leq \frac{1}{2}$.

Функцію $p_1(x)$ задаємо у вигляді:

$$C_1 p(x) = p_1(x).$$

Одержимо наступне рівняння:

$$\delta = H \left[1 - e^{-\alpha \cdot p_1(x)} \right] + \int_{-a}^a p_1(x') \cdot \left[-\ln \left| \frac{x-x'}{h} \right| + a_0 \right] dx' - C_2 \rho \int_{-a}^x p_1(x') dx'.$$

Введемо заміну та перейдемо до нових меж інтегрування $t = \frac{x}{a}$, $t' = \frac{x'}{a}$, $x' = t'a$, $dx' = a dt'$. Тоді t' буде змінюватись на $[-1, 1]$.

$$\delta = H \left[1 - e^{-\alpha \cdot p_1(ta)} \right] + \int_{-1}^1 a \cdot p(t'a) \cdot \left[-\ln \left| \frac{a(t-t')}{h} \right| + a_0 \right] dt' - C_2 \rho a \int_{-1}^1 p_1(t'a) dt'. \quad (2.4)$$

Позначимо $p_1(ta) = p_2(t)$ та поділимо обидві частини рівняння (2.4) на a . Тоді отримаємо інтегральне рівняння в безрозмірних величинах:

$$\delta_1 = H_2 \left[1 - e^{-\alpha \cdot p_2(t)} \right] + \int_{-1}^1 p_2(t') \cdot \left[-\ln |t-t'| - C_0 \right] dt' - C_2 \rho \int_{-1}^t p_2(t') dt', \quad (2.5)$$

де $H_2 = \frac{H}{a}$, $\delta_1 = \frac{\delta}{a}$, $C_0 = \ln \frac{a}{h} - a_0$.

Розглянемо оператор L , заданий на просторі $C_{[-1,1]}$ неперервних на $[-1,1]$ функцій, що має вигляд

$$[Lp_2](t) = \int_{-1}^1 p_2(t') \cdot [\ln|t-t'| + C_0] dt' - C_2 \rho \int_{-1}^t p_2(t') dt'. \quad (2.6)$$

Запишемо інтегральне рівняння (2.5) в операторному вигляді:

$$\delta_1 = H_2 \left[1 - e^{-\alpha \cdot p_2(t)} \right] - [Lp_2](t). \quad (2.7)$$

Рівняння (2.7) є операторним рівнянням Фредгольма другого роду.

Поставлена задача вимагає знаходження безрозмірної функції нормального тиску $p_2(t)$ і безрозмірного заглиблення штампа δ_1 . Тому потрібно додати друге рівняння, яке називається умовою рівноваги.

Розглянемо рівняння рівноваги

$$Q = \int_{-a}^a p(x') dx'. \quad (2.8)$$

Помножимо обидві частини (2.8) на $\frac{C_1}{a}$:

$$\frac{QC_1}{a} = \frac{C_1}{a} \int_{-a}^a p(x') dx'. \quad (2.9)$$

Введемо позначення $Q_2 = \frac{QC_1}{a}$, а під знаком інтеграла зробимо заміну $t' = \frac{x'}{a}$,

тоді рівність (2.9) набуде вигляду

$$Q_2 = C_1 \int_{-1}^1 p_2(t') dt'. \quad (2.10)$$

Уведемо таку константу \tilde{C} , що $\|L\| \leq \tilde{C}$. Помножимо (2.7) на $\frac{1}{\tilde{C}}$, тоді отримаємо

$$\frac{\delta_1}{\tilde{C}} = \frac{H_2 \left[1 - e^{-\alpha \cdot p_2(t)} \right]}{\tilde{C}} - \frac{[Lp_2](t)}{\tilde{C}}.$$

Введемо малий параметр $\mu = 1 - \frac{H_2}{\tilde{C}}$ Боголюбова-Крилова. Отримаємо

$$\frac{\delta_1}{\tilde{C}} = \left[1 - e^{-\alpha \cdot p_2(t)} \right] - \mu \left[1 - e^{-\alpha \cdot p_2(t)} \right] - \frac{[Lp_2](t)}{\tilde{C}}.$$

Позначимо $(Ap_2)(t) = \frac{[Lp_2](t)}{\tilde{C}}$, тоді

$$\frac{\delta_1}{\tilde{C}} = \left[1 - e^{-\alpha \cdot p_2(t)} \right] - \mu \left[1 - e^{-\alpha \cdot p_2(t)} \right] - (Ap_2)(t). \quad (2.11)$$

Введемо заміну, аналогічну запропонованій в роботі [7]:

$$\psi(t) = \frac{\delta_1}{\tilde{C}} - \left[1 - e^{-\alpha \cdot p_2(t)} \right], \quad (2.12)$$

тоді $p_2(t) = -\frac{1}{\alpha} \ln \left[\psi(t) - \frac{\delta_1}{\tilde{C}} + 1 \right]$, а рівняння (2.11) переписеться у вигляді:

$$\psi(t) = \mu \left[\psi(t) - \frac{\delta_1}{\tilde{C}} \right] + \frac{1}{\alpha} A \left(\ln \left[\psi(t) - \frac{\delta_1}{\tilde{C}} + 1 \right] \right).$$

Позначимо

$$(G\psi)(t) = \mu \left[\psi(t) - \frac{\delta_1}{\tilde{C}} \right] + \frac{1}{\alpha} A \left(\ln \left[\psi(t) - \frac{\delta_1}{\tilde{C}} + 1 \right] \right),$$

таким чином отримаємо рівняння вигляду

$$(G\psi)(t) = \psi(t). \tag{2.13}$$

Це рівняння є рівнянням Гаммерштейна

З ЗВЕДЕННЯ ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДО НЕСКІНЧЕНОЇ СИСТЕМИ НЕЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ІСНУВАННЯ ЄДИНОГО РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯННЯ ГАММЕРШТЕЙНА

3.1 Зведення інтегрального рівняння Гаммерштейна до нескінченної системи нелінійних алгебраїчних рівнянь

Відомо, що інтегральне рівняння при лінійному законі деформування шорсткості з урахуванням тертя між штампом і пружною смугою має розв'язок у вигляді степеневого ряду зі степенями t . Звідки приходимо до висновку про той же вигляд розв'язку при експоненціальному законі деформування шорсткості. Тому представимо невідому функцію $\psi(t)$ в даному випадку експоненціального закону деформування шорсткості у вигляді:

$$\psi(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i t^i, \quad (3.1)$$

тоді в (2.9) підставимо (3.1):

$$\begin{aligned} p_2(t) &= -\frac{1}{\alpha} \ln \left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i t^i - \frac{\delta_1}{\tilde{C}} \right] = \\ &= -\frac{1}{\alpha} \ln \left[1 + \gamma_0 - \frac{\delta_1}{\tilde{C}} + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + \gamma_3 t^3 + \dots \right]. \end{aligned}$$

Позначимо через ξ_0 вираз $1 + \gamma_0 - \frac{\delta_1}{\tilde{C}}$, а через $\xi_i = \frac{\gamma_i}{\xi_0}$,

$\forall i = 1, 2, 3, 4, \dots$ отримаємо:

$$p_2(t) = -\frac{1}{\alpha} \cdot \ln \left[\xi_0 \left(1 + \frac{\gamma_1}{\xi_0} t + \frac{\gamma_2}{\xi_0} t^2 + \frac{\gamma_3}{\xi_0} t^3 + \dots \right) \right], \quad (3.2)$$

$$p_2(t) = -\frac{1}{\alpha} \cdot \left[\ln \xi_0 + \ln \left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i t^i \right] \right].$$

Використовуючи відомий розклад $\ln(1+y)$ і групуючи коефіцієнти при однакових степенях t отримуємо:

$$p_2(t) = -\frac{1}{\alpha} \left[\ln \xi_0 + t \xi_1 + t^2 \left(\xi_2 - \frac{1}{2} \xi_1^2 \right) + t^3 \left(\xi_3 - \xi_1 \xi_2 + \frac{1}{3} \xi_1^3 \right) + \right. \\ \left. + t^4 \left(\xi_4 - \xi_1 \xi_3 - \frac{1}{2} \xi_2^2 + \xi_1^2 \xi_2 - \frac{1}{4} \xi_1^4 \right) + \dots \right].$$

Уведемо такі позначення щодо коефіцієнтів при змінній t :

$$\sigma_0 = \ln \xi_0, \quad \sigma_1 = \xi_1, \quad \sigma_2 = \xi_2 - \frac{1}{2} \xi_1^2, \quad \sigma_3 = \xi_3 - \xi_1 \xi_2 + \frac{1}{3} \xi_1^3, \quad \dots$$

Узагальнюючи їх індуктивно, отримаємо:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, i < j; \\ \xi_j^i, j = 1; \\ \xi_j, i = j; \\ \sum_{k=1}^{i-1} a_{i-k, j-k+1} \cdot \xi_k, i \neq j \neq 1; \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^i a_{ij} \cdot \frac{(-1)^{i-j}}{i-j+1}, \quad (j \in N).$$

Таким чином, здобуваємо наступний вигляд функції тиску:

$$p_2(t) = -\frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k t^k. \quad (3.4)$$

Тоді ліва частина рівняння (2.13) з врахуванням (3.4) набуває вигляду:

$$(G\Psi)(t) = \mu \left(\Psi(t) - \frac{\delta_1}{\tilde{C}} \right) + \frac{1}{\alpha} \cdot A \ln \left[1 + \Psi(t) - \frac{\delta_1}{\tilde{C}} \right] = \mu \left(\sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i t^i - \frac{\delta_1}{\tilde{C}} \right) + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k \sum_{i=0}^{\infty} \beta_{k,i} t^i.$$

Застосовуючи вираз $Ly^N = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_{N,i} y^i$ для розвинення оператора в ряд, рівняння (2.13) перепишемо у вигляді:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i t^i = \mu \left(\sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i t^i - \frac{\delta_1}{\tilde{C}} \right) + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k \sum_{i=0}^{\infty} \beta_{k,i} t^i. \quad (3.5)$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях t в (3.5), здобудемо нескінчену систему нелінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} \gamma_0 = \mu \gamma_0 - \mu \frac{\delta_1}{\tilde{C}} + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k \beta_{k,0}, \\ \gamma_i = \mu \gamma_i + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k \beta_{k,i}, \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3, \dots). \quad (3.6)$$

Будемо шукати заглиблення штампа за допомогою умови рівноваги

$$Q_2 = \int_{-1}^1 p_2(t') dt'. \text{ Підставимо в це рівняння раніше знайдене } p_2(t) = -\frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k t^k,$$

отримаємо:

$$Q_2 = -\frac{1}{\alpha} \int_{-1}^1 \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k (t')^k dt' = \begin{cases} 0, k = 2p - 1 \\ -\frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k \frac{2}{2k+1}, k = 2p, p \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (3.7)$$

Оскільки

$$\sigma_0 = \ln \xi_0 = \ln \left(\gamma_0 + 1 - \frac{\delta_1}{\tilde{C}} \right),$$

то

$$Q_2 = -\frac{2}{\alpha} \left\{ \ln \left(\gamma_0 + 1 - \frac{\delta_1}{\tilde{C}} \right) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sigma_i}{2i+1} \right\}. \quad (3.8)$$

Звідки, виразивши δ_1 , отримаємо формулу для знаходження заглиблення:

$$\delta_1 = \tilde{C} \left(\gamma_0 + 1 - \exp \left(-\frac{\alpha Q_2}{2} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sigma_i}{2i+1} \right) \right). \quad (3.9)$$

Таким чином, розв'язком даної задачі є такі контактні характеристики: функція нормального тиску і заглиблення штампа. Функцію нормального тиску можна подати степеневим рядом (3.5), коефіцієнти якого можна знайти із нескінченної системи нелінійних алгебраїчних рівнянь (3.6). А невідоме заглиблення обчислити за формулою (3.9).

3.2 Властивості лінійного оператора, через який виражається нелінійний оператор даної задачі

У цей підрозділ випишемо для зручності результати з роботи [9].

Розглянемо оператор

$$[Lp_2](y) = \int_{-1}^1 [\ln|x-y| + C_0] p_2(x) dx - C_1 \int_{-1}^y p_2(x) dx,$$

де $p_2 \in C_{[-1,1]}$. Доведемо, що цей оператор переводить простір $C_{[-1,1]}$ в простір $C_{[-1,1]}$, тобто покажемо, що при дії оператора A образом неперервної на відрізку $[-1,1]$ функції $p_2(t)$ буде неперервна функція

$$g(t) = [Lp_2](t) = \int_{-1}^1 p_2(t') \cdot [\ln|t-t'| + C_0] dt' - C_2 \rho \int_{-1}^t p_2(t') dt'. \quad (3.10)$$

Розглянемо границю модуля приросту функції $g(t)$ при $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta t \rightarrow 0} |g(t_0 + \Delta t) - g(t_0)| \leq \\ & \leq \|f\| \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\lim_{\varepsilon_1 \rightarrow +0} \int_{-1}^{t_0 - \varepsilon_1} \left| \ln \left| 1 + \frac{\Delta t}{t_0 - t'} \right| \right| dt' + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} \int_{t_0 + \varepsilon_2}^1 \left| \ln \left| 1 + \frac{\Delta t}{t_0 - t'} \right| \right| dt' \right). \end{aligned}$$

На рисунку 3.1 зображено, як для обчислення останніх двох границь застосовано систему комп'ютерної алгебри Maple 14.

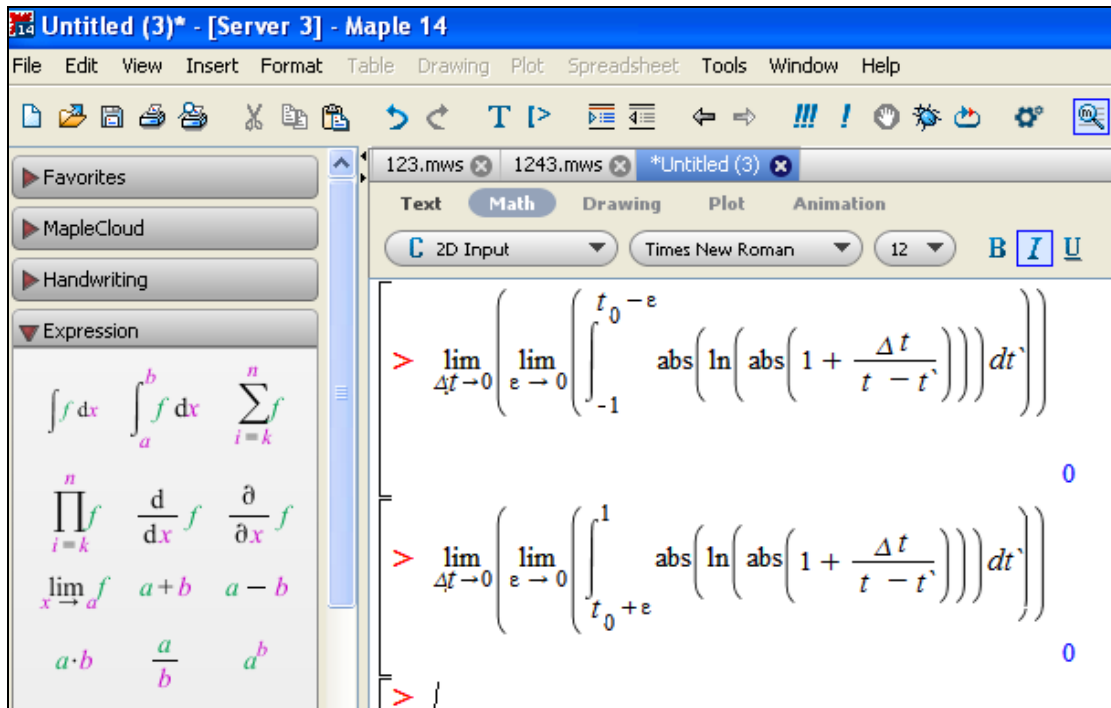


Рисунок 3.1 – Обчислення границі приросту функції $g(t)$

Отже, в будь-якій точці $t_0 \in [-1, 1]$ функція $g(t)$ виду (3.10) неперервна, що й треба було довести.

Щоб отримати оцінку норми оператора $[Af](t)$, проведемо спочатку наступні оцінювання у просторі $C_{[-1, 1]}$:

$$\begin{aligned} \|Lp_2\| &= \max_{t \in [-1; 1]} \left| \int_{-1}^1 [\ln|t' - t| + C_0] p_2(t) dt' - \rho C_2 \int_{-1}^t p_2(t) dt' \right| \leq \\ &\leq \|p_2\| \cdot \max_{t \in [-1; 1]} \left(\int_{-1}^1 |\ln|t' - t| + C_0| dt' + \rho C_2(t+1) \right). \end{aligned}$$

Позначимо $\tilde{C} = \max_{t \in [-1; 1]} \left(\int_{-1}^1 |\ln|t' - t| + C_0| dt' + \rho C_2(t+1) \right)$, тоді із означення

норми лінійного оператора матимемо: $\|L\| \leq \tilde{C}$.

Оцінімо значення величини \tilde{C} . Із фізичного змісту оператора випливає, що $C_2 = \frac{1-2\nu}{2-2\nu}\pi$. Будемо обирати $\nu = 0,3$. Проведемо грубе оцінювання значення величини \tilde{C} :

$$\tilde{C} = \max_{t \in [-1;1]} \left(\int_{-1}^1 |\ln|t' - t| + C_0| dt' + \rho C_2(t+1) \right) \leq \max_{t \in [-1;1]} \int_{-1}^1 |\ln|t' - t| + C_0| dt' + 2\rho C_2.$$

Побудуємо графік функції $f(t) = \int_{-1}^1 |\ln|t' - t| + C_0| dt'$ при $C_0 = -3$ за

допомогою системи Maple 14. Його зображено на рисунку 3.2. Звідки отримаємо, що $\max_{t \in [-1;1]} f(t) = 8$.

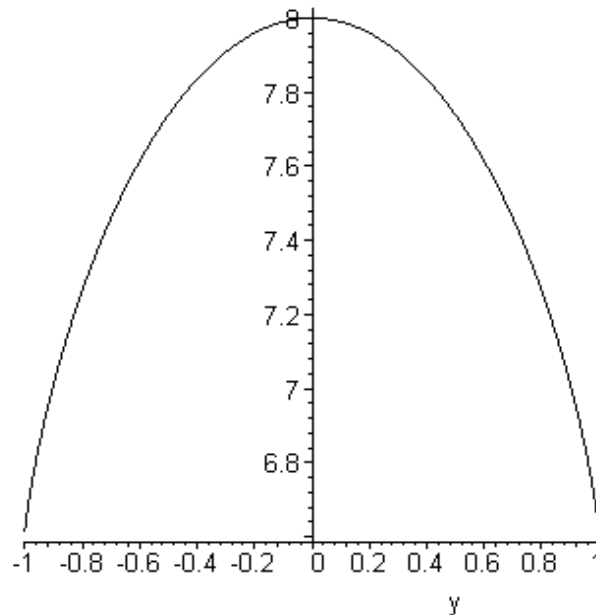


Рисунок 3.2 – Графік функції $f(t) = \int_{-1}^1 |\ln|t' - t| + C_0| dt'$

Отже, $\tilde{C} \leq 8 + 2\rho C_2$. Якщо коефіцієнт ρ набуває значень від 0 до 1, то $C_2 \leq \frac{\pi}{2}$, тому $\tilde{C} < 12$. Саме тому, з попередніх міркувань, випливає, що оператор $\frac{1}{\tilde{C}}(Lf)$ є стискаючим.

У роботі [9] отримано загальний вигляд розкладу образу степеневі функції при дії оператора L :

$$Ly^N = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_{N,i} y^i, \quad (3.11)$$

при $N = 2j, j = 1, 2, 3, \dots$

$$\alpha_{2j,2k} = -\frac{2}{2k(2j+1-2k)} \quad (k = 1, 2, 3, \dots);$$

$$\alpha_{2j,0} = -\frac{2}{(2j+1)^2} + \frac{2C_0}{2j+1} - \frac{C_1}{2j+1};$$

$$\alpha_{2j,2j+1} = -\frac{C_1}{2j+1};$$

$$\alpha_{2j,2k+1} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, k \neq j);$$

при $N = 0$

$$\alpha_{0,1} = -C_1;$$

$$\alpha_{0,2k+1} = 0;$$

$$\alpha_{0,2k} = -\frac{2}{2k(1-2k)} \quad (k = 1, 2, 3, \dots);$$

при $N = 2j - 1 \quad j = 1, 2, 3, \dots$

$$\alpha_{2j-1,2k-1} = -\frac{2}{(2k-1)(2j-2k+1)} \quad (k=1,2,3,\dots);$$

$$\alpha_{2j-1,2k} = 0 \quad (k=1,2,3,\dots, k \neq j);$$

$$\alpha_{2j-1,2j} = -\frac{C_1}{2j};$$

$$\alpha_{2j-1,0} = -\frac{C_1}{2j}.$$

3.3 Область визначення оператора G

Розглянемо множину

$$X = \{\psi(t') \in C_{[-1,1]} : \psi(t') \geq 0\}. \quad (3.12)$$

Вираз, що стоїть під знаком логарифму,, дозволяє оцінку

$$\psi(t) - \frac{\delta_1}{\tilde{C}} + 1 \geq 0 - \frac{\delta_1}{\tilde{C}} + 1.$$

Із фізичного змісту δ_1 випливає, що $\delta_1 \ll \tilde{C}$, тому $-\frac{\delta_1}{\tilde{C}} + 1 > 0$. Отже,

$\psi(t) - \frac{\delta_1}{\tilde{C}} + 1 > 0$. На такій множині логарифмічна функція визначена. Таким

чином областю визначення оператора G є множина X .

3.4 Дослідження на неперервність образу неперервної на відрізку $[-1,1]$ функції при дії оператора G

Для дослідження питання про існування та єдиність розв'язку рівняння (2.13) будемо застосовувати принцип стискаючих відображень [12, 15]. Покажемо спочатку, що оператор G діє з простору $C_{[-1,1]}$ в простір $C_{[-1,1]}$.

Розглянемо оператор:

$$G(\psi)(t) = \mu \left[\psi(t) - \frac{\delta_1}{\tilde{C}} \right] + \frac{1}{\alpha} A \left(\ln \left[\psi(t) - \frac{\delta_1}{\tilde{C}} + 1 \right] \right),$$

де $\psi(t)$ – функція неперервна на відрізку $[-1,1]$.

Розглянемо функцію $u = f_1(t) = \psi(t) - \frac{\delta_1}{\tilde{C}} + 1$. Вона є неперервна на $[-1,1]$ як сума неперервних функцій. Функція $h(u) = \ln u$ є також неперервною при $u > 0$. Як зазначалось вище, на множині X підлогарифмічний вираз є додатнім. Як композиція неперервних функцій, функція $f_2(t) = h(f_1(t))$ є неперервна на відрізку $[-1,1]$. Функція $g_1(t) = \frac{1}{\alpha} (Af_2)(t) = \frac{1}{\alpha} A \left(\ln \left[\psi(t) - \frac{\delta_1}{\tilde{C}} + 1 \right] \right)$ є неперервною на $[-1,1]$, як образ неперервної функції $f_2(t)$ на $[-1,1]$ при дії оператора A . Розглядаючи наступну функцію $g_2(t) = \mu \left[\psi(t) - \frac{\delta_1}{\tilde{C}} \right]$. Вона неперервна на $[-1,1]$ як лінійна комбінація неперервних функцій на $[-1,1]$. Оскільки $g(t) = G(\psi)(t) = g_1(t) + g_2(t)$, то функція $g(t)$ є неперервною на $[-1,1]$ як сума неперервних функцій.

Таким чином, ми показали, що образом неперервної на відрізку $[-1,1]$ функції при дії оператора G буде неперервна на цьому відрізку функція.

3.5 Перевірка умови стискання оператора G

Враховуючи (3.12), до функції

$$\varphi(z) = \ln \left[1 + z - \frac{\delta_1}{\tilde{C}} \right] \quad (3.13)$$

на множині $X^* = [0, +\infty)$ застосуємо формулу Лагранжа. Маємо: для будь-яких z_1 і z_2 із X^* знайдеться таке z , що лежить поміж z_1 і z_2 , для якого справедливе співвідношення:

$$\varphi(z_1) - \varphi(z_2) = \left[1 + z - \frac{\delta_1}{\tilde{C}} \right]^{-1} (z_1 - z_2). \quad (3.14)$$

Покладемо

$$\omega(\psi) = \left[1 + \psi - \frac{\delta_1}{\tilde{C}} \right]^{-1}. \quad (3.15)$$

Розглянемо норму різниці

$$\|G\psi_1 - G\psi_2\| = \max_{t \in [-1, 1]} \left| \mu(\psi_1 - \psi_2)(t) + \frac{1}{\alpha} \left[A \{ \omega(\psi) \cdot (\psi_1 - \psi_2) \} \right](t) \right|.$$

Нехай максимум досягається в деякій точці $t_0 \in [-1, 1]$, тобто

$$\|G\psi_1 - G\psi_2\| = \left| \mu(\psi_1 - \psi_2)(t_0) + \frac{1}{\alpha} A \{ \omega(\psi)(\psi_1 - \psi_2)(t_0) \} \right|.$$

Розглянемо два випадки:

а) Вираз під модулем невід'ємний. Без обмеження загальності міркувань можна вважати, що $(\psi_1 - \psi_2)(t_0) \geq 0$. Із означення функції $\omega(\psi)$ випливає, що $\omega(\psi)(t_0) \geq 0$, тоді $\omega(\psi)(\psi_1 - \psi_2)(t_0) \geq 0$. З наведених оцінок робимо висновок, що

$$A\{\omega(\psi)(\psi_1 - \psi_2)(t_0)\} \leq 0,$$

тому отримаємо:

$$\|G\psi_1 - G\psi_2\| \leq \mu(\psi_1 - \psi_2)(t_0) \leq \mu \max_{t \in [-1;1]} |\psi_1(t) - \psi_2(t)| = \mu \|\psi_1 - \psi_2\|;$$

б) вираз під модулем недодатній, тобто

$$\mu(\psi_1 - \psi_2)(t_0) \leq -\frac{1}{\alpha} A\{\omega(\psi)(\psi_1 - \psi_2)(t_0)\},$$

тоді знайдеться таке число $q \in (0,1)$, для якого $\exists q \in (0,1)$

$$\mu(\psi_1 - \psi_2)(t_0) = -q \cdot \frac{1}{\alpha} A\{\omega(\psi)(\psi_1 - \psi_2)(t_0)\}.$$

Оскільки $\psi(t) \in X$, то $\psi(t) \geq 0$ для будь якого $t \in [-1;1]$, тому, в наслідок (3.15),

$$\omega(\psi) = \left[1 + \psi(t) - \frac{\delta_1}{\tilde{C}} \right]^{-1} = \frac{1}{\psi(t) + 1 - \frac{\delta_1}{\tilde{C}}} < \frac{1}{1 - \frac{\delta_1}{\tilde{C}}} = \frac{\tilde{C}}{\tilde{C} - \delta_1}.$$

Враховуючі вищезазначені рівності і нерівності, оцінимо норму різниці на множині X :

$$\begin{aligned}
\|G\psi_1 - G\psi_2\| &= -\frac{1}{\alpha} A\{\omega(\psi)(\psi_1 - \psi_2)(t_0)\} - \mu(\psi_1 - \psi_2)(t_0) = \\
&= -\frac{1}{\alpha} A\{\omega(\psi)(\psi_1 - \psi_2)(t_0)\} + q \cdot \frac{1}{\alpha} A\{\omega(\psi)(\psi_1 - \psi_2)(t_0)\} = \\
&= \frac{1}{\alpha} (1-q) (-A\{\omega(\psi)(\psi_1 - \psi_2)(t_0)\}) \leq \frac{1}{\alpha} \cdot (1-q) \cdot \frac{\tilde{C}}{\tilde{C} - \delta_1} \times \\
&\quad \times \|\psi_1 - \psi_2\| < \frac{\tilde{C}}{(\tilde{C} - \delta_1)\alpha} \cdot \|\psi_1 - \psi_2\|.
\end{aligned}$$

Таким чином, справедлива одна із двох оцінок відповідно до зазначених випадків:

$$\text{а) } \|G\psi_1 - G\psi_2\| \leq \mu \|\psi_1 - \psi_2\|;$$

$$\text{б) } \|G\psi_1 - G\psi_2\| \leq \frac{\tilde{C}}{(\tilde{C} - \delta_1)\alpha} \|\psi_1 - \psi_2\|.$$

Звідси отримаємо оцінку норми $\|G\psi_1 - G\psi_2\|$:

$$\|G\psi_1 - G\psi_2\| \leq \max_{t \in [0;1]} \left\{ \mu, \frac{\tilde{C}}{(\tilde{C} - \delta_1)\alpha} \right\} \|\psi_1 - \psi_2\|. \quad (3.16)$$

Позначимо через q^* вираз:

$$q^* = \max_{t \in [0;1]} \left\{ \mu, \frac{\tilde{C}}{(\tilde{C} - \delta_1)\alpha} \right\}.$$

Для того, щоб оператор G був стискаючим, необхідно і достатньо, щоб $q^* < 1$. Звідси отримаємо:

$$0 < H_2 < \tilde{C},$$

$$\frac{\tilde{C}}{(\tilde{C} - \delta_1)\alpha} < 1. \quad (3.17)$$

Для коефіцієнтів H_2 , що задовольняють співвідношенням (3.17), відображення G є стискаючим.

Таким чином, у підсумку цього параграфу, зазначимо, що оператор G діє з простору $C_{[-1,1]}$ в простір $C_{[-1,1]}$, оператор G є стискаючим за умов (3.17), $C_{[-1,1]}$ – банаховий простір.

Тоді, згідно з принципом стискаючих відображень, оператор G має єдину нерухому точку. Тобто існує єдина функція $\tilde{\psi} \in X$ така, що $G\tilde{\psi} = \tilde{\psi}$.

4 АНАЛІЗ ЧИСЛОВИХ РЕЗУЛЬТАТІВ ЗАДАЧІ

Усі розрахунки були проведені за допомогою пакету комп'ютерної алгебри Maple. В додатку А наведено фрагмент цієї програми.

Для наближених обчислень будемо обирати $C_0 = -3$, саме таке, як у монографії [7]. Щоб знайти значення N , розрахунки проведено при $N = 10, 20, 30, 40$. Для $N = 30, 40$ контактні характеристики відрізнялися на третьому значущому знаці. Отже щоб дотриматися відносної похибки до 1%, обрано значення $N = 30$.

У контактній задачі з урахуванням тертя, функція тиску штампа на пружну гладку смугу дорівнює функції тиску на пружну гладку півплощину, аналітичне задання яких наведено в роботі Л.А. Галіна [5]:

$$p_2^*(x) = \frac{Q_2 \cdot \sin(\pi \cdot \theta)}{\pi \cdot \sqrt{1-x^2}} \cdot \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{0.5-\theta}, \quad \theta = \frac{1}{\pi} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2-2\nu}{\rho(1-2\nu)}. \quad (4.*)$$

Щоб визначити заглиблення штампа у пружну гладку смугу δ_1^* , необхідно у рівняння (2.5) покласти $H_2 = 0$, $t = 1$, а функцію $p_2^*(t)$ задати попередньою формулою:

$$\delta_1^* = - \int_{-1}^1 p_2^*(t') [\ln|t'-t| + C_0] dt' + C_2 \rho \int_{-1}^1 p_2^*(t') dt'. \quad (4.1)$$

Інтеграли в формулі (4.1) обчислюється чисельно засобами Maple для кожного значення вхідних параметрів (коефіцієнту тертя ρ , коефіцієнту Пуасона ν , притискаючої сили Q_2).

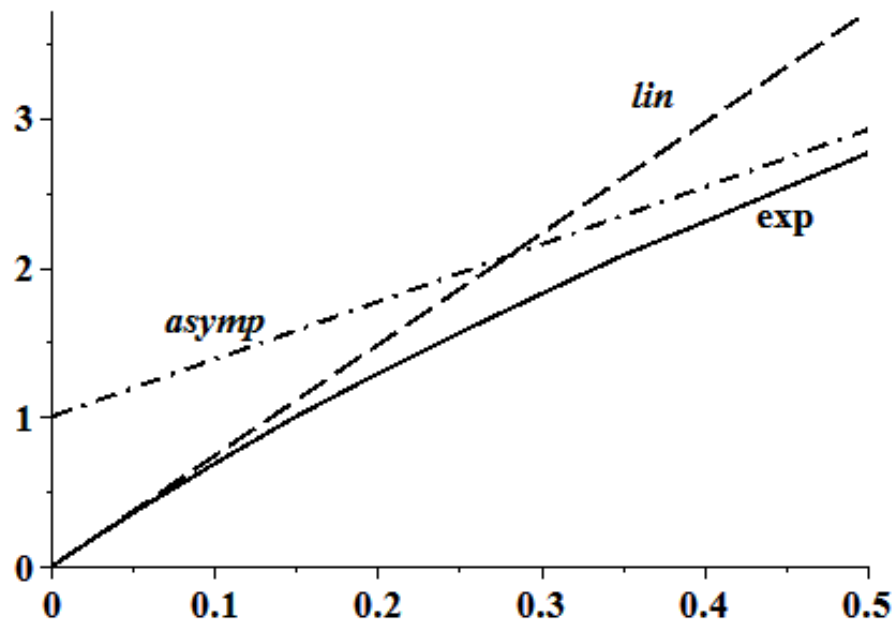


Рисунок 4.1 – Залежності заглиблення штампа з плоскою основою у пружну смугу з шорсткістю від сили Q_2

На рисунку 4.1 наведені графіки залежності заглиблення штампа з плоскою основою за урахування тертя у пружну смугу з шорсткістю від сили Q_2 при різних законах деформування шорсткості. Коефіцієнт тертя обраний $\rho = 0,3$. Заглиблення обчислені для експоненціального закону при фіксованих $H_2 = 1$, $\alpha = 7$, а для степеневого закону – при $\kappa = 1$ і $V_1 = \alpha H_1 = 7$ (те ж саме, що і для лінійного закону).

При малих p_2 , значення переміщення, що відповідають експоненціальному закону, близькі до значень переміщення лінійного закону. Відповідні лінії на рис.1 позначені «exp» та «lin». Аналізуючи побудований графік, зауважимо, що при експоненціальному законі деформування шорсткості графік при малих значеннях сили Q_2 наближається до графіка лінійного закону. При великих Q_2 графік, що зображений на рис. 1, наближується до асимптоти, значення ординат якої мають вигляд $H_1 + \delta_1^*$ де, δ_1^* визначається за формулою (4.1). Виписана формула для ординат асимптоти обрана за допомогою граничного переходу у рівнянні (4.1) при

$p_2 \rightarrow \infty$. Для експоненціального закону такий перехід є можливим, на відміну від лінійного. Це пов'язано з тим, що для експоненціального закону доданок $W(\sigma_{y,x})$ в інтегральному рівнянні (2.1), що відповідає за деформування мікрориступів шорсткості, стабілізується і прямує до константи H_1 , а для степеневого закону деформування цієї стабілізації не відбувається і доданок прямує до нескінченності, що на практиці не можливо. Тобто відбувається стабілізація змінень мікрориступів шорсткості, що пов'язана з обмеженістю їх висоти. Такого ефекту не спостерігається для лінійного закону, для якого занурення штампа збільшуються без стабілізації.

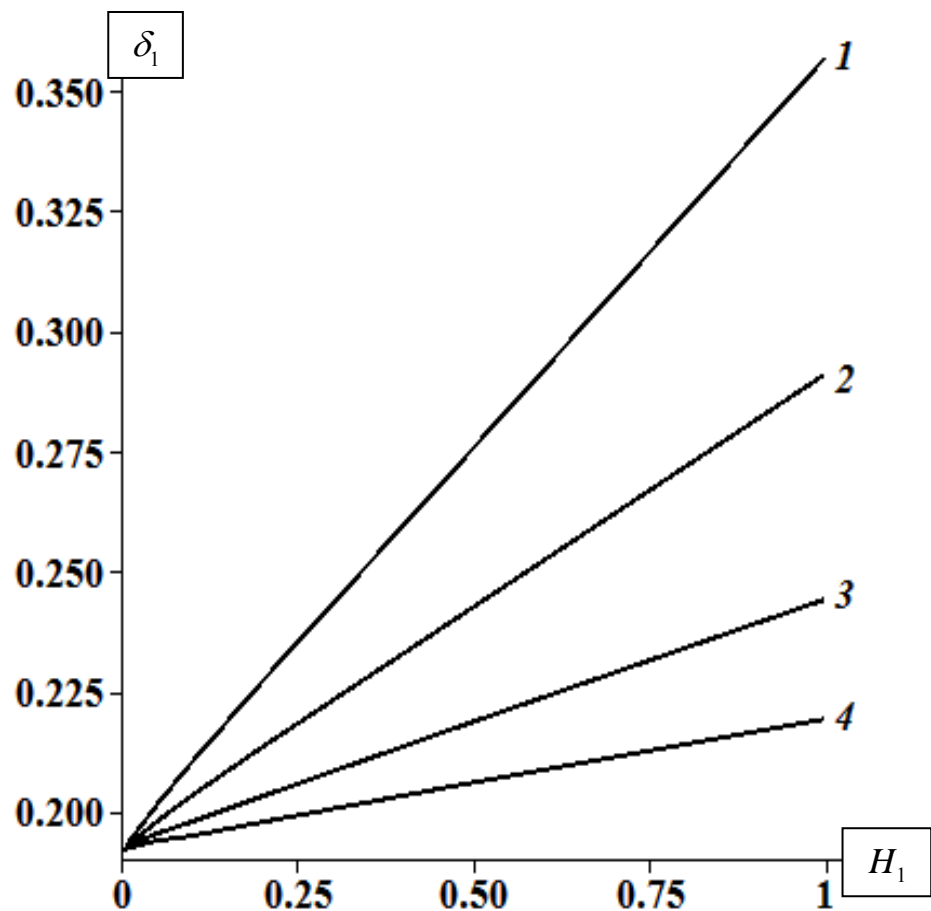


Рисунок 4.2 – Графіки залежностей заглиблення штампа при експоненціальному законі від показників шорсткості H_1

Для $Q_2 = 5 \cdot 10^{-2}$ на рис. 4.2 зображений графік залежностей заглиблення штампа при експоненціальному законі від показників

шорсткості H_1 . На цьому рисунку значення $\rho = 0,3$ фіксовано, а α – змінюється. Лінія, що позначаються «1» відповідає значенню $\alpha = 7$, лінія, що позначаються «2» відповідає значенню $\alpha = 4$, лінія, що позначаються «3» відповідає значенню $\alpha = 2$, лінія, що позначаються «4» – $\alpha = 1$.

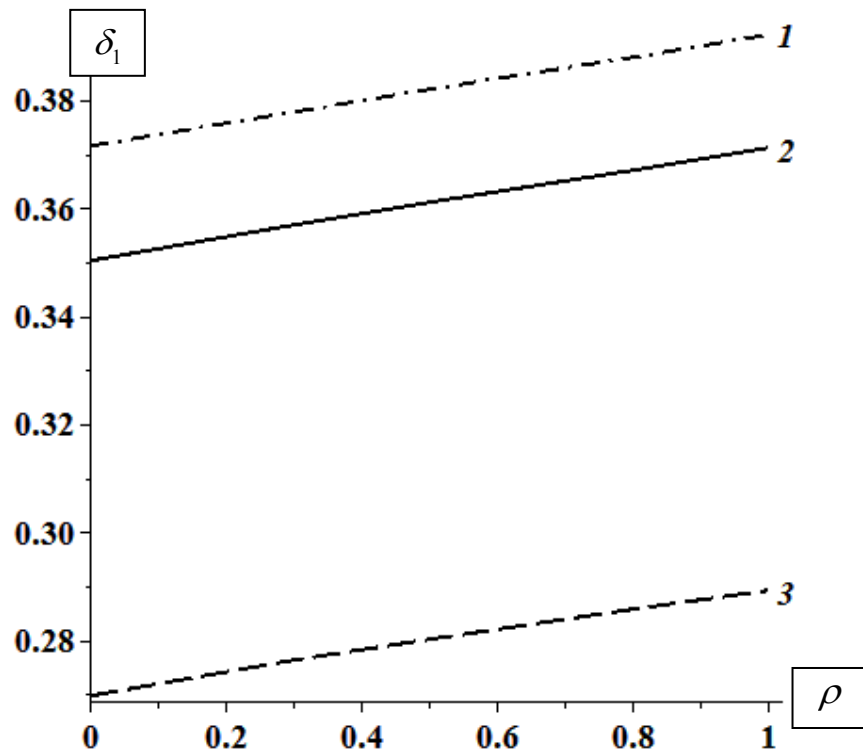


Рисунок 4.3 – Графіки залежностей заглиблення штампа при експоненціальному законі від показників тертя ρ

На рис. 4.3 лінії «1» відповідають $H_1 = 1$, $\alpha = 8$, лінії «2» відповідають $H_1 = 1$, $\alpha = 7$, лінії «3» відповідають $H_1 = 0,5$, $\alpha = 7$.

Аналізуючи рис. 4.2 і 4.3 приходимо до висновку, що при зменшенні H_1 (при фіксованому ρ), заглиблення штампа зменшується, наближаючись до числового значення δ_1^* , що відповідає гладкій полосі з урахуванням тертя з коефіцієнтом $\rho = 0,3$, що обчислений за формулою (4.1). При фіксованих коефіцієнтах шорсткості збільшення коефіцієнта тертя ρ веде до збільшення заглиблення.

На наступних рисунках 4.4 – 4.6 побудовані графіки розподілу нормального тиску під штампом при експоненціальному законі деформування, де $Q_2 = 5 \cdot 10^{-2}$.

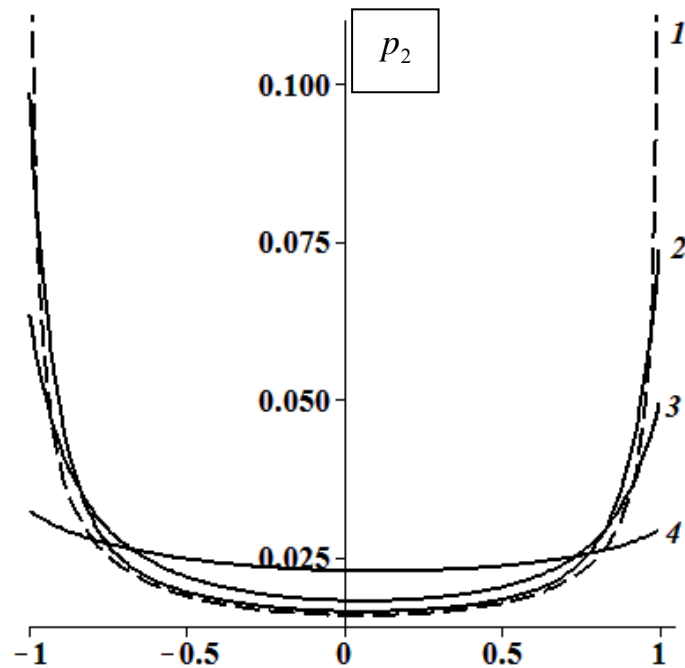


Рисунок 4.4 – Графіки розподілу нормального тиску під штампом при експоненціальному законі деформування при різних H_1

Рис 4.4 відповідає $\rho = 0,3$, $\alpha = 4$ і різним H_1 . Тобто позначкою «1» відмічені лінії, що відповідають $H_1 = 0$; позначкою «2» відмічені лінії, що відповідають $H_1 = 0,01$; позначкою «3» відмічені лінії, що відповідають $H_1 = 0,1$; позначкою «4» відмічені лінії, що відповідають $H_1 = 1$.

Рис. 4.5 вибудовується при $\rho = 0,3$, $H_1 = 1$ і різних α . Позначкою «1» відмічені лінії, що відповідають $\alpha = 1$; позначкою «2» відмічені лінії, що відповідають $\alpha = 2$; позначкою «3» відмічені лінії, що відповідають $\alpha = 7$.

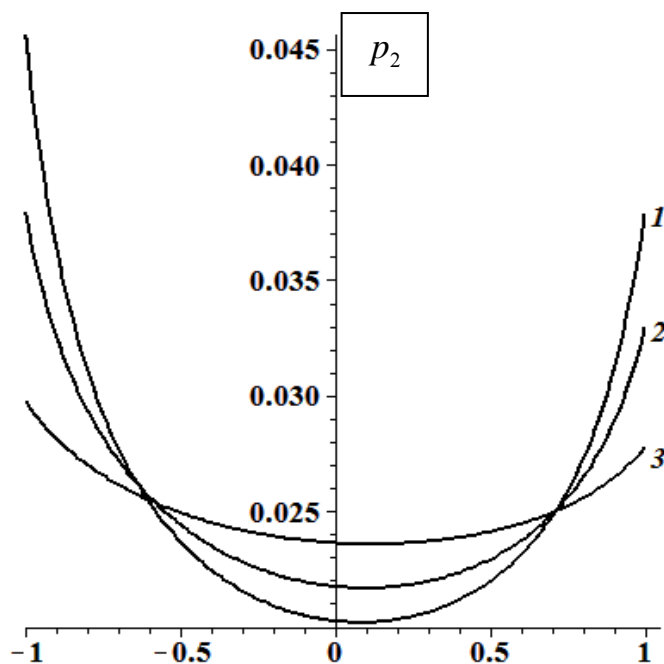


Рисунок 4.5 – Графіки розподілу нормального тиску під штампом при експоненціальному законі деформування при різних α

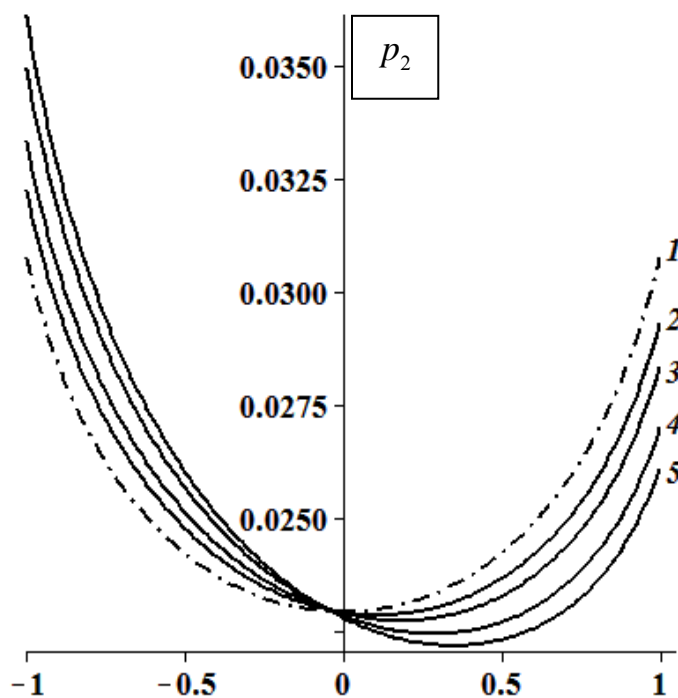


Рисунок 4.6 – Графіки розподілу нормального тиску під штампом при експоненціальному законі деформування при різних ρ

Рис. 4.6 побудований при $\alpha = 7$, $H_1 = 1$ і різних ρ . Позначкою «1» відмічені лінії, що відповідають $\rho = 0,0001$; позначкою «2» відмічені лінії,

що відповідають $\rho = 0,8$; позначкою «3» відмічені лінії, що відповідають $\rho = 0,5$; позначкою «4» відмічені лінії, що відповідають $\rho = 0,3$; позначкою «5» відмічені лінії, що відповідають $\rho = 1$.

На перший погляд здається, що на рис. 4.5 і 4.6 перетин графіків функцій відбувається у певних вузлових точках, але можемо запевнитись, що це не так, якщо наблизимо графіки (рис. 4.7, 4.8).

Із графіка на сисунці 4.7 випливає, що при $H_1 \rightarrow 0$ для всіх $t \in (-1;1)$ значення функції тиску на шорстку смугу наближається до значень функції тиску на гладку смугу $H_1 = 0$.

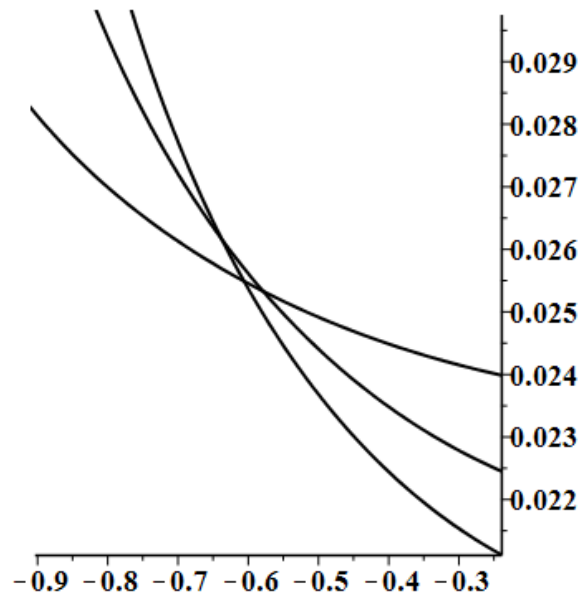


Рисунок 4.7 – Збільшений графік розподілу нормального тиску під штампом при експоненціальному законі деформування при різних α у вузловій точці

Пунктирною лінією на рис. 4.6 зображений графік функції тиску для $\rho = 0,0001$. Їх значення відрізняються менше ніж на 1% від значень, обчислених у роботі [9], при $\rho = 0$ і тих же коефіцієнтах шорсткості експоненціального закону деформування. Тож наведені факти вказують, що результат є достовірним.

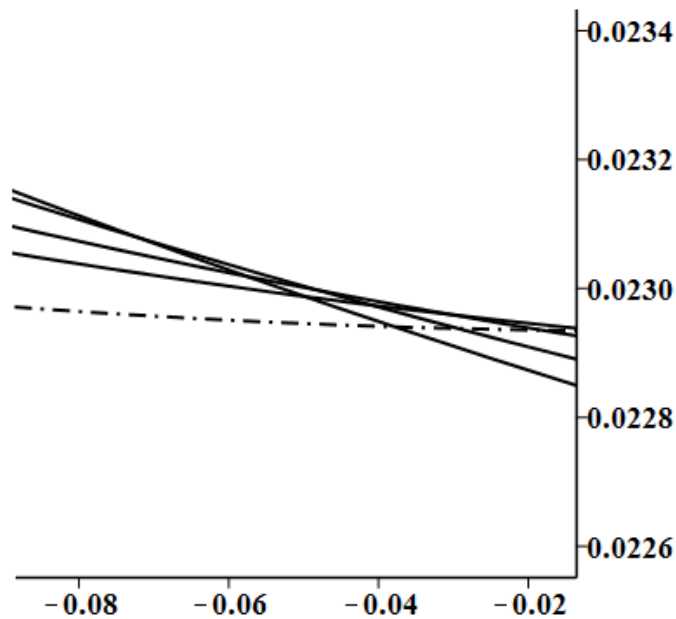


Рисунок 4.6 – Збільшений графік розподілу нормального тиску під штампом при експоненціальному законі деформування при різних ρ у вузловій точці

Для малих навантажень Q_2 обчислені результати за алгоритмом лінійного, степеневого ($\kappa = 1$) і експоненціального законів, де коефіцієнти пов'язані рівністю $B_1 = \alpha H_1$. Результати мали гарне співставлення.

Шорсткість поверхні смуги впливає на контактний тиск так, що її наявність робить цю функцію неперервною у всіх точках площадки контакту, навіть на границі, на відміну від задачі, де шорсткість не враховувалась. Тертя впливає на функцію тиску так, що вона перестає бути симетричною. Найбільше значення нормального тиску досягається на границі площадки контакту при $t = -1$, а найменше – у внутрішній точці площадки контакту. Збільшення коефіцієнта шорсткості призводить до зміщення цієї точки у сторону правої границі площадки контакту. Саме такий ефект ми можемо спостерігати, коли збільшується коефіцієнт шорсткості H_1 , що відповідає за висоту мікровиступів шорсткості. Але зі збільшенням коефіцієнта α (від 1 до 8) абсциса точки мінімуму функції контактного тиску переміщується у сторону до $t = 0$.

5 МЕТОД РЕДУКЦІЇ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕСКІНЧЕНОЇ СИСТЕМИ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Далі розглянемо як можна знайти розв'язки, що є наближеними для нескінченної системи рівнянь, замінюючи її скінченною. Доведемо, що це можливо з математичної точки зору. Для стискаючого оператора G нам необхідно перевіряти виконання умов, аналогічних тим, що наведені у роботі [10] для лінійних операторів, щоб показати можливість використання методу редукції.

Надалі будемо використовувати такі позначення: $R_{[-1,1]}^{(N)}$ – простір поліномів N -ого степеня за всіма степенями розвинення, визначених на $[-1, 1]$, X – підмножина простору $C_{[-1,1]}$ неперервних функцій на $[-1, 1]$. Розглянемо відображення

$$P_N : X \rightarrow R_{[-1,1]}^{(N)}.$$

Результат дії цього відображення на f позначимо як \overline{f}_N , тобто $\overline{f}_N = P_N f$. Для спрощення записів індекс N будемо опускати. Таким чином замість P_N і \overline{f}_N писати P і \overline{f} відповідно.

Рівняння (2.13) з врахуванням (2.12) набуває вигляду

$$\psi = G\psi \tag{5.1}$$

а наближене рівняння –

$$\overline{\psi} = G\overline{\psi},$$

$$(\overline{G\psi})(t) = \mu \left(\sum_{i=0}^N \gamma_i t^i - \frac{\delta_1}{\tilde{C}} \right) + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^N \sigma_k \sum_{i=0}^N \beta_{k,i} t^i. \quad (5.2)$$

Тут коефіцієнти σ_k для $\bar{\psi}$ співпадають до номера N з коефіцієнтами для ψ . Для подальшого обґрунтування і розв'язання знайдемо

$$\begin{aligned} (PG\bar{\psi})(t) &= \mu \left(\sum_{i=0}^N \gamma_i t^i - \frac{\delta_1}{\tilde{C}} \right) + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^N \sigma_k \sum_{i=0}^{\infty} \beta_{k,i} t^i = \\ &= \mu \left[\bar{\psi}(t) - \frac{\delta_1}{\tilde{C}} \right] + \frac{1}{\alpha} PA \left(\ln \left[\bar{\psi}(t) - \frac{\delta_1}{\tilde{C}} + 1 \right] \right) = \mu \left[\bar{\psi}(t) - \frac{\delta_1}{\tilde{C}} \right] + \frac{1}{\alpha} PA(\varphi(\bar{\psi})). \end{aligned}$$

Отже,

$$(PG\bar{\psi})(t) = \mu \left[\bar{\psi}(t) - \frac{\delta_1}{\tilde{C}} \right] + \frac{1}{\alpha} PA(\varphi(\bar{\psi})), \quad (5.3)$$

$$(\overline{G\psi})(t) = \mu \left[\bar{\psi}(t) - \frac{\delta_1}{\tilde{C}} \right] + \frac{1}{\alpha} PAP(\varphi(\bar{\psi})). \quad (5.4)$$

З (5.3), (5.4) і формули Лагранжа випливає справедливність таких співвідношень:

а) умова близькості відображень

$$\begin{aligned} \|PG\bar{\psi}_1 - \overline{G\psi}_1 - (PG\bar{\psi}_2 - \overline{G\psi}_2)\| &\leq \frac{1}{\alpha} \|P(L)\| \|I - P\| \|\varphi(\bar{\psi}_1) - \varphi(\bar{\psi}_2)\| \leq \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\tilde{C}}{\tilde{C} - \delta_1} (1 + \|I - P\|) \|I - P\| \|\bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2\|, \end{aligned}$$

тобто

$$\|PG\overline{\psi_1} - \overline{G\psi_1} - (PG\overline{\psi_2} - \overline{G\psi_2})\| \leq \eta \|\overline{\psi_1} - \overline{\psi_2}\|, \quad (5.5)$$

де $\eta = \frac{\tilde{C}}{\tilde{C} - \delta_1} (1 + \|I - P\|) \|I - P\|$;

б) умова хорошої апроксимації елементів $G\psi$ із X елементами з $R_{[-1,1]}^{(N)}$: для будь-яких елементів ψ_1 і ψ_2 з X та елементів y_1 і y_2 з $R_{[-1,1]}^{(N)}$ вигляду

$$y_i = \frac{1}{\alpha} [P(L)\varphi(\psi_i)](t) = \mu \left(\sum_{i=0}^N \gamma_i t^i - \frac{\delta_1}{\tilde{C}} \right) + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^N \sigma_k \sum_{i=0}^{\infty} \beta_{k,i} t^i$$

і виконується оцінка

$$\begin{aligned} \|G\psi_1 - y_1 - (G\psi_2 - y_2)\| &\leq \frac{1}{\alpha} \|L - F\| \|I - P\| \|\varphi(\overline{\psi_1}) - \varphi(\overline{\psi_2})\| \leq \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\tilde{C}}{\tilde{C} - \delta_1} \|I - P\| \|\varphi(\|\psi_1\|) - \varphi(\|\psi_2\|)\|, \end{aligned}$$

тобто

$$\|G\psi_1 - y_1 - (G\psi_2 - y_2)\| \leq \eta_1 \|\overline{\psi_1} - \overline{\psi_2}\|, \quad (5.6)$$

де $\eta_1 = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\tilde{C}}{\tilde{C} - \delta_1} \|I - P\|$.

Надалі зручно скористатись такими позначеннями:

$$u = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\tilde{C}}{\tilde{C} - \delta_1}, \quad (5.8)$$

$$\varepsilon_1 = \|I - P\|$$

(вираз для ε_1 залежить від P , у позначенні якого опущений індекс N , тому будемо мати на увазі залежність ε_1 від N). Тут $I: C_{[-1,1]} \rightarrow C_{[-1,1]}$ – тотожний оператор, який переводить елемент сам у себе.

Відображення $H\psi = \psi - G\psi$ на множині X при виконанні умови, що коефіцієнт u менший за одиницю, має обернений H^{-1} , неперервність якого впливає з нерівностей

$$\|H\psi_1 - H\psi_2\| \geq (1 - q^*) \|\psi_1 - \psi_2\| = \frac{1}{\eta_3} \|\psi_1 - \psi_2\|, \quad (5.9)$$

$$\text{де } q^* = \max_{t \in [0;1]} \left\{ \mu, \frac{\tilde{C}}{(\tilde{C} - \delta_1)\alpha} \right\}.$$

У ході роботи використовуємо результати наведені в [13], згідно яким виконуються умови а) і б), оператор H має неперервний обернений, при цьому

$$\|H^{-1}y_1 - H^{-1}y_2\| \leq \frac{\eta_3}{1 - q} \|y_1 - y_2\|.$$

Пригадаємо спочатку, що в позначеннях P і \bar{f} опущений індекс N . Із означення $\varepsilon_1, \eta, \eta_1$ випливає, що вони залежать від N , тобто $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(N)$, тому $\eta = \eta(N), \eta_1 = \eta_1(N)$, а також $\lim_{N \rightarrow \infty} \eta_1(N) = 0, \lim_{N \rightarrow \infty} \eta_1(N) \|P_N\| = 0$.

Отже, у ході роботи, можемо зафіксувати, що при достатньо великих N наближене рівняння має розв'язок $\overline{\psi^*}$ та має місце збіжність послідовності наближених розв'язків $\overline{\psi_N^*}$ до точного ψ^* , тобто

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \psi^* - \overline{\psi_N^*} \right\| = 0. \quad (5.10)$$

Тут

$$\left(\overline{G_N \psi_N} \right)(t) = \frac{1}{\alpha H_2} \sum_{k=0}^N \sigma_k \sum_{k=0}^N \beta_{i,k} t^k.$$

Таким чином, приходимо до висновку, що при достатньо великих N наближене рівняння має розв'язок і має місце збіжність послідовності наближених розв'язків до точного.

ВИСНОВКИ

Тема роботи пов'язана з розв'язанням контактної задачі теорії пружності, що насамперед відіграє значущу роль у практичному аспекті. У класичній постановці контактні задачі припускають ідеально гладку поверхню, що контактує, але таких поверхонь не існує. Коли ж при розв'язанні ми враховуємо шорсткість, то це суттєво впливає на характер контактної взаємодії.

Доволі давно почали працювати і розвивати задачі такого типу. Вперше дослідженням займався Генріх Герц. Контактні задачі з урахуванням шорсткості поверхні досліджували І.Я. Штаєрман [21], Л.А. Галін [5], І.Г. Горячева [7] та ін., плоскі та просторові контактні задачі з урахуванням тертя та шорсткості – V.Pauk [23], А.А. Шишканова [20], А.І. Александров [2].

У дипломній роботі працювали з плоскою контактною задачею про вдавлювання з тертям плоского штампа в пружну смугу з шорсткістю, що деформується за експоненціальним законом у припущенні, що коефіцієнти шорсткості є малими.

Грунтуючись на попередніх дослідженнях [5, 7] та відомому експоненціальному законі деформування, було виписано нелінійне інтегральне рівняння даної задачі. Для подальшої роботи і розв'язання воно було зведене до рівняння Гаммерштейна. Ми змогли звести рівняння до необхідного нам вигляду за допомогою введення допоміжної функції експоненціального вигляду і малого параметра Боголюбова-Крилова.

Для знаходження аналітичного розв'язку поставленої задачі, інтегральне рівняння зведено до нескінченної системи нелінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнти степеневого ряду функції нормального тиску. Також виведено формулу для обчислення занурення штампа в пружний шар.

Принцип стискаючих відображень було використано для доведення існування єдиного розв'язку цього рівняння. Спочатку знайдено множину X , на якій визначено інтегральне рівняння Гаммерштейна даної задачі і нелінійний

оператор цього рівняння. А потім знайдено умови стискання нелінійного оператора. Саме за цих умов з'являються обмеження на коефіцієнти шорсткості, які відповідають незначній середньостатистичній висоті мікровиступів шорсткості. Коефіцієнт шорсткості, що залежить від такої висоти, в цьому випадку, буде малий. Також за цих обмежень ми визначаємо умови існування єдиного розв'язку рівняння Гаммерштейна.

На наступному етапі, за допомогою методу редукції та методу послідовних наближень отримано наближені розв'язки задачі.

Для отримання числових результатів система нескінчених алгебраїчних рівнянь була замінена скінченною системою для отримання наближених розв'язків. Тобто було застосовано та обґрунтовано можливість використання методу редукції до скінченної системи рівнянь.

Аналізуючи числові результати, які ми отримали при розв'язанні нашої задачі методом редукції, щодо впливу коефіцієнтів шорсткості та тертя на контактні характеристики, ми змогли отримати певні висновки, які викладені нижче.

Функція контактного тиску стає неперервною при урахуванні шорсткості поверхні смуги. Причому вона є неперервною у всіх точках площадки контакту, навіть на границі, на відміну від задачі, де шорсткість не враховувалась.

Враховуючи тертя, ми отримали певний вплив на функцію нормального тиску. Вона перестає бути симетричною за наявності тертя, на відміну від задачі без тертя, де функція тиску є симетричною.

При $t = -1$ (на границі площадки контакту) досягається найбільше значення функції нормального тиску, а найменше – у внутрішній точці площадки контакту. При збільшенні коефіцієнту шорсткості H_1 , що залежить від висоти мікровиступів шорсткості, отримуємо зміщення цієї точки у сторону правої границі площадки контакту.

Зі збільшенням коефіцієнта α абсциса точки мінімуму функції контактного тиску переміщується у сторону до $t = 0$, при цьому заглиблення штампа у пружну шорстку смугу збільшується.

Підбиваючи підсумки, необхідно зазначити, що дана робота охоплює актуальні проблеми, успішне розв'язання яких, несе вагомий внесок для подальшого розвитку прикладних аспектів механіки деформованого тіла, а також для створення розрахунків для деталей машин на їх тривкість та довговічність. В такій постановці задача розв'язувалась вперше.

Робота пройшла апробацію на Дев'ятій Всеукраїнській шістнадцятій регіональній конференції молодих дослідників «Актуальні проблеми математики та інформатики» [22]. Результати роботи опубліковано в збірнику наукових праць «Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки» [11].

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. Москва : Наука, 1983. 488 с.
2. Александров А. И., Грабко Е. В. Решение контактной задачи о вдавлении прямоугольного штампа в упругое шероховатое полупространство при наличии кулонова трения // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. 2014. № 4. С.42–52.
3. Бартенев Г. М., Лаврентьев В. В. Трение и износ полимеров. Москва : Химия, 1972. 240 с.
4. Галин Л. А. Развитие контактных задач в СССР. Москва : Наука, 1976. 126 с.
5. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. Москва : Наука, 1980. 302 с.
6. Гоман О. Г., Шишканова С. Ф., Д'яченко Н. М. Задачі про штампи при різних законах деформування шорсткості // *Вісн. Херс. держ. техн. ун-ту*. 2003. № 3. С.98-101.
7. Горячева И. Г. Механика фрикционного взаимодействия. Москва : Наука, 2001. 478 с.
8. Демкин Н. Б., Рыжов С. В. Качество поверхностей и контакт деталей машин. Москва : Машиностроение, 1981. 244 с.
9. Дьяченко Н. Н., Синченко Е. С., Качан А. И. Аналитическое и приближенно аналитическое решение плоской контактной задачи с учетом трения и шероховатости // *Вісн. Зап. нац. ун-ту. Фіз.-мат. науки*. 2016. № 1. С.79–91.
10. Д'яченко Н. М., Жмур Т. О., Нікітенко А. М. Аналітичний і наближено аналітичний розв'язок плоскої контактної задачі про взаємодію штампа з шорсткою смугою // *Вісн. Зап. нац. ун-ту. Фіз.-мат. науки*. 2008. № 1. С.58-66.

11. Д'яченко Н. М., Мухін В. В., Містюк В. Ю., Юрченко А. К. Розв'язання плоскої контактної задачі з урахуванням тертя і шорсткості, що деформується за нелінійними законами. // *Вісн. Зап. нац. ун-ту. Фіз.-мат. науки*. 2019. № 1. С.45-60.
12. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. Москва : Наука, 1984. 752 с.
13. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва : Наука, 1989. 624 с.
14. Крагельский И. В., Добычин М. Н., Комбалов В. С. Основы расчётов на трение и износ. Москва : Машиностроение, 1977. 576 с.
15. Краснов М. Л. Интегральные уравнения. Москва : Наука, 1976. 304 с.
16. Лурье Л. И. Пространственные задачи теории упругости. Москва : Наука, 1955. 492 с.
17. Моссаковский В. И., Качаловская Н. Е., Голикова С. С. Контактные задачи математической теории упругости. Киев : Наукова думка, 1985. 176 с.
18. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подключений. Москва : Наука, 1982. 342 с.
19. Приварников А. К., Ильман В. М. Действие системы штампов на упругое многослойное основание. Киев : Наукова думка, 1971. С.25-30.
20. Шишканова А. А. О решении контактной задачи с учетом трения и шероховатости для штампа в форме двусвязного квадрата в плане // *Вісник Донецького ун-ту. Сер. А. Природничі науки*. 2004. № 1. С.95-102.
21. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. Москва : Гостехтеоретиздат, 1949. 270 с.
22. Юрченко А. К., Містюк В. Ю., Д'яченко Н. М. Урахування тертя і незначної шорсткості поверхні товстого шару, що деформується за експоненціальним законом, в одній плоскій контактній задачі // *Збірка тез Дев'ятої Всеукраїнської шістнадцятої регіональної конференції молодих*

дослідників «Актуальні проблеми математики та інформатики». 2018. С.108-109.

23.Pauk V. Plane Contact Problems with Partial Slip for Rough Elastic Half-Space // *J. Theor. Appl. Mech.* 2004. №42. P.107-124.