МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра фундаментальної математики

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА

на тему: **«ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ МАТРИЧНОЇ ЕКСПОНЕНТИ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЛІНІЙНИХ ФРЕДГОЛЬМОВИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ»**

Виконала студентка 2 курсу, групи 8.1119-з
спеціальності 111 математика
(шифр і назва спеціальності)
освітньої програми математика
Л. С. Дємічева
(ініціали та прізвище)

Керівник доцент кафедри фундаментальної математики, доцент, к.ф.-м.н. Панасенко Є. В.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Рецензент завідувач кафедри програмної інженерії, доцент, к.ф.-м.н. Лісняк А. О.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Запоріжжя

2020

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет математичний

Кафедра фундаментальної математики

Рівень вищої освіти магістр

Спеціальність 111 математика
(шифр і назва)

Освітня програма математика

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри
фундаментальної математики,
д.т.н., доцент
__________________ Гребенюк С.М.
(підпис)

« ______ » ______________ 2020 р.

З А В Д А Н Н Я

НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТЦІ

Дємічевій Лілії Сергіївні
(прізвище, ім'я та по-батькові)

1. Тема роботи (проекту) Застосування методу матричної експоненти до розв'язання лінійних фредгольмових крайових задач

керівник роботи (проекту) Панасенко Євген Валерійович, к.ф.-м.н., доцент
(прізвище, ім'я та по-батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від 20 травня 2020 року № 577-с

2. Строк подання студентом роботи 25.11.2020

3. Вихідні дані до роботи
1. Постановка задачі.
2. Перелік літератури.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)
1. Постановка задачі.
2. Основні теоретичні відомості.
3. Побудова розв'язку фредгольмової крайової задачі.

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень)
Презентація

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання ______________________________

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	14.09.2020	
2.	Збір вихідних даних.	21.09.2020	
3.	Обробка методичних та теоретичних	05.10.2020	
	джерел.		
4.	Розробка першого та другого розділу.	15.10.2020	
5.	Розробка третього розділу.	26.10.2020	
6.	Оформлення та нормоконтроль		
	кваліфікаційної роботи.		
7.	Захист кваліфікаційної роботи.		

Студент ______________ Л.С. Дємічева
(підпис) (ініціали та прізвище)

Керівник роботи ______________ Є.В. Панасенко
(підпис) (ініціали та прізвище)

Нормоконтроль пройдено

Нормоконтролер ______________ О. Г. Спиця
(підпис) (ініціали та прізвище)

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Застосування методу матричної експоненти до розв'язання лінійних фредгольмових крайових задач»: 64 с., 1 рис., 1 табл., 21 джерело.

КРАЙОВА ЗАДАЧА, КРИТЕРІЙ РОЗВ'ЯЗНОСТІ, ЛІНІЙНИЙ ОБМЕЖЕНИЙ ОПЕРАТОР, ЛІНІЙНА СИСТЕМА ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ, ПРОЕКТОР, ПСЕВДООБЕРНЕНА МАТРИЦЯ.

Об'єкт дослідження – фредгольмові крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь.

Мета роботи: знаходження розв'язку лінійних фредгольмових крайових задач у скінченновимірному просторі.

Метод дослідження – аналітичний.

У кваліфікаційній роботі приведені основні означення, теореми та леми, умови існування розв'язку крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь. Застосовуючи метод матричної експоненти, було знайдено нормальну фундаментальну матрицю задачі Коші, за допомогою якої побудовано розв'язок лінійної фредгольмової крайової задачі у скінчено вимірному просторі.

SUMMARY

Master's Qualification Thesis «Application of the matrix exponent method for solving linear Fredholm boundary-value problems»: 64 pages, 1 figure, 1 table, 21 references.

BOUNDARY-VALUE PROBLEM, SOLVABILITY CRITERION, LINEAR BOUNDED OPERATOR, LINEAR SYSTEM OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS, PROJECTOR, PSEUDOINVERSE MATRIX.

The object of the study is the Fredholm boundary-value problems for ordinary differential equations.

The aim of the study is finding solutions of linear Fredholm boundary-value problems in finite-dimensional space.

The method of research is analytical.

In the qualification paper, we give the basic definitions, theorems and lemmas, conditions for the existence of a solution of boundary-value problems for ordinary differential equations. Applying the matrix exponent method, we found a normal fundamental matrix of the Cauchy problem, which was used to construct the solution of the linear Fredholm boundary-value problem in a finite-dimensional space.

ЗМІСТ

Завдання на кваліфікаційну роботу 2
Реферат 4
Summary 5
Вступ 7
1 Лінійні фредгольмові крайові задачі 8
1.1 Нормальна фундаментальна матриця задачі Коші 8
1.2 Задача Коші для лінійної однорідної системи звичайних диференціальних рівнянь 12
1.3 Оператор Гріна лінійної крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь 15
2 Побудова нормальної фундаментальної матриці 23
2.1 Знаходження нормальної фундаментальної матриці у випадку, коли матриця A приведена до жорданової форми 23
2.2 Знаходження нормальної фундаментальної матриці A через суму матричного ряду 28
2.3 Формула Лагранжа 34
3 Застосування методу матричної експоненти до розв'язання лінійних фредгольмових крайович задач 40
Висновки 60
Перелік посилань 63

ВСТУП

Багато фізичних законів, яким підкоряються ті чи інші явища, записуються у вигляді математичного рівняння, що виражає певну залежність між якимись величинами. Математичне рівняння, що містить одну або кілька функцій та їх похідних, називається диференціальним рівнянням. Вивчення диференціальних рівнянь в математиці пояснюється тим, що до розв’язання таких рівнянь зводиться чимало наукових досліджень.

Основні поняття і теореми поширюються на матричні послідовності, ряди і функції. Вивчається задача Коші для диференціального матричного рівняння, пов'язаного з розв’язанням задачі Коші для систем лінійних рівнянь. Для випадку постійної матриці розглядаються методи, коли матриця приведена до жорданової форми та через суму матричного ряду для побудови матричної експоненти.

Для більшості таких завдань характерна наступна особливість: в крайову умову задачі входять крайові значення розшукуваних аналітичних функцій, які задані тільки на одному інтервалі. Це спонукало назвати крайові задачі однобічними. Інтерес до однобічних крайових задачам для аналітичних функцій став проявлятися порівняно нещодавно. Наскільки відомо, першою роботою, присвяченою розв’язанню однобічної задачі, була опублікована в 1946 році робота А. І. Маркушевича [1], де досліджується крайова задача методами теорії функцій.

1 ЛІНІЙНІ ФРЕДГОЛЬМОВІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ

1.1 Нормальна фундаментальна матриця задачі Коші

Нехай задано матрицю $A(t)$ розмірності $n \times n$, елементи якої – неперервні на відрізку $[a, b]$.

Означення 1.1 Задачею Коші для лінійної однорідної системи звичайних диференціальних рівнянь будемо називати задачу про знаходження розв'язку $z(\cdot) \in C1\ [a, b]$ системи звичайних диференціальних рівнянь [2]:

$$dz/dt = A(t)z, \tag{1.1}$$

яка б відповідала умовам Коші

$$z(a) = c, c \in R^n. \tag{1.2}$$

Оскільки права частина системи (1.1) задовольняє умовам теоремі Пікара, тому що задача Коші (1.1), (1.2) має єдиний розв'язок для $c \in Rn$.

Означення 1.2 Повну систему, що складається з n лінійно-незалежних розв'язків системи (1.1), називають фундаментальною, а матрицю $X(t)$ розмірності $n \times n$, що є розв'язком матричної задачі Коші [7]

$$dX(t)/dt = A(t)X(t), X(a) = I_n,$$

називають нормальною фундаментальною матрицею [9].

Відповідно до теореми Пікара для системи (1.1) нормальна фундаментальна матриця завжди існує. Таким чином, доведено наступну лему.

Лема 1.1 Задача Коші (1.1), (1.2) має єдиний розв'язок

$$z(t,c) = X(t)c,$$

для будь-якого вектору с $\in R^n$ та матриці $A(t)$.

Означення 1.3 Визначник нормальної фундаментальної матриці $X(t)$ називають визначником Вронського:

$$W(t) \coloneqq detX(t).$$

Теорема 1.1 (Остроградського-Ліувілля). Для будь-якого $t \in [a,b]$ має місце рівність [16]:

$$W(T) = W(a)exp\int_a^t Sp\, A(\tau)d\tau. \tag{1.3}$$

Згідно з правилом диференціювання визначника:

$$\frac{dW(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \begin{vmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x_{1k}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x'_{j1}(t) & \cdots & x'_{jk}(t) & \cdots & x'_{jn}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1}(t) & \cdots & x_{nk}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}. \tag{1.4}$$

За означенням нормальної фундаментальної матриці $X(t)$ похідна кожного її елемента має вигляд:

$$\frac{dx_{jk}(t)}{dt} = \sum_{s=1}^{n} a_{js}(t)x_{sk}(t).$$

Остання рівність дозволяє перетворити визначник (1.4):

$$\sum_{j=1}^{n}\begin{vmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x_{1k}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{s=1}^{n} a_{js}(t)x_{s1}(t) & \cdots & \sum_{s=1}^{n} a_{js}(t)x_{sk}(t) & \cdots & \sum_{s=1}^{n} a_{js}(t)x_{sn}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1}(t) & \cdots & x_{nk}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} a_{js}(t)\delta_{js}W(t) = W(t)\sum_{j=1}^{n} a_{jj}\,(t).$$

Таким чином, за означенням сліду $Sp\ A(t)$ матриці $A(t)$, маємо

$$\frac{dW(t)}{dt} = W(t)\ Sp\ A(t).$$

Розділяючи змінні

$$\frac{dW(t)}{W(t)} = \ Sp\ A(t)dt,$$

і й інтегруючи, маємо

$$W(t) = W(a)\exp\int_a^t Sp\ A(\tau)d\tau,$$

що і потрібно було довести.

Висновок 1.1 Нормальна фундаментальна матриця системи (1.1) неособлива для будь-якого $t\ \in [a,b]$.

Дійсно, за означенням нормальної фундаментальної матриці, вона неособлива одній точці $t = a$, що в силу теореми Остроградського-Ліувілля [7] і в силу дійсності сліду матриці $A(t)$ застосовує неособливу нормальну фундаментальну матрицю системи для будь-якого $t\ \in [a,b]$.

Приклад 1.1 Нормальна фундаментальна матриця задачі (1.1), (1.2), де

$$\mathrm{A} = \mathrm{J}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

має вигляд:

$$X_2(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

У найпростішому випадку, якщо матриця A постійна, для знаходження нормальної фундаментальної матриці може бути застосована формула:

$$X(t) = e^{A(t-a)}, \tag{1.5}$$

де $e^{A(t-a)}$ за означенням – сума матричного ряду

$$e^{A(t-a)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k (t-a)^k}{k!}.$$

Найбільш впорядковано знаходження нормальної фундаментальної матриці в тому випадку, коли матриця A приведена до жорданової форми. При цьому жорданова клітинка, має вигляд:

$$J_{\boldsymbol{kh}}(\lambda_k) = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_k & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}, k = 1, \dots, m, h = 1, \dots, l_k.$$

1.2 Задача Коші для лінійної однорідної системи звичайних диференціальних рівнянь

Нехай задано матрицю $A(t)$ розмірності $n \times n$ і вектор-стовбець n матриці $f(t)$, елементи якої – неперервні на відрізку $[a,b]$.

Означення 1.4 Задачею Коші для лінійної неоднорідної системи звичайних диференціальних рівнянь будемо називати задачу про знаходження розв'язку $z(\cdot) \in C^1[a,b]$ системи звичайних диференціальних рівнянь [7]

$$dz/dt = A(t)z + f(t), \tag{1.6}$$

яка б відповідала умовам Коші:

$$z(a) = c, c \in R^n. \tag{1.7}$$

Розв'язок неоднорідної задачі Коші (1.6), (1.7), як відомо, складається з суми розв'язування однорідної $(f(t) = 0)$ задачі Коші (1.6), (1.7) і довільного частинного розв'язання неоднорідної задачі Коші (1.6), (1.7):

$$z(t,c) = X(t)c + \bar{z}(t).$$

Для знаходження останнього використовуємо метод невизначених коефіцієнтів Лагранжа – будемо знаходити частинний розв'язок неоднорідної задачі Коші (1.6), (1.7) у вигляді добутку нормальної фундаментальної матриці $X(t)$ та невідомої матриці $U(t)$ розмірності $n \times n$, елементи якої неперервні на відрізку $[a,b]$ функції: $\overline{z}(t) = X(t)U(t)$. Підставляючи $\bar{z}(t)$ у рівняння (1.6) маємо:

$$\overline{z'}(t) = X'(t) \cdot U(t) + X(t) \cdot U'(t),$$

звідки

$$X(t) \cdot U'(t) = f(t),$$

отже

$$U(t) = \int_a^t X^{-1}(s) \cdot f(s) ds.$$

Таким чином,

$$\bar{z} = X(t)U(t) = X(t) \int_a^t X^{-1}(s) f(s) ds,$$

має єдиний розв’язок неоднорідної задачі Коші (1.6), (1.7).

Означення 1.5 Оператором Гріна [18] задачі Коші (1.6), (1.7) називають вираз:

$$K[f](t) = X(t) \int_a^t X^{-1}(s) f(s) ds. \tag{1.8}$$

Оскільки оператор Гріна задачі Коші (1.6), (1.7) – частинний розв’язок рівняння (1.6), то він задовольняє цьому рівнянню:

$$\frac{d}{dt} K[f](t) = A(t) K[f](t) + f(t),$$

крім того в момент часу $t = a$ його значення обертається в нуль.

Таким чином, доведено наступну лему.

Лема 1.2 Розв’язок задачі Коші (1.6), (1.7) можна розглядати для будь-яких неоднорідностей $f(t) \in C[a, b], c \in R^n$ у вигляді:

$$z(t,c) = X(t,c)c + K[f](t). \tag{1.9}$$

Наведемо без доведення ще одну лему, твердження якої істотно для подальшого застосування оператора Гріна (1.8) задачі Коші (1.6), (1.7).

Лема 1.3 Оператор Гріна (1.8) задачі Коші (1.6), (1.7) – лінійний оператор [20].

Приклад 1.2 Розв'язок задачі Коші (1.6), (1.7) з матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

де неоднорідність $f(t) = \mathrm{col}(t, -t)$ має вигляд (1.9), отже

$$X(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^t + e^{-t} & e^t - e^{-t} \\ e^t - e^{-t} & e^t + e^{-t} \end{pmatrix}, K[f](t) = \begin{pmatrix} t - 1 \\ 1 - t \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.3 Розв'язання задачі Коші (1.6), (1.7) з матрицею $A = J_2$ і неоднорідністю $f(t) = \mathrm{col}(0, \sin 2t)$ має вигляд (1.6), де $X(t) = X_2(t)$,

$$K[f](t) = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} \sin 2t \\ 2\cos 2t \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.4 Побудуємо розв'язок задачі Коші:

$$\begin{cases} dz/dt = z + |1 - t|, t \in [0,2], \\ z(0) = 1. \end{cases} \tag{1.10}$$

Нормальна фундаментальна матриця задачі Коші (1.10), в даному випадку – функція:

$$X(t) = e^{\int_0^t ds} = e^t,$$

отже, оператор Гріна задачі Коші (1.8) має вигляд:

$$K[f](t) = e^t \int_0^t e^{-8} |1 - s| ds = \begin{cases} t, t \in [0,1]; \\ 2e^{t-1} - t, t \in [1,2], \end{cases}$$

і приводить до шуканого розв'язування задачі Коші (1.10):

$$z(t,c) = \begin{cases} e^t + t, t \in [0,1], \\ e^t + 2e^{t-1} - t, t \in [1,2]. \end{cases}$$

Відзначимо, що знайдений оператор Гріна задачі Коші (1.10) відобразив неперервну, але тільки лише неперервній-диференційованій функції $f(t) = |1 - t|$ в функцію $K[f](t) = t$ на всьому відрізку $[0,2]$ (у тому числі і в точці $t = 1$, де неоднорідність $f(t)$ має розривну похідну).

Завдання 1.1 Побудувати розв'язання задачі Коші

$$\begin{cases} dz/dt = z + t, t \in [0,1], \\ z(0) = 1. \end{cases}$$

Відповідь. $z(t) = 2e^t - t - 1$.

1.3 Оператор Гріна лінійної крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь

Нехай $\ell z(\cdot)$ – лінійний обмежений векторний функціонал виду:

$$\ell z(\cdot) = col\big(\ell_1 z(\cdot), \cdots, \ell_m z(\cdot)\big),$$

де

$$\ell_1 z(\cdot), \cdots, \ell_m z(\cdot) : C[a,b] \to R^1,$$

лінійні обмежені функціонали.

Означення 1.6 Лінійною крайовою задачею будемо називати задачу про знаходження розв'язання $z(\cdot) \in C^1[a,b]$ систем звичайних диференціальних рівнянь [19]

$$dz/dt = A(t)z + f(t), \tag{1.11}$$

які задовільні крайовій умові:

$$\ell z(\cdot) = \alpha, \alpha \in R^m. \tag{1.12}$$

Означення 1.7 Окремий випадок задачі (1.11), (1.12), коли функціонал $\ell z(\cdot)$ має вигляд:

$$\ell z(\cdot) = z(a) - z(b),$$

називають періодичною крайовою задачею. Якщо ж

$$\ell z(\cdot) = Mz(a) + Nz(b),$$

де M і N – постійні матриці розмірності $n \times m$, то задачу (1.11), (1.12) називають двоточковою.

Для знаходження необхідних і достатніх умов існування розв'язку задачі (1.11), (1.12) проаналізуємо задачу про знаходження розв'язання $z(\cdot) \in C^1[a,b]$ однорідної системи рівнянь:

$$dz/dt = A(t)z, \tag{1.13}$$

які задовільні однорідній крайовій умові

$$\ell z(\cdot) = 0, \tag{1.14}$$

застосовуючи спільний розв’язок системи (1.13) $z(t) = X(t)c$ в крайову умову (1.14), приходимо до рівняння $\ell X(\cdot)c = 0$ щодо вектора $c \in R^n$.

Позначимо постійну матрицю $Q \coloneqq \ell X(\cdot)$ розмірності $m \times n$, де перетворимо (1.14) рівняння до виду:

$$Qc = 0. \tag{1.15}$$

В силу своєї однорідності, рівняння (1.15) розв’язується для будь-якої матриці Q, причому по означенню нуль-простору $N(Q)$ матриці Q, рівняння (1.15) задовольняє будь-якому вектору $\bar{c} = P_{QC}, c \in R^n$. Нехай

$$rank\, Q = n_1 \leq \min(m,n).$$

Позначимо різницю $n - n_1 = r$. Тому розмірність нуль-простору $N(Q)$ дорівнює дефекту матриці Q, оскільки:

$$\dim N(Q) \ = n - rankQ = n - n_1 = r,$$

таким чином, r параметричне розв’язання рівняння (1.15) [14]

$$c = P_{Q_r} c_r, c_r \in \ R^r,$$

де визначає матрицю $P(Q)$ розмірності $n \times r$, яка складена з r лінійно-незалежних стовпців ортопроектора P_Q. При цьому, задача (1.13), (1.14) має r параметричне розв’язування рівняння:

$$z(t, c_r) = X(t) P_{Q_r c_r},\ c_r \in \ R^r,$$

тому розв'язання тривіально $(r = 0)$ або нетривіально $(r \neq 0)$ залежить від величини r.

Позначимо матрицю $X_r(t) = X(t)P_Q$ розмірності $n \times r$, складену з r лінійно-незалежних розв'язань однорідної задачі (1.13), (1.14). Ця матриця визначає r параметричне розв'язування рівняння задачі (1.13),(1.14).

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r,\ c_r \in\ R^r.$$

Застосовуючи спільний розв'язок системи (1.11), відповідно до леми 1.1 отриманий у вигляді:

$$z(t,c) = X(t)c + K[f](t), c \in\ R^n,$$

в крайовій умові (1.15) приходимо до лінійної системи:

$$Qc = \alpha -\ \ell K[f](\cdot). \tag{1.16}$$

Систему (1.16) можна розв'язувати тоді й тільки тоді, коли

$$P_{Q*}\{\alpha - \ell K[f](\cdot)\} = 0.$$

Остання рівність складається з m скалярних умов, серед яких не більше, ніж $m - n_1$ умовою якою являється лінійно-незалежною, оскільки $rank\, P_{Q*} =$ $= m - n_1$. Позначимо різницю $m - n_1 = d$ і введемо матрицю P_{Q*} розмірності $d \times m$, складену з d лінійно-незалежних рядків матриці-ортопроектора P_{Q*}. Остання матриця дозволяє записати необхідну і достатню умову розв'язання системи (1.16), що містить тільки лінійно-незалежні рядки:

$$P_{Q_d^*}\{\alpha - \ell K[f](\cdot)\} = 0. \tag{1.17}$$

Припустимо, що умова (1.13) виконано: в цьому випадку рівняння (1.16) матиме вигляд:

$$\mathrm{c} = Q^{+}\{\alpha - \ell K[f](\cdot)\} + P_{Q_r} c_r.$$

Отриманий вектор визначає r параметричне розв'язування рівняння задачі (1.11), (1.12)

$$z(t, c_r) = X_r(t) c_r + G[f; \alpha](t), \ c_r \in R^r,$$

де

$$G[f; \alpha](t) = X(t) Q^{+}\{\alpha - \ell K[f](\cdot)\} + K[f](t).$$

Узагальненість оператора Гріна задачі (1.11), (1.12). Умова (1.16) виконується, зокрема, у випадку $P_{Q*} = 0,$ або, що рівносильне, при $P_{Q*} = 0.$

Розглянемо задачу (1.11), (1.12) фредгольмового $(m = n)$ типу [11,12]. В цьому випадку

$$rank\, Q = rank\, Q^{*} = n_1,$$

при цьому, що

$$rank\, P_Q = rank\, P_{Q^*} = n - n_1 = m - n_1.$$

За умови $P_{Q^*} = 0,$ приходимо до рівності $n - n_1 = m - n_1 = 0,$ рівносильній неособливі матриць Q^* і $Q.$ Таким чином, задачу (1.11), (1.12) фредгольмового $(m = n)$ типу за умови $P_{Q^*} = 0,$ або, що рівносильно, при неособливі матриці Q^*, можна розв'язати за будь-яких неоднорідностей α і $f(t)$.

Припустимо далі, що задачі (1.11), (1.12) не фредгольмова $(m \neq n)$, іншими словами, припустимо, що задача (1.11), (1.12) нетерова. У цьому випадку умова $rank\, P_{Q^*} = m - n_1 = 0$ тягне за собою рівність $m = n_1$, що можливо тільки при $m \leq n$. Таким чином, для задач (1.11), (1.12) нетерового типу рівності $P_{Q^*} = 0$ можливі тільки при $m < n$, тобто, для задач недовизначених [10].

Означення 1.7 Крайові задачі (1.11), (1.12), для яких $P_{Q^*} \neq 0,$ будемо називати критичними. В протилежному випадку, коли $P_{Q^*} = 0$, крайову задачу (1.11), (1.12) будемо називати некритичною.

Основною відмінністю некритичної задачі (1.11), (1.12) від критичної є її можливість розв'язування при будь-яких неоднорідностях α і $f(t)$.

Теорема 1.2 У критичному випадку $P_{Q^*} \neq 0$ крайова задача (1.11), (1.12) має розв’язок тоді й тільки тоді, коли виконана умова (1.17), при цьому r – параметричне сімейство розв’язань задачі (1.11), (1.12).

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f; \alpha](t),\ c_r \in R^r,$$

представимо за допомогою узагальненого оператора Гріна задачі (1.11), (1.12).

Таким чином, отриманий розв’язок задачі (1.11), (1.12) має собою суму загального розв’язування однорідної задачі (1.13), (1.14) та розв’язок задачі (1.11), (1.12).

Висновок 1.2 У критичному випадку $(detQ \neq 0)$ крайова задача (1.11), (1.12) фредгольмового типу $(m = n)$ можна розв’язати тоді і тільки тоді, коли виконана умова (1.17), при цьому r параметричне $(r > 0)$ розв’язування рівняння задачі (1.11), (1.12)

Приклад 1.5 Переконаємося в існуванні і побудуємо розв’язок задачі

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\cos t}{2+\sin t} z + \sin 2t, \\ \ell z(\cdot) = z(0) - z(2\pi) = 0. \end{cases} \tag{1.18}$$

Для цього досліджуємо однорідну частину задачі (1.18)

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\cos t}{2+\sin t} z, \\ \ell z(\cdot) = z(0) - z(2\pi) = 0. \end{cases} \tag{1.19}$$

Нормальна фундаментальна матриця:

$$X(t) = e^{\int_0^t \frac{\cos\varepsilon}{2+\sin\varepsilon} d\varepsilon} = e^{\int_0^t \frac{d(\sin\varepsilon+2)}{2+\sin\varepsilon}} = e^{\ln(\sin\varepsilon+2)|_0^t} = e^{\ln(\sin t+2-\ln 2)} = \frac{2+\sin t}{2},$$

таким чином,

$$X(t) = \frac{2+\sin t}{2},$$

при цьому

$$X^{-1}(t) = \frac{2}{2+\sin t},$$

тому що

$$Q = \ell X(\cdot) = X(0) - X(2\pi) - 0,$$

отже $P_{Q*} = 1 \neq 0$, має місце критичний випадок. Обчислюємо далі оператор Гріна задачі Коші для рівняння (1.18)

$$K[f](t) = \int_0^t X(t)X^{-1}(s)f(s)ds = \frac{2+\sin t}{2}\int_0^t \frac{2}{2+\sin t}\sin 2s ds =$$
$$= 2(2+\sin t)(\sin t - 2\ln(\sin t + 2) + 2\ln 2).$$

Таким чином,

$$\ell K[f](\cdot) = K[f](0) - K[f](2\pi) = 0,$$

умова існування розв’язку задачі (1.14) виконано і відповідно до теореми 1.2 має вигляд:

$$z(t,c) = X(t)c + K[f](t),$$

звідки

$$z(t,c) = \frac{2+\sin t}{2}c + 2(2+\sin t)(\sin t - 2\ln(\sin t + 2) + 2\ln 2).$$

2 ПОБУДОВА НОРМАЛЬНОЇ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЇ МАТРИЦІ

2.1 Знаходження нормальної фундаментальної матриці у випадку, коли матриця $\boldsymbol{A}$ приведена до жорданової форми

Означення 2.1 Кліткою Жордана $n-$го порядку, що відповідає власному значенню a, називається матриця [6]:

$$J_n(a) = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{bmatrix} a \in P. \quad (2.1)$$

Очевидно, що $J_n(a) = aE_n + H_n$.

Усі діагональні елементи клітинки $J_n\,(a)$ рівні a, вище діагоналі паралельно їй розташована смуга $1, \ldots, 1$, всі інші елементи клітини рівні 0. Наприклад,

$$J_1(2) = 2, J_2(2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, J_3(2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Іноді замість клітинки (2.1) розглядають нижню жорданову клітку: $aE_n + F_n$.

Означення 2.2 Клітинно-діагональна матриця

$$J = diag((J_{n1}(a_1), J_{n2}(a)2), \ldots \ldots, J_{nm}(a_m)), \quad (2.2)$$

де $J_{ni}\,(a_i), i = \overline{1,m}$ – клітинки Жордана, називається матрицею Жордана.

Зауважимо, що $n_i(i = \overline{1,m})$, а також a_i не обов'язково різні. При цьому $m \geq 1$, тобто жорданова клітина належить до числа жорданових матриць.

Приклад 1.6

$$J = diag(J_2(3), J_1(0), J_3(2)) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Діагональні матриці є окремим випадком жорданових матриць: це будуть ті жорданові матриці, у яких всі жорданові клітинки мають порядок, рівний 1 [21].

Означення 2.3 Якщо A – довільна квадратна матриця над полем P і J – подібна до неї матриця Жордана ($A \approx J$), то J називається жордановою нормальною формою матриці A. Якщо для матриці A існує жорданова нормальна форма, то кажуть, що A приводиться до жорданової нормальної формі (ЖНФ).

Лемма 2.1 Характеристична матриця клітинки Жордана (2.1) має тільки один елементарний дільник $(x - a)^n$.

Доведення. Характеристична матриця клітинки Жордана (2.1) має вигляд:

$$J_n(a_n) - xE = \begin{bmatrix} a-x & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a-x & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a-x \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

Тоді $\det(J_n(a) - xE) = (a-x)^n, \Rightarrow d_n(x) = (x-a)^n$.

Серед мінорів $n-1$-ого порядку матриці (2.2) розглянемо мінор M, отриманий викреслюванням першого стовпця і останнього рядка: $M = 1 \Rightarrow d_{n-1}(x) = 1$. Із співвідношень

$$d_{n-1}(x) = f_1(x) \cdot \ldots \cdot f_{n-1}(x) = 1,$$
$$d_{n-1}(x) = f_1(x) \cdot \ldots \cdot f_{n-1}(x) f_n(x) = (x-a)^n,$$

випливає, що

$$f_1(x) = \cdots = f_{n-1}(x) = 1, f_n(x) = (x-a)^n,$$

значить, матриця (2.3) має єдиний елементарний дільник $(x-a)^n$. Лемма 2.1 доведена.

Висновок 2.1 Елементарними дільниками характеристичної матриці для матриці Жордана (2.2) є многочлени $(x-a_i)^{n_i}, i=\overline{1,m}$ і тільки вони. При цьому враховуються всі повторення многочленів. Дійсно, характеристична матриця для матриці Жордана (2.2) – клітинно-діагональна матриця. Тому, система елементарних дільників (СЕД) блочно-діагональної (клітинно-діагональної) матриці дорівнює об'єднанню СЕД її блоків (клітин). Отже, маємо, що СЕД матриці Жордана (2.2) складається з елементарних дільників $(x-a_i)^{n_i}$ характеристичних матриць окремих клітин Жордана $J_{ni}(a_i), i=\overline{1,m}$.

Теорема 2.1 Матриця A порядку n над полем P приводиться до ЖНФ тоді і тільки тоді, коли $P_A(x)$ має в полі P рівно n коренів з урахуванням їх кратності, тобто розкладається над цим полем у добутку многочленів першої степені. ЖНФ матриці A визначається однозначно з точністю до порядку слідування клітинки Жордана на головній діагоналі.

Висновок 2.2 Будь-яка квадратна матриця над полем приводиться до ЖНФ.

У доведенні теореми міститься алгоритм побудови ЖНФ довільної матриці A [5]:

а) складаємо характеристичну матрицю;

б) наводимо її до канонічного вигляду;

в) знаходимо СЕД матриці $xE - A$.

Якщо хоча б один з них не є многочленом виду $(x - a)^k$, то ЖНФ не існує (над фіксованим полем). В іншому випадку для кожного елементарного дільника виду $(x - a)^k$ потрібно записати клітинку Жордана $J_k\,(a)$. Клітинно-діагональна матриця, складена з цих клітинок, розташованих на головній діагоналі в довільній послідовності, є ЖНФ матриці A.

Приклад 1.7 Привести до ЖНФ матрицю:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 2 \\ 8 & -6 & 5 \end{bmatrix}.$$

Розв’язування:

$$xE - A = \begin{bmatrix} x-3 & 1 & 0 \\ -6 & x+3 & -2 \\ -8 & 6 & x-5 \end{bmatrix},$$

очевидно, що $d_1\,(x) = 1$. Знайдемо $d_2\,(x)$.

Розглянемо $M\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ x+3 & -2 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow d_2\,(x) = 1.$

Знайдемо

$$d_3\ (x) = \det(xE - A) = (x-3)(-1)^2 \begin{vmatrix} x+3 & -2 \\ 6 & x-5 \end{vmatrix} + (-1)^3 \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ -8 & x-5 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-3)(x^2 - 2x - 3) - (14 - 6x) =$$

$$= x^3 - 5x^2 + 3x + 9 - 14x + 6x = x^3 - 5x^2 + 9x - 5.$$

Підбором знаходимо один з коренів: $x = 1$.

$$\Rightarrow d_3(x) = (x-1)(x^2 - 4x + 5)(A \text{ це і є } P_A(x)).$$

Отже, $f_1\,(x) = f_2\,(x) = 1, f_3\,(x) = (x-1)(\,x^2 - 4x + 5)$,

$$\Rightarrow xE - A \sim diag\left(1{,}1(x-1)(x^2 - 4x + 5)\right).$$

В полі R многочлен $x^2 - 4x + 5$ коренів не має, отже, над R не існує ЖНФ матриці A.

Над C у многочлена $x^2 - 4x + 5$ два корені:

$$D = 16 - 20 = -4 = 4i^2$$

$$x_{1/2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i.$$

Таким чином, $f_3(x) = (x-1)(\,x - 2 - i)(x - 2 + i)$ над C. Тоді СЕД матриці $xE - A$: $x - 1, x - (2+i), x - (2-i)$.

Значить,

$$J = diag(1{,}2 + i, 2 - i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2+i & 0 \\ 0 & 0 & 2-i \end{bmatrix}$$

– ЖНФ матриці A.

Зауважимо, що оскільки елементарні дільники матриці $xE - A$ виявилися 1-го степеня, то матриця J діагональна.

2.2 Знаходження нормальної фундаментальної матриці $\boldsymbol{A}$ через суму матричного ряду

Розглянемо квадратну матрицю A розмірністю $n \times n$, елементи якої можуть бути як дійсними, так і комплексними числами. Оскільки матриця A квадратна, то для неї визначена операція піднесення до степеня, тобто ми можемо обчислити матриці [4]

$$A^0 = I, A^1 = A, A^2 = A \cdot A, A^3 = A^2 \cdot A, \dots, A^k = \underbrace{A \cdot A \cdots A,}_{k \text{ раз}} \tag{2.4}$$

де через I позначена одинична матриця порядку n.

Складемо нескінченний матричний степеневий ряд:

$$I + \frac{t}{1!}A + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \cdots + \frac{t^k}{k!}A^k + \cdots. \tag{2.5}$$

Сума даного нескінченного ряду (2.5) називається матричною експонентою і позначається як e^{tA}:

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}A^k. \tag{2.6}$$

Цей ряд (2.6) є абсолютно збіжним.

У винятковому випадку, коли матриця складається з одного числа a, тобто має розмір 1×1, наведена формула перетворюється в відому формулу розкладання функції e^{at} в ряд Маклорена:

$$e^{at} = 1 + at + \frac{a^2t^2}{2!} + \frac{a^3t^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k t^k}{k!}.$$

Матрична експонента має наступні основні властивості:

а) якщо A – нульова матриця, то $e^{tA} = e^0 = I$;

б) якщо $A = I$ (I – одинична матриця), то $e^{tI} = e^t I$;

в) якщо для A існує зворотня матриця A^{-1} , то $e^A e^{-A} = I$;

г) $e^{mA} e^{nA} = e^{(m+n)A}$, де m, n – довільні дійсні або комплексні числа;

ґ) похідна матричної експоненти виражається формулою:

$$\frac{d}{dt}(e^{tA}) = Ae^{tA}.$$

д) нехай H – невироджене лінійне перетворення. Якщо $A = H\,M\,H^{-1}$, то $e^{tA} = He^{tM}H^{-1}$.

Матричну експоненту використовують для розв’язання однорідних лінійних систем з постійними коефіцієнтами.

Матрична експонента [3] може успішно використовуватися для розв’язання систем диференціальних рівнянь. Розглянемо систему лінійних однорідних рівнянь, яка в матричної формі записується у вигляді:

$$X'(t) = AX(t). \tag{2.7}$$

Загальний розв’язок (2.7) системи представляється через матричну експоненту у вигляді:

$$X(t) = e^{tA}C, \tag{2.8}$$

де $C = (C_1, C_2, \dots, C_n)^T$ – довільний вектор розмірності n . Символ T позначає операцію транспонування. У формулі (2.8) ми не можемо записати вектор C перед матричної експонентою, оскільки добуток матриць $\underset{[n\times 1]}{C}\ \underset{[n\times n]}{e^{tA}}$ не визначено.

Для задачі з початковими умовами (задача Коші) компоненти вектора C виражаються через початкові умови. У цьому випадку розв'язком однорідної системи записується у вигляді [9]:

$$X(t) = e^{tA} X_0, \text{ де } X_0 = X(t = t_0). \tag{2.9}$$

Таким чином, розв'язком однорідної системи рівнянь стає відомим, якщо обчислена відповідна матрична експонента. Для її обчислення можна скористатися нескінченним рядом, який міститься у визначенні матричної експоненти. Однак часто це дозволяє знайти матричну експоненту лише наближено. Для розв'язування задачі можна використовувати також алгебраїчний спосіб. Розглянемо цей спосіб і загальний хід рішення більш детально.

Алгоритм розв'язування системи рівнянь методом матричної експоненти [6]:

а) спочатку знаходимо власні значення λ_i матриці (лінійного оператора) A ;

б) обчислюємо власні і (в разі кратних власних значень) долучені вектори;

в) з отриманих власних і долучених векторів складаємо неособливу матрицю лінійного перетворення H. Обчислюємо відповідну зворотню матрицю H^{-1};

г) знаходимо нормальну жорданову форму J для заданої матриці A, використовуючи формулу:

$$J = H^{-1} A H. \tag{2.10}$$

Примітка. У процесі знаходження власних і долучених векторів часто стає зрозумілою структура кожної жорданової клітини. Це дозволяє відразу записати жорданову форму без обчислення за формулою (2.10).

ґ) знаючи жорданову форму J, складається матриця e^{tJ}. Відповідні формули для такого перетворення виводяться з визначенням матричної експоненти. Для деяких простих Жорданових форм матриця e^{tJ} має вигляд, наведений в (таблиці 1).

д) обчислюємо матричну експоненту e^{tA} за формулою:

$$e^{tA} = He^{tJ}H^{-1}. \tag{2.11}$$

е) записуємо спільний розв'язок системи, яке має наступний вигляд:

$$X(t) = e^{tA}C. \tag{2.12}$$

є) у разі систем диференціальних рівнянь 2-го порядку загальний розв'язок виражається формулою:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{tA}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}, \tag{2.13}$$

де C_1, C_2 – довільні постійні.

Таблиця 1 – Перетворення з визначенням матричної експоненти

Жорданова форма J	Матриця
$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} = e^{\lambda_1 t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 1\\ 0 & 0 & \lambda_1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & \frac{t^2}{2}e^{\lambda_1 t}\\ 0 & e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t}\\ 0 & 0 & e^{\lambda_1 t}\end{pmatrix} = e^{\lambda_1 t}\begin{pmatrix}1 & t & \frac{t^2}{2}\\ 0 & 1 & t\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Приклад 1.8 Розв'язати систему рівнянь методом матричної експоненти:

$$\frac{dx}{dt} = 4x, \frac{dy}{dt} = x + 4y.$$

Розв'яжемо характеристичне рівняння і знайдемо власні значення:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0\\ 1 & 4-\lambda\end{vmatrix} = 0, \Rightarrow (4-\lambda)^2 = 0, \Rightarrow \lambda_1 = 4.$$

Отже, ми маємо одне власне значення $\lambda_1 = 4$ кратністю 2. Визначимо власний вектор $V_1 = (V_{11}, V_{21})^T$:

$$\begin{pmatrix} 4-4 & 0\\ 1 & 4-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}V_{11}\\ V_{21}\end{pmatrix} = 0, \Rightarrow \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}V_{11}\\ V_{21}\end{pmatrix} = 0, \Rightarrow 1.V_{11} + 0\cdot V_{21} = 0.$$

Звідси маємо, що координата $V_{11} = 0$, а координата V_{21} може бути довільною. Виберемо для простоти $V_{21} = 1$. Отже, власний вектор V_1 дорівнює: $V_1 = (0,1)^T$.

Другий лінійно незалежний вектор визначимо, як вектор $V_2 = (V_{12}, V_{22})^T$, приєднаний до V_1. Знаходиться з рівняння:

$$(A - \lambda_1 I)V_2 = V_1, \Rightarrow \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}V_{12}\\ V_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}, \Rightarrow \begin{cases}0\cdot V_{12} + 0\cdot V_{22} = 0,\\ 1\cdot V_{12} + 0\cdot V_{22} = 1.\end{cases}$$

Координата V_{22} може бути будь-яким числом. Виберемо $V_{22} = 0$. Тоді отримуємо $V_{11} = 1$. Таким чином долучений вектор дорівнює: $V_2 = (1{,}0)^T$.

Тепер зі знайдених базисних векторів складемо матрицю H – матрицю переходу від A до нормальної жорданової формі J:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо зворотню матрицю H^{-1}:

$$\Delta(H) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1, H^{-1} = \frac{1}{\Delta(H)} \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}^T.$$

Звідси H_{ij} позначають алгебраїчні доповнення до елементів матриці H. В результаті обчислень знаходимо:

$$H^{-1} = \frac{1}{(-1)} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^T = (-1) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Цікаво, що в даному прикладі зворотна матриця H^{-1} збігається з вихідною матрицею H. Такий ефект можливий, якщо квадрат вихідної матриці дорівнює одиничної матриці:

$$H^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1 & 0+0 \\ 0+0 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Жорданова форма J для матриці A має вид:

$$J = H^{-1}AH = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1 & 0+4 \\ 4+0 & 0+0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+4 & 1+0 \\ 0+0 & 4+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Як видно, жорданова форма J складається з однієї клітини розміром 2. Складаємо матрицю e^{tJ}:

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{4t} & te^{4t} \\ 0 & e^{4t} \end{pmatrix} = e^{4t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обчислюємо матричну експоненту e^{tA}:

$$e^{tA} = He^{tJ}H^{-1} = e^{4t}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= e^{4t}\begin{pmatrix} 0+0 & 0+1 \\ 1+0 & t+0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = e^{4t}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= e^{4t}\begin{pmatrix} 0+1 & 0+0 \\ 0+t & 1+0 \end{pmatrix} = e^{4t}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}.$$

Загальний розв'язок системи запишемо:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{4t}C = e^{4t}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix},$$

де C_1, C_2 – довільні константи.

2.3 Формула Лагранжа

Припустимо, що функція $f(x)$ неперервна в проміжку (a, b) і має всередині цього проміжку похідну, але умова $f(a) = f(b)$ теореми Ролля може бути не виконано. Складемо функцію [8]:

$$F(x) = f(x) + \lambda x, \tag{2.14}$$

де λ – постійна, яку ми визначимо так, щоб нова функція $F(x)$ задовольняла умові теореми Ролля [8], тобто вимагатимемо, щоб

$$F(a) = F(b) \tag{2.15}$$

або

$$f(a) + \lambda a = f(b) + \lambda b, \tag{2.16}$$

звідки

$$\lambda = -\frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{2.17}$$

Застосовуючи тепер до $F(x)$ (2.14) теорему Ролля, можемо стверджувати, що між a і b буде знаходитися таке значення $x = c$, при якому:

$$F'(c) = f'(c) + \lambda = 0 \quad (a < c < b), \tag{2.18}$$

звідки, підставляючи знайдене (2.17) значення λ:

$$f'(c) = -\lambda \text{ або } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{2.19}$$

Рівність (2.19) можна записати так

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c). \tag{2.20}$$

Рівність (2.20) називається формулою Лагранжа [10]. Значення c складається між a і b, а тому ставлення $\frac{c-a}{b-a} = \theta$ полягає між нулем і одиницею, і ми можемо написати:

$$c = a + \theta(b - a) \quad (0 < \theta < 1), \tag{2.21}$$

і формула (2.20) Лагранжа перепишеться у вигляді:

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'\big(a+\theta(b-a)\big) \quad (0<\theta<1). \tag{2.22}$$

Вважаючи $b=a+h,$ отримаємо ще такий вигляд формули:

$$f(a+h)-f(a)=hf'(a+\theta h). \tag{2.23}$$

Формула Лагранжа (2.20) дає точний вираз для зростання $f(b)-f(a)$ функції $f(x)$, а тому називається також формулою скінченого приросту [17].

Ми знаємо, що похідна постійної дорівнює нулю. З формули Лагранжа ми можемо вивести зворотне твердження: якщо похідна $f'(x)$ у всіх точках проміжку (a,b) дорівнює нулю, то функція $f(x)$ постійна в цьому проміжку.

Якщо, візьмемо довільне значення x з проміжку (a,b) і, застосовуючи формулу Лагранжа до проміжку (a,x), отримаємо:

$$f(x)-f(a)=(x-a)f'(\xi) \quad (a<\xi<x); \tag{2.24}$$

але за умовою $f'(\xi)=0$ і, отже,

$$f(x)-f(a)=0, \text{ тобто } f(x)=f(a)=\text{постійна}.$$

Щодо величини c, що входить в формулу Лагранжа, ми знаємо тільки те, що вона утворюється між a і $b,$ і тому формула Лагранжа не дає можливості точного обчислення приросту функції через похідну, але з її допомогою можна зробити оцінку тієї помилки, яку ми робимо, замінюючи приріст функції її диференціалом.

Приклад 1.9 Нехай

$$f(x) = \log_{10}x.$$

Похідна

$$f'(x) = \frac{1}{x}\frac{1}{\log 10} = \frac{M}{x} \quad (m = 0{,}43429\dots.),$$

і з формули Лагранжа отримаємо:

$$\log_{10}(a+h) = \log_{10}a + h\frac{M}{a+\theta h}.$$

Замінюючи приріст диференціалом, отримаємо наближену формулу:

$$\log_{10}(a+h) - \log_{10}a = h\frac{M}{a}, \;\; \log_{10}(a+h) = \log_{10}a + h\frac{M}{a}.$$

Порівнюючи наближену рівність з точним, отриманою за формулою Лагранжа (2.20), побачимо, що похибка

$$h\frac{M}{a} - h\frac{M}{a+\theta h} = \frac{\theta h^2 M}{a(a+\theta h)}.$$

Вважаючи $a = 100$ і $h = 1$, отримаємо наближену рівність:

$$\log_{10}101 = \log_{10}100 + \frac{M}{100} = 2{,}00434\dots$$

з похибкою:

$$\frac{\theta M}{100(100+\theta)} \quad (0 < \theta < 1).$$

Замінюючи в чисельнику цього дробу θ одиницею, а в знаменнику нулем, можемо сказати, що похибка обчисленого значення $\log_{10}101$ менше

$$\frac{M}{100^2} = 0{,}00004\ldots$$

Перепишемо формулу Лагранжа у вигляді:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c). \quad (a < c < b). \tag{2.25}$$

Звертаємо увагу на графік функції $y = f(x)$, на малюнку (рис. 2.1) і бачимо, що відношення:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = tg\measuredangle CAB \tag{2.26}$$

дає кутовий коефіцієнт хорди AB, а $f'(c)$ дає кутовий коефіцієнт дотичної в деякій точці M дуги AB кривої. Таким чином, формула Лагранжа (2.26) рівносильна наступному твердженню: на дузі кривої є така точка, яка дотична паралельній хорді. Окремим випадком цього твердження, коли хорда паралельна осі OX, тобто $f(a) = f(b)$, є теорема Ролля (2.15).

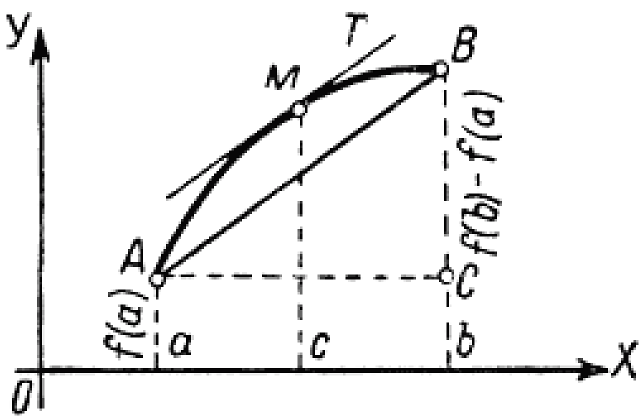

Рисунок 2.1

Зауваження. З формули Лагранжа (2.26) безпосередньо випливають ті ознаки зростання та спадання, які були встановлені нами з рис. 2.1. Дійсно, між іншим, що всередині певного проміжку перша похідна f'(x) позитивна і нехай x і $x + h$ – дві точки з цього проміжку. З формули Лагранжа, маємо

$$f(x+h) - f(x) = hf'(\mathrm{x} + \theta h) \quad (0 < \theta < 1) \tag{2.27}$$

видно, що при додатних h різниця, що стоїть ліворуч, буде величиною додатною, так як обидва множники у добутку, що стоїть праворуч, в цьому випадку додатні. Таким чином, припускаючи додатність похідної в деякому проміжку, ми отримали:

$$f(x+h) - f(x) > 0, \tag{2.28}$$

тобто функція зростає в цьому проміжку. Ознака зменшення може бути з формули (2.28).

Зауважимо, що міркування, наведені при доведенні теореми Ферма [8], залишаються цілком прийнятними і для того випадку, коли в даній точці функція досягає не обов'язково найбільшого або найменшого значення, а тільки лише максимуму або мінімуму.

3 ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ МАТРИЧНОЇ ЕКСПОНЕНТИ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЛІНІЙНИХ ФРЕДГОЛЬМОВИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

Розглянемо фредгольмову крайову задачу наступного вигляду:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} e^t \\ \sin t \\ \sin 2t \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix} x(0) - \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 5 & -4 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} x(\pi) = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad (3.1)$$

де $x(t)$ – невідомий вектор-стовпець, елементи якого є неперервно-диференційовані функції: $x(t) \in C^1[0;\pi]$, $x(t) = \mathrm{col}\big(x_1(t), x_2(t), x_3(t)\big)$.

Загальний розв’язання системи диференційних рівнянь складається з суми розв’язків однорідної системи та довільного частинного розв’язку неоднорідної системи та знаходиться за формулою (2.14):

$$x(t) = X(t)c_1 + \bar{x}(t), \qquad (3.2)$$

де $X(t)$ – нормальна фундаментальна матриця; $\bar{x}(t)$ – довільне частинне розв’язання неоднорідної системи.

Відомо, що нормальну фундаментальну матрицю $X(t)$ можна знайти методом матричної експоненти [15]: $X(t) = e^{At}$.

Знайдемо власні значення $|A - \lambda E| = 0$:

$$|A - \lambda E| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 7\lambda - 5 = 0,$$

де $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1 + 2i$, $\lambda_3 = 1 - 2i$ – власні значення кратності 1.

У випадку простих коренів характеристичного рівняння (при цьому немає значення, дійсні вони чи комплексні), матричну експоненту можна визначити, використовуючи формулу Лагранжа(2.20) [4]:

$$f(A)=\sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k)\frac{\omega(\lambda)}{(\lambda-\lambda_k)\omega'(\lambda_k)}\bigg|_{\lambda=A}, \qquad \omega(\lambda)=\prod_{j=1}^{n}\left(\lambda-\lambda_j\right). \tag{3.3}$$

Вважаючи, що $f(\lambda)=e^{\lambda x}=e^{Ax}$, за формулою (3.3), знаходимо:

$$W(x)=e^{Ax}=\sum_{k=1}^{n} e^{\lambda_k x}\frac{\omega(\lambda)}{(\lambda-\lambda_k)\omega'(\lambda_k)}\bigg|_{\lambda=A}, \qquad \omega(\lambda)=\prod_{j=1}^{n}\left(\lambda-\lambda_j\right).$$

$$\begin{aligned} e^{Ax}=\Bigg(& e^{1x}\frac{(\lambda-1)\big(\lambda-(1+2i)\big)\big(\lambda-(1-2i)\big)}{(\lambda-1)\omega'(\lambda_1)}+\\ &+e^{(1+2i)x}\frac{(\lambda-1)\big(\lambda-(1+2i)\big)\big(\lambda-(1-2i)\big)}{\big(\lambda-(1+2i)\big)\omega'(\lambda_2)}+\\ &+e^{(1-2i)x}\frac{(\lambda-1)\big(\lambda-(1+2i)\big)\big(\lambda-(1-2i)\big)}{\big(\lambda-(1-2i)\big)\omega'(\lambda_3)}\Bigg)\Bigg|_{\lambda=A}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\omega(\lambda_k)=\prod_{j=1}^{3}\left(\lambda_k-\lambda_j\right)=(\lambda_k-\lambda_1)(\lambda_k-\lambda_2)(\lambda_k-\lambda_3)=$$

$$=(\lambda_k-1)\big(\lambda_k-(1+2i)\big)\big(\lambda_k-(1-2i)\big)=\lambda_k^3-3\lambda_k^2+7\lambda_k-5$$

$$\omega'(\lambda_k)=(\lambda_k^3-3\lambda_k^2+7\lambda_k-5)'=3\lambda_k^2-6\lambda_k+7.$$

Знайдемо похідну $\omega'(\lambda_k)$ при трьох значеннях $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-1$, $\lambda_3=1$:

$$f(1)=3\cdot 1^2-6\cdot 1+7=4;$$

$$f(1+2i)=3(1+2i)^2-6(1+2i)+7=$$

$$=3(1^2+2\cdot 1\cdot 2i+4i^2)-6-12i+7=$$

$$=3+12i+12i^2-6-12i+7=-8;$$

$$f(1-2i) = 3(1-2i) - 6(1-2i) + 7 =$$
$$= 3(1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2i + 4i^2) - 6 + 12i + 7 =$$
$$= 3 - 12i + 12i^2 - 6 + 12i + 7 = -8.$$

Формула (3.4) перепишеться наступним чином:

$$e^{Ax} = \left(e^{\lambda_1 x} \frac{(\lambda-1)\big(\lambda-(1+2i)\big)\big(\lambda-(1-2i)\big)}{(\lambda-1)\omega'(\lambda_1)} + \right.$$
$$+ e^{\lambda_2 x} \frac{(\lambda-1)\big(\lambda-(1+2i)\big)\big(\lambda-(1-2i)\big)}{\big(\lambda-(1+2i)\big)\omega'(\lambda_2)} +$$
$$\left. + e^{\lambda_3 x} \frac{(\lambda-1)\big(\lambda-(1+2i)\big)\big(\lambda-(1-2i)\big)}{\big(\lambda-(1-2i)\big)\omega'(\lambda_3)} \right)\Bigg|_{\lambda=A}. \tag{3.5}$$

Враховуючи останні рівності (3.5), маємо:

$$e^{Ax} = \left(e^{x} \frac{(\lambda-1)\big(\lambda-(1+2i)\big)\big(\lambda-(1-2i)\big)}{(\lambda-1)(4)} + \right.$$
$$+ e^{(1+2i)x} \frac{(\lambda-1)\big(\lambda-(1+2i)\big)\big(\lambda-(1-2i)\big)}{\big(\lambda-(1+2i)\big)(-8)} +$$
$$\left. + e^{(1-2i)x} \frac{(\lambda-1)\big(\lambda-(1+2i)\big)\big(\lambda-(1-2i)\big)}{\big(\lambda-(1-2i)\big)(-8)} \right)\Bigg|_{\lambda=A}. \tag{3.6}$$

Після обчислень, маємо:

$$e^{Ax} = \left(e^{1\cdot x} \frac{\big(\lambda-(1+2i)\big)\big(\lambda-(1-2i)\big)}{4} + \right.$$
$$+ e^{(1+2i)\cdot x} \frac{(\lambda-1)\big(\lambda-(1-2i)\big)}{-8} +$$
$$\left. + e^{(1-2i)x} \frac{(\lambda-1)\big(\lambda-(1+2i)\big)}{-8} \right)\Bigg|_{\lambda=A}. \tag{3.7}$$

Знаходимо значення для $e^{(1-2i)x}$, $e^{(1+2i)x}$:

$$e^{(1-2i)x} = e^x \cos(2x) - ie^x \sin(2x);$$
$$e^{(1+2i)x} = e^x \cos(2x) + ie^x \sin(2x). \tag{3.8}$$

Підставляючи значення (3.8) у формулу (3.7):

$$e^{Ax} = \Bigg(e^x \frac{\big(\lambda-(1+2i)\big)\big(\lambda-(1-2i)\big)}{4} +$$
$$+e^x \cdot (\cos(2x) + i\sin(2x)) \cdot \frac{(\lambda+1)\big(\lambda-(1-2i)\big)}{-8} +$$
$$+e^x \cdot (\cos(2x) - i\sin(2x)) \cdot \frac{(\lambda-1)\big(\lambda-(1+2i)\big)}{-8}\Bigg)\Bigg|_{\lambda=A}. \tag{3.9}$$

Отримаємо результат:

$$e^{Ax} =$$
$$= -\frac{1}{4}e^x \left(\begin{matrix}-\lambda^2 + 2\lambda - 5 + \lambda^2\cos 2x - 2\lambda\cos 2x + \cos 2x - 2\lambda\sin 2x + \\ +2\sin 2x\end{matrix}\right)\Bigg|_{\lambda=A};$$
$$e^{Ax} = -\frac{1}{4}((\lambda-1)^2\cos(2x) + (-2\lambda+2)\sin(2x) - \lambda^2 + 2\lambda - 5)e^x;$$
$$e^{Ax} = \big(\lambda^2 f_1(x) + \lambda f_2(x) + f_3(x)\big)\big|_{\lambda=A},$$

де

$$f_1(x) = -\frac{1}{8}(2\cos(2x) - 2)e^x;$$
$$f_2(x) = -\frac{1}{4}(-2\cos(2x) - 2\sin(2x) + 2)e^x;$$

$$f_3(x) = -\frac{1}{4}(\cos(2x) + 2\sin(2x) - 5)e^x.$$

Отримаємо формулу:

$$e^{Ax} = \left(A^2 f_1(x) + A f_2(x) + E f_3(x)\right). \tag{3.10}$$

Задані матриці A, A^2, E розмірності 3×3 мають такі значення:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^2 = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 6 & -3 & -2 \end{pmatrix}; \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

За допомогою формули (3.10) виконуємо обчислення:

$$e^{Ax} = \begin{pmatrix} -3f_1 + f_2 + f_3 & -2f_1 - f_2 & -2f_1 - f_2 \\ 2f_1 + f_2 & f_2 + f_3 & -f_1 \\ 6f_1 + 3f_2 & -3f_1 & -2f_1 + f_2 + f_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix},$$

де

$$g_{11} = \frac{3}{8}e^x(-2 + 2\cos 2x) + \frac{1}{4}e^x(2 - 2\cos 2x - 2\sin 2x) -$$

$$-\frac{1}{4}e^x(-5 + \cos 2x + 2\sin 2x) = e^x \cos 2x;$$

$$g_{12} = \frac{1}{4}e^x(-2 + 2\cos 2x) + \frac{1}{4}e^x(2 - 2\cos 2x - 2\sin 2x) = -\frac{1}{2}e^x \sin 2x;$$

$$g_{13} = \frac{1}{4}e^x(-2 + 2\cos 2x) + \frac{1}{4}e^x(2 - 2\cos 2x - 2\sin 2x) = -\frac{1}{2}e^x \sin 2x;$$

$$g_{21} = -\frac{1}{4}e^x(-2 + 2\cos 2x) - \frac{1}{4}e^x(2 - 2\cos 2x - 2\sin 2x) = \frac{1}{2}e^x \sin 2x;$$

$$g_{22} = -\frac{1}{4}e^{x}(2 - 2\cos 2x - 2\sin 2x) - \frac{1}{4}e^{x}(-5 + \cos 2x + 2\sin 2x) =$$

$$= \frac{1}{4}e^{x}(3 + \cos 2\,x);$$

$$g_{23} = \frac{1}{8}e^{x}(-2 + 2\cos 2x) = \frac{1}{4}e^{x}(-1 + \cos 2\,x);$$

$$g_{31} = -\frac{3}{4}e^{x}(-2 + 2\cos 2x) - \frac{3}{4}e^{x}(2 - 2\cos 2x - 2\sin 2x) = \frac{3}{2}e^{x}\sin 2\,x;$$

$$g_{32} = \frac{3}{8}e^{x}(-2 + 2\cos 2x) = \frac{3}{4}e^{x}(-1 + \cos 2\,x);$$

$$g_{33} = \frac{1}{4}e^{x}(-2 + 2\cos 2x) - \frac{1}{4}e^{x}(2 - 2\cos 2x - 2\sin 2x) -$$

$$-\frac{1}{4}e^{x}(-5 + \cos 2x + 2\sin 2x) = \frac{1}{4}e^{x}(1 + 3\cos 2\,x).$$

Таким чином, матрична експонента для заданої матриці буде:

$$e^{Ax} = \begin{pmatrix} e^{x}\cos 2\,x & -\frac{1}{2}e^{x}\sin 2\,x & -\frac{1}{2}e^{x}\sin 2\,x \\ \frac{1}{2}e^{x}\sin 2\,x & \frac{1}{4}e^{x}(3 + \cos 2\,x) & \frac{1}{4}e^{x}(-1 + \cos 2\,x) \\ \frac{3}{2}e^{x}\sin 2\,x & \frac{3}{4}e^{x}(-1 + \cos 2\,x) & \frac{1}{4}e^{x}(1 + 3\cos 2\,x) \end{pmatrix}. \qquad (3.11)$$

Маємо одиничну матрицю для $X(0)$ та матрицю $X(\pi)$ з експонентами в степені π

$$X(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$X(\pi) = \begin{pmatrix} e^{\pi} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\pi} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\pi} \end{pmatrix}.$$

Позначимо через

$$Q = M - N \cdot X(b). \tag{3.12}$$

Матрицю розмірності (3×3) отриману підставленням в крайову умову нормальної фундаментальної матриці $X(t)$:

$$Q = \begin{pmatrix} -4-3e^{\pi} & 1+2e^{\pi} & -2-2e^{\pi} \\ 3-5e^{\pi} & -1+4e^{\pi} & 2+2e^{\pi} \\ 5-e^{\pi} & 1-e^{\pi} & -1+3e^{\pi} \end{pmatrix}. \tag{3.13}$$

Знайдемо обернену матрицю Q^{-} до матриці Q (3.13). Визначник матриці Q за методом трикутника дорівнює:

$$\varDelta = |Q| = \begin{vmatrix} -4-3e^{\pi} & 1+2e^{\pi} & -2-2e^{\pi} \\ 3-5e^{\pi} & -1+4e^{\pi} & 2+2e^{\pi} \\ 5-e^{\pi} & 1-e^{\pi} & -1+3e^{\pi} \end{vmatrix} = (-4-3e^{\pi}) \cdot (-1+4e^{\pi}) \times$$

$$\times (-1+3e^{\pi}) + (1+2e^{\pi}) \cdot (2+2e^{\pi}) \cdot (5-e^{\pi}) + (-2-2e^{\pi}) \cdot (3-5e^{\pi}) \times$$

$$\times (1-e^{\pi}) - (-2-2e^{\pi}) \cdot (-1+4e^{\pi}) \cdot (5-e^{\pi}) - (-4-3e^{\pi}) \cdot (2+$$

$$+2e^{\pi}) \cdot (1-e^{\pi}) - (1+2e^{\pi}) \cdot (3-5e^{\pi}) \cdot (-1+3e^{\pi}) = -34(e^{\pi})^3 + 6(e^{\pi})^2 +$$

$$+93e^{\pi} + 1.$$

Отримаємо

$$Q^{-} = \begin{pmatrix} -4-3e^{\pi} & 1+2e^{\pi} & -2-2e^{\pi} \\ 3-5e^{\pi} & -1+4e^{\pi} & 2+2e^{\pi} \\ 5-e^{\pi} & 1-e^{\pi} & -1+3e^{\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \tag{3.14}$$

де

$$a_{11} = -\frac{14(e^{\pi})^2 - 7e^{\pi} - 1}{34(e^{\pi})^3 - 6(e^{\pi})^2 - 93e^{\pi} - 1};$$

$$a_{12} = \frac{4(e^{\pi})^2 + e^{\pi} + 1}{34(e^{\pi})^3 - 6(e^{\pi})^2 - 93e^{\pi} - 1};$$

$$a_{13} = -\frac{12e^{\pi}(e^{\pi} + 1)}{34(e^{\pi})^3 - 6(e^{\pi})^2 - 93e^{\pi} - 1};$$

$$a_{21} = -\frac{13(e^{\pi})^2 - 6e^{\pi} + 13}{34(e^{\pi})^3 - 6(e^{\pi})^2 - 93e^{\pi} - 1};$$

$$a_{22} = \frac{11(e^{\pi})^2 + e^{\pi} - 14}{34(e^{\pi})^3 - 6(e^{\pi})^2 - 93e^{\pi} - 1};$$

$$a_{23} = -\frac{2(8(e^{\pi})^2 + 9e^{\pi} + 1)}{34(e^{\pi})^3 - 6(e^{\pi})^2 - 93e^{\pi} - 1};$$

$$a_{31} = -\frac{9(e^{\pi})^2 - 29e^{\pi} + 8}{34(e^{\pi})^3 - 6(e^{\pi})^2 - 93e^{\pi} - 1};$$

$$a_{32} = \frac{5(e^{\pi})^2 - 8e^{\pi} - 9}{34(e^{\pi})^3 - 6(e^{\pi})^2 - 93e^{\pi} - 1};$$

$$a_{33} = \frac{2(e^{\pi})^2 + 14e^{\pi} - 1}{34(e^{\pi})^3 - 6(e^{\pi})^2 - 93e^{\pi} - 1}.$$

Знайдемо ортопроектори $P_{N(Q)}$ і $P_{N(Q^*)}$ за формулами:

$$P_{N(Q^*)} = I_3 - QQ^-, \tag{3.15}$$

$$P_{N(Q)} = I_3 - Q^-Q, \tag{3.16}$$

де I_3 одинична матриця.

Знаходимо матрицю $P_{N(Q)}$ (3.16):

$$P_{N(Q)} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix},$$

де

$$b_{11} = 1 + \frac{(14(e^{\pi})^2 - 7e^{\pi} - 1)(-4 - 3e^{\pi})}{34(e^{\pi})^3 - 6(e^{\pi})^2 - 93e^{\pi} - 1} - \frac{(4(e^{\pi})^2 + e^{\pi} + 1)(3 - 5e^{\pi})}{34(e^{\pi})^3 - 6(e^{\pi})^2 - 93e^{\pi} - 1} +$$
$$+ \frac{12e^{\pi}(e^{\pi} + 1)(5 - e^{\pi})}{34(e^{\pi})^3 - 6(e^{\pi})^2 - 93e^{\pi} - 1};$$

$$b_{12} = \frac{(14(e^{\pi})^2 - 7e^{\pi} - 1)(1 + 2e^{\pi})}{34(e^{\pi})^3 - 6(e^{\pi})^2 - 93e^{\pi} - 1} - \frac{(4(e^{\pi})^2 + e^{\pi} + 1)(-1 + 4e^{\pi})}{34(e^{\pi})^3 - 6(e^{\pi})^2 - 93e^{\pi} - 1} +$$

$$+ \frac{12e^{\pi}(e^{\pi} + 1)(1 - e^{\pi})}{34(e^{\pi})^3 - 6(e^{\pi})^2 - 93e^{\pi} - 1};$$

$$b_{13} = \frac{(14(e^{\pi})^2 - 7e^{\pi} - 1)(-2 - 2e^{\pi})}{34(e^{\pi})^3 - 6(e^{\pi})^2 - 93e^{\pi} - 1} - \frac{(4(e^{\pi})^2 + e^{\pi} + 1)(2 + 2e^{\pi})}{34(e^{\pi})^3 - 6(e^{\pi})^2 - 93e^{\pi} - 1} +$$

$$+ \frac{12e^{\pi}(e^{\pi} + 1)(-1 + 3e^{\pi})}{34(e^{\pi})^3 - 6(e^{\pi})^2 - 93e^{\pi} - 1};$$

$$b_{21} = \frac{(13(e^{\pi})^2 - 6e^{\pi} + 13)(-4 - 3e^{\pi})}{34(e^{\pi})^3 - 6(e^{\pi})^2 - 93e^{\pi} - 1} - \frac{(11(e^{\pi})^2 + e^{\pi} - 14)(3 - 5e^{\pi})}{34(e^{\pi})^3 - 6(e^{\pi})^2 - 93e^{\pi} - 1} +$$

$$+ \frac{2(8(e^{\pi})^2 + 9e^{\pi} + 1)(5 - e^{\pi})}{34(e^{\pi})^3 - 6(e^{\pi})^2 - 93e^{\pi} - 1};$$

$$b_{22} = 1 + \frac{(13(e^{\pi})^2 - 6e^{\pi} + 13)(1 + 2e^{\pi})}{34(e^{\pi})^3 - 6(e^{\pi})^2 - 93e^{\pi} - 1} - \frac{(11(e^{\pi})^2 + e^{\pi} - 14)(-1 + 4e^{\pi})}{34(e^{\pi})^3 - 6(e^{\pi})^2 - 93e^{\pi} - 1} +$$

$$+ \frac{2(8(e^{\pi})^2 + 9e^{\pi} + 1)(1 - e^{\pi})}{34(e^{\pi})^3 - 6(e^{\pi})^2 - 93e^{\pi} - 1};$$

$$b_{23} = \frac{(13(e^{\pi})^2 - 6e^{\pi} + 13)(-2 - 2e^{\pi})}{34(e^{\pi})^3 - 6(e^{\pi})^2 - 93e^{\pi} - 1} - \frac{(11(e^{\pi})^2 + e^{\pi} - 14)(2 + 2e^{\pi})}{34(e^{\pi})^3 - 6(e^{\pi})^2 - 93e^{\pi} - 1} +$$

$$+ \frac{2(8(e^{\pi})^2 + 9e^{\pi} + 1)(-1 + 3e^{\pi})}{34(e^{\pi})^3 - 6(e^{\pi})^2 - 93e^{\pi} - 1};$$

$$b_{31} = \frac{(9(e^{\pi})^2 - 29e^{\pi} + 8)(-4 - 3e^{\pi})}{34(e^{\pi})^3 - 6(e^{\pi})^2 - 93e^{\pi} - 1} - \frac{(5(e^{\pi})^2 - 8e^{\pi} - 9)(3 - 5e^{\pi})}{34(e^{\pi})^3 - 6(e^{\pi})^2 - 93e^{\pi} - 1} -$$

$$- \frac{(2(e^{\pi})^2 + 14e^{\pi} - 1)(5 - e^{\pi})}{34(e^{\pi})^3 - 6(e^{\pi})^2 - 93e^{\pi} - 1};$$

$$b_{32} = \frac{(9(e^{\pi})^2 - 29e^{\pi} + 8)(1 + 2e^{\pi})}{34(e^{\pi})^3 - 6(e^{\pi})^2 - 93e^{\pi} - 1} - \frac{(5(e^{\pi})^2 - 8e^{\pi} - 9)(-1 + 4e^{\pi})}{34(e^{\pi})^3 - 6(e^{\pi})^2 - 93e^{\pi} - 1} -$$

$$- \frac{(2(e^{\pi})^2 + 14e^{\pi} - 1)(1 - e^{\pi})}{34(e^{\pi})^3 - 6(e^{\pi})^2 - 93e^{\pi} - 1};$$

$$b_{33} = 1 + \frac{(9(e^{\pi})^2 - 29e^{\pi} + 8)(-2 - 2e^{\pi})}{34(e^{\pi})^3 - 6(e^{\pi})^2 - 93e^{\pi} - 1} - \frac{(5(e^{\pi})^2 - 8e^{\pi} - 9)(2 + 2e^{\pi})}{34(e^{\pi})^3 - 6(e^{\pi})^2 - 93e^{\pi} - 1} -$$

$$- \frac{(2(e^{\pi})^2 + 14e^{\pi} - 1)(-1 + 3e^{\pi})}{34(e^{\pi})^3 - 6(e^{\pi})^2 - 93e^{\pi} - 1}.$$

Аналогічно знаходимо матрицю $P_{N(Q^*)}$ (3.15):

$$P_{N(Q^*)} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix},$$

де

$$c_{11} = 1 + \frac{(14(e^\pi)^2 - 7e^\pi - 1)(-4 - 3e^\pi)}{34(e^\pi)^3 - 6(e^\pi)^2 - 93e^\pi - 1} + \frac{(13(e^\pi)^2 - 6e^\pi + 13)(1 + 2e^\pi)}{34(e^\pi)^3 - 6(e^\pi)^2 - 93e^\pi - 1} + $$
$$+ \frac{(9(e^\pi)^2 - 29e^\pi + 8)(-2 - 2e^\pi)}{34(e^\pi)^3 - 6(e^\pi)^2 - 93e^\pi - 1};$$

$$c_{12} = \frac{(4(e^\pi)^2 + e^\pi + 1)(-4 - 3e^\pi)}{34(e^\pi)^3 - 6(e^\pi)^2 - 93e^\pi - 1} - \frac{(11(e^\pi)^2 + e^\pi - 14)(1 + 2e^\pi)}{34(e^\pi)^3 - 6(e^\pi)^2 - 93e^\pi - 1} -$$
$$- \frac{(5(e^\pi)^2 - 8e^\pi - 9)(-2 - 2e^\pi)}{34(e^\pi)^3 - 6(e^\pi)^2 - 93e^\pi - 1};$$

$$c_{13} = \frac{12(-4 - 3e^\pi)e^\pi(e^\pi + 1)}{34(e^\pi)^3 - 6(e^\pi)^2 - 93e^\pi - 1} + \frac{2(1 + 2e^\pi)(8(e^\pi)^2 + 9e^\pi + 1)}{34(e^\pi)^3 - 6(e^\pi)^2 - 93e^\pi - 1} -$$
$$- \frac{(-2 - 2e^\pi)(2(e^\pi)^2 + 14e^\pi - 1)}{34(e^\pi)^3 - 6(e^\pi)^2 - 93e^\pi - 1};$$

$$c_{21} = \frac{(3 - 5e^\pi)(14(e^\pi)^2 - 7e^\pi - 1)}{34(e^\pi)^3 - 6(e^\pi)^2 - 93e^\pi - 1} + \frac{(-1 + 4e^\pi)(13(e^\pi)^2 - 6e^\pi + 13)}{34(e^\pi)^3 - 6(e^\pi)^2 - 93e^\pi - 1} +$$
$$+ \frac{(2 + 2e^\pi)(9(e^\pi)^2 - 29e^\pi + 8)}{34(e^\pi)^3 - 6(e^\pi)^2 - 93e^\pi - 1};$$

$$c_{22} = 1 - \frac{(4(e^\pi)^2 + e^\pi + 1)(3 - 5e^\pi)}{34(e^\pi)^3 - 6(e^\pi)^2 - 93e^\pi - 1} - \frac{(11(e^\pi)^2 + e^\pi - 14)(-1 + 4e^\pi)}{34(e^\pi)^3 - 6(e^\pi)^2 - 93e^\pi - 1} -$$
$$- \frac{(5(e^\pi)^2 - 8e^\pi - 9)(2 + 2e^\pi)}{34(e^\pi)^3 - 6(e^\pi)^2 - 93e^\pi - 1};$$

$$c_{23} = \frac{12(3 - 5e^\pi)e^\pi(e^\pi + 1)}{34(e^\pi)^3 - 6(e^\pi)^2 - 93e^\pi - 1} + \frac{2(-1 + 4e^\pi)(8(e^\pi)^2 + 9e^\pi + 1)}{34(e^\pi)^3 - 6(e^\pi)^2 - 93e^\pi - 1} -$$
$$- \frac{(2 + 2e^\pi)(2(e^\pi)^2 + 14e^\pi - 1)}{34(e^\pi)^3 - 6(e^\pi)^2 - 93e^\pi - 1};$$

$$c_{31} = \frac{(5-e^{\pi})(14(e^{\pi})^2 - 7e^{\pi} - 1)}{34(e^{\pi})^3 - 6(e^{\pi})^2 - 93e^{\pi} - 1} + \frac{(1-e^{\pi})(13(e^{\pi})^2 - 6e^{\pi} + 13)}{34(e^{\pi})^3 - 6(e^{\pi})^2 - 93e^{\pi} - 1} +$$
$$+ \frac{(-1+3e^{\pi})(9(e^{\pi})^2 - 29e^{\pi} + 8)}{34(e^{\pi})^3 - 6(e^{\pi})^2 - 93e^{\pi} - 1};$$
$$c_{32} = \frac{(5-e^{\pi})(4(e^{\pi})^2 + e^{\pi} + 1)}{34(e^{\pi})^3 - 6(e^{\pi})^2 - 93e^{\pi} - 1} - \frac{(1-e^{\pi})(11(e^{\pi})^2 + e^{\pi} - 14)}{34(e^{\pi})^3 - 6(e^{\pi})^2 - 93e^{\pi} - 1} -$$
$$- \frac{(-1+3e^{\pi})(5(e^{\pi})^2 - 8e^{\pi} - 9)}{34(e^{\pi})^3 - 6(e^{\pi})^2 - 93e^{\pi} - 1};$$
$$c_{33} = 1 + \frac{12e^{\pi}(e^{\pi}+1)(5-e^{\pi})}{34(e^{\pi})^3 - 6(e^{\pi})^2 - 93e^{\pi} - 1} + \frac{2(8(e^{\pi})^2 + 9e^{\pi} + 1)(1-e^{\pi})}{34(e^{\pi})^3 - 6(e^{\pi})^2 - 93e^{\pi} - 1} -$$
$$- \frac{(2(e^{\pi})^2 + 14e^{\pi} - 1)(-1+3e^{\pi})}{34(e^{\pi})^3 - 6(e^{\pi})^2 - 93e^{\pi} - 1}.$$

Після спрощення, маємо:

$$P_{N(Q^*)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$P_{N(Q)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Загальний розв’язок системи диференційних рівнянь складається з суми розв’язків однорідної системи та довільного частинного розв’язку неоднорідної системи (3.1)

$$x(t) = X(t)c_1 + \bar{x}(t),$$

де $\bar{x}(t)$ – довільний частинний розв’язок неоднорідної системи (3.1)

$$\bar{x}(t) = \int_0^t X(t,\tau) f(\tau) d\tau,$$

де

$$X(t,\tau) = X(t)X^{-1}(\tau).$$

Тоді

$$x(t) = X(t)c_1 + X(t)\int_0^t X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau.$$

Отримуємо результат матриці:

$$X(t,\tau) = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix},$$

$$d_{11} = \frac{e^t \cos(2t)\cos(2\tau)}{e^\tau(\cos(2\tau)^2 + \sin(2\tau)^2)} + \frac{e^t \sin(2t)\sin(2\tau)}{e^\tau(\cos(2\tau)^2 + \sin(2\tau)^2)};$$

$$d_{12} = \frac{1}{2}\frac{e^t \cos(2t)\sin(2\tau)}{e^\tau(\cos(2\tau)^2 + \sin(2\tau)^2)} -$$

$$-\frac{1}{8}\frac{e^t \sin(2t)(3\cos(2\tau)^2 + 3\sin(2\tau)^2 + \cos(2\tau))}{e^\tau(\cos(2\tau)^2 + \sin(2\tau)^2)} +$$

$$+\frac{3}{8}\frac{e^t \sin(2t)(\cos(2\tau)^2 + \sin(2\tau)^2 - \cos(2\tau))}{e^\tau(\cos(2\tau)^2 + \sin(2\tau)^2)};$$

$$d_{13} = \frac{1}{2}\frac{e^t \cos(2t)\sin(2\tau))}{e^\tau(\cos(2\tau)^2 + \sin(2\tau)^2)} +$$

$$+\frac{1}{8}\frac{e^t \sin(2t)(\cos(2\tau)^2 + \sin(2\tau)^2 - \cos(2\tau))}{e^\tau(\cos(2\tau)^2 + \sin(2\tau)^2)} -$$

$$-\frac{1}{8}\frac{e^t \sin(2t)(\cos(2\tau)^2 + \sin(2\tau)^2 + 3\cos(2\tau))}{e^\tau(\cos(2\tau)^2 + \sin(2\tau)^2)};$$

$$d_{21} = \frac{1}{2}\frac{e^t \sin(2t)\cos(2\tau)}{e^\tau(\cos(2\tau)^2 + \sin(2\tau)^2)} - \frac{1}{2}\frac{(\frac{3}{4}e^t + \frac{1}{4}e^t\cos(2t))\sin(2\tau)}{e^\tau(\cos(2\tau)^2 + \sin(2\tau)^2)} -$$

$$-\frac{3}{2}\frac{(\frac{1}{4}e^t\cos(2t)-\frac{1}{4}e^t)\sin(2\tau)}{e^\tau(\cos(2\tau)^2+\sin(2\tau)^2)};$$

$$d_{22}=\frac{1}{4}\frac{e^t\sin(2t)\cos(2\tau)}{e^\tau(\cos(2\tau)^2+\sin(2\tau)^2)}+$$

$$+\frac{1}{4}\frac{(\frac{3}{4}e^t+\frac{1}{4}e^t\cos(2t))\,(3\cos(2\tau)^2+3\sin(2\tau)^2+\cos(2\tau))}{e^\tau(\cos(2\tau)^2+\sin(2\tau)^2)}-$$

$$-\frac{3}{4}\frac{(\frac{1}{4}e^t\cos(2t)-\frac{1}{4}e^t)(\cos(2\tau)^2+\sin(2\tau)^2-\cos(2\tau))}{e^\tau(\cos(2\tau)^2+\sin(2\tau)^2)};$$

$$d_{23}=\frac{1}{4}\frac{e^t\sin(2t)\sin(2\tau)}{e^\tau(\cos(2\tau)^2+\sin(2\tau)^2)}-$$

$$-\frac{1}{4}\frac{(\frac{3}{4}e^t+\frac{1}{4}e^t\cos(2t))\,(\cos(2\tau)^2+\sin(2\tau)^2-\cos(2\tau))}{e^\tau(\cos(2\tau)^2+\sin(2\tau)^2)}+$$

$$+\frac{1}{4}\frac{(\frac{1}{4}e^t\cos(2t)-\frac{1}{4}e^t)(\cos(2\tau)^2+\sin(2\tau)^2+3\cos(2\tau))}{e^\tau(\cos(2\tau)^2+\sin(2\tau)^2)};$$

$$d_{31}=\frac{3}{2}\frac{e^t\sin(2t)\cos(2\tau)}{e^\tau(\cos(2\tau)^2+\sin(2\tau)^2)}-\frac{1}{2}\frac{(\frac{3}{4}e^t\cos(2\mathrm{t})-\frac{3}{4}e^t)\sin(2\tau))}{e^\tau(\cos(2\tau)^2+\sin(2\tau)^2)}-$$

$$-\frac{3}{2}\frac{(\frac{1}{4}e^t+\frac{3}{4}e^t\cos(2t))\sin(2\tau)}{e^\tau(\cos(2\tau)^2+\sin(2\tau)^2)};$$

$$d_{32}=\frac{3}{4}\frac{e^t\sin(2t)\sin(2\tau)}{e^\tau(\cos(2\tau)^2+\sin(2\tau)^2)}+$$

$$+\frac{1}{4}\frac{(\frac{3}{4}e^t\cos(2\mathrm{t})-\frac{3}{4}e^t)\,(3\cos(2\tau)^2+3\sin(2\tau)^2+\cos(2\tau))}{e^\tau(\cos(2\tau)^2+\sin(2\tau)^2)}-$$

$$-\frac{3}{4}\frac{(\frac{1}{4}e^t+\frac{3}{4}e^t\cos(2t))\,(\cos(2\tau)^2+\sin(2\tau)^2-\cos(2\tau))}{e^\tau(\cos(2\tau)^2+\sin(2\tau)^2)};$$

$$d_{33}=\frac{3}{4}\frac{e^t\sin(2t)\sin(2\tau)}{e^\tau(\cos(2\tau)^2+\sin(2\tau)^2)}-$$

$$-\frac{1}{4}\frac{(\frac{3}{4}e^t\cos(2\mathrm{t})-\frac{3}{4}e^t)\,(\cos(2\tau)^2+\sin(2\tau)^2-\cos(2\tau))}{e^\tau(\cos(2\tau)^2+\sin(2\tau)^2)}+$$

$$+\frac{1}{4}\frac{(\frac{1}{4}e^{t}+\frac{3}{4}e^{t}\cos(2t))\,(\cos(2\tau)^{2}+\sin(2\tau)^{2}+3\cos(2\tau))}{e^{\tau}(\cos(2\tau)^{2}+\sin(2\tau)^{2})}.$$

Знаходимо $X(t,\tau) \to t = b$:

$$X(t,\tau) \to t = b =$$

$$=\begin{pmatrix} e^{\pi-\tau}\cos(2\tau) & \frac{1}{2}e^{\pi-\tau}\sin(2\tau) & \frac{1}{2}e^{\pi-\tau}\sin(2\tau) \\ -\frac{1}{2}e^{\pi-\tau}\sin(2\tau) & \frac{1}{4}e^{\pi-\tau}(3+\cos(2\tau)) & \frac{1}{4}(-1+\cos(2\tau))e^{\pi-\tau} \\ -\frac{3}{2}e^{\pi-\tau}\sin(2\tau) & \frac{3}{4}(-1+\cos(2\tau))e^{\pi-\tau} & \frac{1}{4}\,e^{\pi-\tau}(1+3\cos(2\tau)) \end{pmatrix},$$

Знайдемо оператор Гріна за формулою:

$$x(t,c) = X(t)\left(Q^{-}\left[\alpha - \ell\int_{0}^{\cdot} X(\cdot,\tau)f(\tau)d\tau\right] + P_{N(Q)}c\right) +$$

$$+X(t)\int_{0}^{t} X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau =$$

$$= X(t)\left(Q^{-}\left[\alpha + N\int_{0}^{T} X(T,\tau)f(\tau)d\tau\right] + P_{N(Q)}c\right) + X(t)\int_{0}^{t} X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau =$$

$$= X(t)Q^{-}\alpha + X(t)Q^{-}N\int_{0}^{T} X(T,\tau)f(\tau)d\tau + X(t)P_{N(Q)}c +$$

$$+X(t)\int_{0}^{t} X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau =$$

$$= X(t)P_{N(Q)}c + X(t)Q^{-}\alpha + (G[f])(t),$$

де через $(G[f])(t)$ позначено узагальнений оператор Гріна крайової задачі, який діє на вектор-функцію $f(t)$ із $C[0;T]$ наступним чином:

$$(G[f])(t) = X(t)\int_{0}^{t} X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau + X(t)Q^{-}N\int_{0}^{T} X(T,\tau)f(\tau)d\tau,$$

або у загальному випадку:

$$(G[f])(t) = X(t)\int_0^t X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau - X(t)Q^{-}\ell\int_0^{\cdot} X(\cdot,\tau)f(\tau)d\tau.$$

$G01 = X(t,\tau)f(\tau)$ – матриця виду $\begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{21} \\ g_{31} \end{pmatrix}$, де

$$g_{11} = (-\frac{1}{2}\cos(2t)\cos(2\tau)^2 +$$

$$+\left(\cos(2t)\,e^{\tau} - \frac{1}{2}\sin(2t)\,(\sin(\tau) + \sin(2\tau))\right)\cos(2\tau) +$$

$$+\sin(2t)\,e^{\tau}\sin(2\tau) + \frac{1}{2}\sin(\tau)\cos(2t)\sin(2\tau) + \frac{1}{2}\cos(2t))e^{t-\tau};$$

$$g_{21} = \frac{1}{4}(-\sin(2t)\cos(2\tau)^2 +$$

$$+(2\sin(2t)\,e^{\tau} + \sin(\tau)\cos(2t) + \cos(2t)\sin(2\tau))\cos(2\tau) +$$

$$+(-2\cos(2t)\,e^{\tau} + \sin(\tau)\sin(2t) - 1)\sin(2\tau) + 3\sin(\tau) + \sin(2t))e^{t-\tau};$$

$$g_{31} = \frac{1}{4}(3 - \sin(2t)\cos(2\tau)^2 +$$

$$+(6\sin(2t)\,e^{\tau} + 3\sin(\tau)\cos(2t) + 3\cos(2t)\sin(2\tau))\cos(2\tau) +$$

$$+(-6\cos(2t)\,e^{\tau} + 3\sin(\tau)\sin(2t) + 1)\sin(2\tau) - 3\sin(\tau) + 3\sin(2t))e^{t-\tau}.$$

$$g01_{11} = G01(1,1);$$

$$g01_{21} = G01(2,1);$$

$$g01_{31} = G01(3,1).$$

$$g01_{11} = (-\frac{1}{2}\cos(2t)\cos(2\tau)^2 +$$

$$+\left(\cos(2t)\,e^{\tau} - \frac{1}{2}\sin(2t)\,(\sin(\tau) + \sin(2\tau))\right)\cos(2\tau) +$$

$$+\sin(2t)\,e^{\tau}\sin(2\tau) + \frac{1}{2}\sin(\tau)\cos(2t)\sin(2\tau) + \frac{1}{2}\cos(2t))e^{t-\tau};$$

$$g01_{21} = \frac{1}{4}(-\sin(2t)\cos(2\tau)^2 +$$

$$+(2\sin(2t)\,e^{\tau} + \sin(\tau)\cos(2t) + \cos(2t)\sin(2\tau))\cos(2\tau) +$$

$$+(-2\cos(2t)\,e^{\tau}+\sin(\tau)\sin(2t)-1)\sin(2\tau)+3\sin(\tau)+\sin(2t))e^{t-\tau};$$

$$g01_{31}=\frac{1}{4}(3-\sin(2t)\cos(2\tau)^2+$$

$$+(6\sin(2t)\,e^{\tau}+3\sin(\tau)\cos(2t)+3\cos(2t)\sin(2\tau))\cos(2\tau)+$$

$$+(-6\cos(2t)\,e^{\tau}+3\sin(\tau)\sin(2t)+1)\sin(2\tau)-3\sin(\tau)+3\sin(2t))e^{t-\tau}.$$

Матриця виду $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$ отримаємо за формулою:

$$G1=\int_0^t g01_{11}\,d\tau,\int_0^t g01_{21}\,d\tau,\int_0^t g01_{31}\,d\tau$$

$$a_{11}=\frac{57}{85}\cos(t)^2\,e^t+\frac{167}{170}\cos(t)\,e^t\,\sin(t)-\frac{57}{170}e^t+\frac{4}{17}\cos(t)^6+\frac{1}{5}\cos(t)^5-$$

$$-\frac{6}{17}\cos(t)^4-\frac{1}{2}\cos(t)^3-\frac{2}{17}\sin(t)^2\cos(t)^2+\frac{1}{5}\sin(t)^2\cos(t)^3-$$

$$-\frac{3}{10}\sin(t)^2\cos(t)-\frac{6}{17}\cos(t)^2+\frac{1}{5}\cos(t)-\frac{1}{5}\sin(t)+\frac{4}{17};$$

$$a_{21}=-\frac{167}{340}\cos(t)^2\,e^t+\frac{57}{170}\cos(t)\,e^t\sin(t)+\frac{131}{170}e^t-\frac{6}{85}-\frac{3}{10}\cos(t)^5-$$

$$-\frac{8}{17}\cos(t)^6+\frac{12}{17}\cos(t)^4+\frac{1}{2}\cos(t)^3-\frac{8}{17}\sin(t)^2\cos(t)^4+$$

$$+\frac{4}{17}\sin(t)^2\cos(t)^2-\frac{3}{10}\sin(t)^2\cos(t)^3+\frac{1}{5}\sin(t)^2-\frac{11}{20}\cos(t)-$$

$$-\frac{8}{85}\cos(t)^2-\frac{14}{85}\sin(t)\cos(t)-\frac{9}{20}\sin(t);$$

$$a_{31}=-\frac{501}{340}\cos(t)^2\,e^t+\frac{171}{170}\cos(t)\,e^t\sin(t)+\frac{103}{85}e^t+\frac{16}{85}-\frac{9}{10}\cos(t)^5-$$

$$-\frac{24}{17}\cos(t)^6+\frac{36}{17}\cos(t)^4+\frac{3}{2}\cos(t)^3-\frac{24}{17}\sin(t)^2\cos(t)^4+$$

$$+\frac{12}{17}\sin(t)^2\cos(t)^2-\frac{9}{10}\sin(t)^2\cos(t)^3+\frac{3}{5}\sin(t)^2\cos(t)-\frac{3}{20}\cos(t)-$$

$$-\frac{92}{85}\cos(t)^2-\frac{76}{85}\sin(t)\cos(t)+\frac{3}{20}\sin(t).$$

За формулою $G02 = X(t,\tau)f(\tau)$ отримаємо матрицю виду $\begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{21} \\ g_{31} \end{pmatrix}$, де

$$g_{11} = \frac{1}{2}e^{\pi-\tau}(\sin(2\tau)\sin(\tau) + 2e^{\tau}\cos(2\tau) + 1 - \cos(2\tau)^2;$$

$$g_{21} = -\frac{1}{2}((e^{\tau} - \frac{1}{2}\cos(2\tau) + \frac{1}{2})\sin(2\tau) - \frac{1}{2}\sin(\tau)(3 + \cos(2\tau)))e^{\pi-\tau});$$

$$g_{31} = -\frac{3}{2}((e^{\tau} - \frac{1}{2}\cos(2\tau) - \frac{1}{6})\sin(2\tau) - \frac{1}{2}\sin(\tau)(-1 + \cos(2\tau)))e^{\pi-\tau}).$$

За формулою $G2 = \int_0^b g02_{11}d\tau, \int_0^b g02_{21}\,d\tau, \int_0^b g02_{31}\,d\tau$, маємо матрицю:

$$G2 = \begin{pmatrix} \frac{57}{170}e^{\pi} - \frac{23}{170} \\ \frac{19}{68}e^{\pi} + \frac{143}{340} \\ -\frac{89}{340}e^{\pi} - \frac{217}{340} \end{pmatrix}.$$

За формулою $G3 = X(t)Q^{-}N * G2$ обчислюємо

$$G3 = \left(15008e^{t} \left(\begin{array}{c} \left(e^{\pi} + \frac{283}{1072}e^{2\pi} + \frac{969}{3752}e^{3\pi} + \frac{613}{7504}\right)\cos(2t) - \\ -\frac{2487}{1876}\sin(2t)\left(e^{\pi} + \frac{479}{6632}e^{2\pi} + \frac{17}{3316}e^{3\pi} - \frac{12119}{19896}\right) \end{array} \right) \right) /$$

$$/(-11560e^{3\pi} + 2040e^{2\pi} + 31620e^{\pi} + 340);$$

$$G3 = (e^{t}(19896e^{\pi} + 1437e^{2\pi} + 102e^{3\pi} - 12119)\cos(2t) +$$

$$+ e^{t}(15008e^{\pi} + 3962e^{2\pi} + 3876e^{3\pi} + 1226)\sin(2t) +$$

$$+ e^{t}(29596e^{\pi} + 24999e^{2\pi} + 6358e^{3\pi} - 17501))/(-23120e^{3\pi} + 4080e^{2\pi} +$$

$$+ 63240e^{\pi} + 680);$$

$$G3 = (e^{t}(59688e^{\pi} + 4311e^{2\pi} + 306e^{3\pi} - 36357)\cos(2t) +$$

$$+ e^{t}(45024e^{\pi} + 11886e^{2\pi} + 11628e^{3\pi} + 3678)\sin(2t) +$$

$$+e^{t}(-29593e^{\pi}-24999e^{2\pi}-6358e^{3\pi}+17501))/$$
$$/(-23120e^{3\pi}+4080e^{2\pi}+63240+680);$$

Обчислюємо суму

$$G=G1+G3$$

$$G=((-1368\cos(t)^2-2004\sin(t)\cos(t)-3962\cos(2t)+{+1437}\sin(2t)+$$
$$+684)e^{t+2\pi}+(7752\cos(t)^2+11356\sin(t)\cos(t)-{-3876}\cos(2t)+$$
$$+102\sin(2t)-3876)e^{t+3\pi}+(960\cos(t)^2+(240\sin(t)+{+204})\cos(t)+$$
$$+408\sin(t)-480)e^{2\pi}+(-5440\cos(t)^2+(-1360\sin(t)-{-1156})\cos(t)-$$
$$-2312\sin(t)+2720)e^{3\pi}+(-21204\cos(t)^2-31062\sin(t)\cos(t)-$$
$$-15008\cos(2t)+19896\sin(2t)+{+10602})e^{t+\pi}-1226e^{t}\cos(2t)-$$
$$-12119e^{t}\sin(2t)+(-228e^{t}+14880e^{\pi}+{+160})\cos(t)^2+((-334e^{t}+$$
$$+3720e^{\pi}+40)\sin(t)+3162e^{\pi}+34)\cos(t)+(6324e^{\pi}+68)\sin(t)+$$
$$+114e^{t}-7440e^{\pi}-80)/(11560e^{3\pi}-2040e^{2\pi}-31620e^{\pi}-340);$$

$$G=((2004\cos(t)^2-1368\sin(t)\cos(t)-1437\cos(2t)-$$
$$-3962\sin(2t)—28143\big)e^{t+2\pi}+\big(-11356\cos(t)^2+7752\sin(t)\cos(t)-$$
$$-102\cos(2t)—3876\sin(2t)+11458\big)e^{t+3\pi}+$$
$$+(-576\cos(t)^2+(672\sin(t)+1428)\cos(t)+1836\sin(t)+288)e^{2\pi}+$$
$$+(3264\cos(t)^2+(-3808\sin(t)-8092)\cos(t)-10404\sin(t)-1632)e^{3\pi}+$$
$$+(31062\cos(t)^2-21204\sin(t)\cos(t)-19896\cos(2t)-15008\sin(2t)-$$
$$-78328)e^{t+\pi}+12119e^{t}\cos(2t)-1226e^{t}\sin(2t)+(334e^{t}-8928e^{\pi}-$$
$$-96)\cos(t)^2+((-228e^{t}+10416e^{\pi}+112)\sin(t)+22134e^{\pi}+238)$$
$$\cos(t)+(28458e^{\pi}+306)\sin(t)+16977e^{t}+4464e^{\pi}+48)/(23120e^{3\pi}-$$
$$-4080e^{2\pi}-63240e^{\pi}-680);$$

$$G=((6012\cos(t)^2-4104\sin(t)\cos(t)-4311\cos(2t)-11886\sin(2t)+$$
$$+20055)e^{t+2\pi}+(-34068\cos(t)^2+23256\sin(t)\cos(t)-306\cos(2t)-$$
$$-11628\sin(2t)+34374)e^{t+3\pi}+(1536\cos(t)^2+(3648\sin(t)-$$
$$-1836)\cos(t)-612\sin(t)-768)e^{2\pi}+(-8704\cos(t)^2+(-20672\sin(t)+$$

$$+10404)\cos(t)+3468\sin(t)+4352)e^{3\pi}+$$

$$+\left(93186\cos(t)^2-63612\sin(t)\cos(t)-59688\cos(2t)-\right.$$

$$\left.45024\sin(2t)-47036\right)e^{t+\pi}+36357e^t\cos(2t)-3678e^t\sin(2t)+$$

$$(1002e^t+23808e^\pi++256)\cos(t)^2+\left((-684e^t+56544e^\pi+608)\sin(t)-\right.$$

$$\left.28458e^\pi-306\right)\times\cos(t)+(-9486e^\pi-102)\sin(t)-18325e^t-$$

$$-11904e^\pi-128))/(23120e^{3\pi}-4080e^{2\pi}-63240e^\pi-680);$$

За формулою $X1=X(t)Q^{-}\alpha$, отримаємо матрицю:

$$X1=$$

$$=\frac{-(56e^t\left(\left(e^\pi+\frac{22}{7}e^{2\pi}+\frac{1}{7}\right)\cos(2t)+\frac{25}{14}\left(e^\pi-\frac{91}{50}e^{2\pi}+\frac{87}{100\sin(2t)}\right)\right))}{-68e^{3\pi}+12e^{2\pi}+186e^\pi+2};$$

$$X1=$$

$$=\left(e^t\left(\begin{matrix}-176\sin(2\mathrm{t})\,e^{2\pi}-182\cos(2\mathrm{t})\,e^{2\pi}-56\sin(2\mathrm{t})\,e^\pi+100\cos(2\mathrm{t})\,e^\pi-\\-378e^{2\pi}-8\sin(2\mathrm{t})+87\cos(2\mathrm{t})-292e^\pi+121\end{matrix}\right)\right)/$$

$$/(-136e^{3\pi}+24e^{2\pi}+372e^\pi+4);$$

$$X1=$$

$$=(e^t\left(\begin{matrix}-528\sin(2\mathrm{t})\,e^{2\pi}-546\cos(2\mathrm{t})\,e^{2\pi}-168\sin(2\mathrm{t})\,e^\pi+\\+300\cos(2\mathrm{t})\,e^\pi+378e^{2\pi}-24\sin(2\mathrm{t})+261\cos(2\mathrm{t})+292e^\pi-121\end{matrix}\right))/$$

$$/(-136e^{3\pi}+24e^{2\pi}+372e^\pi+4).$$

За формулою $X2=X(t)P_{NQ}C$, знаходимо:

$$X2=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Знаходимо суму за формулою:

$$X=X1+X2+G$$

$$X=((-1368\cos(t)^2-2004\sin(t)\cos(t)+25958\cos(2t)-29503\sin(2t)+$$
$$+684)e^{t+2\pi}+(7752\cos(t)^2+11356\sin(t)\cos(t)-3876\cos(2t)+$$
$$+102\sin(2t)-3876)e^{t+3\pi}+(960\cos(t)^2+(240\sin(t)+204)\cos(t)+$$
$$+408\sin(t)-480)e^{2\pi}+(-5440\cos(t)^2+(-1360\sin(t)-1156)\cos(t)-$$
$$-2312\sin(t)+2720)e^{3\pi}+(-21204\cos(t)^2-31062\sin(t)\cos(t)-$$
$$-5488\cos(2t)+36896\sin(2t)+10602)e^{t+\pi}+134e^{t}\cos(2t)+$$
$$+2671e^{t}\sin(2t)+(-228e^{t}+14880e^{\pi}+160)\cos(t)^2+((-334e^{t}+$$
$$+3720e^{\pi}+40)\sin(t)+3162e^{\pi}+34)\,(\cos(t)+(6324e^{\pi}+68)\sin(t)+$$
$$+114e^{t}-7440e^{\pi}-80))/(11560e^{3\pi}-2040e^{2\pi}-31620e^{\pi}-340);$$

$$X=((2004\cos(t)^2-1368\sin(t)\cos(t)+29503\cos(2t)+25958\sin(2t)+$$
$$+36117)e^{t+2\pi}+\begin{pmatrix}-11356\cos(t)^2+7752\sin(t)\cos(t)-\\-102\cos(2t)—3876\sin(2t)+11458\end{pmatrix}e^{t+3\pi}+$$
$$+(-576\cos(t)^2+(672\sin(t)+1428)\cos(t)+1836\sin(t)++288)e^{2\pi}+$$
$$+(3264\cos(t)^2+(-3808\sin(t)-8092)\cos(t)-10404\sin(t)-1632))e^{3\pi}+$$
$$+\big(31062\cos(t)^2-21204\sin(t)\cos(t)-$$
$$36896\cos(2t)—5488\sin(2t)—28688\big)e^{t+\pi}-2671e^{t}\cos(2t)+$$
$$134e^{t}\sin(2t)++\big(334e^{t}-8928e^{\pi}—96\big)\cos(t)^2+\big((-228e^{t}+10416e^{\pi}+$$
$$112)\sin(t)++22134e^{\pi}+238\big)\times\times\cos(t)+(28458e^{\pi}+306)(\sin(t)-$$
$$-3593e^{t}+4464e^{\pi}++48))/$$
$$/(23120e^{3\pi}--4080e^{2\pi}-63240e^{\pi}-680);$$

$$X=(\big(6012\cos(t)^2-4104\cos(t)+88509\cos(2t)+$$
$$+77874\sin(2t)—44205\big)e^{t+2\pi}+\big(-34068\cos(t)^2+23256\sin(t)\cos(t)-$$
$$-306\cos(2t)—11628\sin(2t)+34374\big)e^{t+3\pi}$$
$$+\big(1536\cos(t)^2+\big(3648\sin(t)—1836\big)\cos(t)-612\sin(t)-768\big)e^{2\pi}+$$
$$+(-8704cos(t)^2+(-20672\sin(t)++10404)\cos(t)+3468\sin(t)+$$
$$+4352)e^{3\pi}+\big(93186\cos(t)^2-63612\sin(t)\cos(t)-110688\cos(2t)-$$
$$16464\sin(2t)—96676\big)e^{t+\pi}-8013e^{t}\cos(2t)+402e^{t}\sin(2t)+$$
$$(1002e^{t}+23808e^{\pi}+256)\cos(t)^2+\big((-684e^{t}+56544e^{\pi}+608)\sin(t)-$$

$$28458e^{\pi}-306\big)\cos(t)+(-9486e^{\pi}-102)\sin(t)+2245e^{t}-11904e^{\pi}-$$
$$-128))/(23120e^{3\pi}-4080e^{2\pi}-63240e^{\pi}-680).$$

Отримали розв'язок крайової задачі (3.1).

Зробимо перевірку. Підставимо $X(t)$ у диференціальне рівняння крайової задачі (3.1), отримаємо

$$X=((-5376\cos(t)^2+732\sin(t)\cos(t)-33048\cos(2t)-81419\sin(2t))+$$
$$+2688)e^{t+2\pi}+(30464\cos(t)^2-4148\sin(t)\cos(t)-3672\cos(2t)+$$
$$+7854\sin(2t)-15232)e^{t+3\pi}+(480\cos(t)^2+(-1920\sin(t)+408)\cos(t)-$$
$$-204\sin(t)-240)e^{2\pi}+(-2720\cos(t)^2+(10880\sin(t)-2312)\cos(t))+$$
$$+1156\sin(t)+1360)e^{3\pi}+(-83328\cos(t)^2+11346\sin(t)\cos(t))+$$
$$+68304\cos(2t)+47872\sin(2t)+41664)e^{t+\pi}+5476e^{t}\cos(2t)+$$
$$+2403e^{t}\sin(2t)+(-896e^{t}+7440e^{\pi}+80)\cos(t)^2+((122e^{t}-29760e^{\pi}-$$
$$-320)\sin(t)+6324e^{\pi}+68)\cos(t)+(-3162e^{\pi}-34)\sin(t)+448e^{t}-$$
$$-3720e^{\pi})-40)/(11560e^{3\pi}-2040e^{2\pi}-31620e^{\pi}-340);$$

$$X=((-732\cos(t)^2-5376\sin(t)\cos(t)+81419\cos(2t)-33048\sin(2t))+$$
$$+37485)e^{t+2\pi}+(4148\cos(t)^2+30464\sin(t)\cos(t)-7854\cos(2t))-$$
$$-3672\sin(2t)+3706)e^{t+3\pi}+(1344\cos(t)^2+(1152\sin(t)+1836)\cos(t))-$$
$$-1428\sin(t)-672)e^{2\pi}+(-7616\cos(t)^2+(-6528\sin(t)-10404)\cos(t))+$$
$$+8092*\sin(t)+3808)e^{3\pi}+(-11346\cos(t)^2-83328\sin(t)\cos(t))-$$
$$-47872\cos(2t)+68304\sin(2t)-7484)e^{t+\pi}-2403e^{t}\cos(2t)+$$
$$+5476e^{t}\sin(2t)+(-122e^{t}+20832e^{\pi}+224)\cos(t)^2+((-896e^{t}+$$
$$+17856e^{\pi}+192)\sin(t)+28458e^{\pi}+306)\cos(t)+(-22134e^{\pi}-238)\times$$
$$\times\sin(t)-3365e^{t}-10416e^{\pi}-112)/(23120e^{3\pi}-4080e^{2\pi}-$$
$$-63240e^{\pi}-680);$$

$$X=((-2196\cos(t)^2-16128\sin(t)\cos(t)+244257\cos(2t)-$$
$$-99144\sin(2t))-40101)e^{t+2\pi}+(12444\cos(t)^2+91392\sin(t)\cos(t)-$$
$$-23562\cos(2t)-11016\sin(2t)+11118)e^{t+3\pi}+(7296\cos(t)^2+$$

$$+(-3072\sin(t)-612)\cos(t)+1836\sin(t)-3648)e^{2\pi}+(-41344\cos(t)^2+$$
$$+(17408\sin(t)+3468)\cos(t)-10404\sin(t)+20672)e^{3\pi}+$$
$$+(-34038\cos(t)^2-249984\sin(t)\cos(t)-143616\cos(2t)+$$
$$+204912\sin(2t))-33064)e^{t+\pi}-7209e^{t}\cos(2t)+16428e^{t}\sin(2t)+$$
$$+(-366e^{t}+113088e^{\pi}+1216)\cos(t)^2+((-2688e^{t}-47616e^{\pi}-$$
$$-512)\sin(t)-9486e^{\pi}-102)\cos(t)+(28458e^{\pi}+306)\sin(t)+$$
$$+2929e^{t}(t)-56544e^{\pi}-608)/(23120e^{3\pi}-4080e^{2\pi})-63240e^{\pi}-680).$$

Підставимо $X(t)$ у крайову умову крайової задачі (3.1), отримаємо:

$$X(a)=\begin{pmatrix}\dfrac{1938e^{3\pi}-12979e^{2\pi}+2744e^{\pi}-67}{-5780e^{3\pi}+1020e^{2\pi}+15810e^{\pi}+170}\\ \dfrac{1615e^{3\pi}-17191e^{2\pi}+4213e^{\pi}+1435}{-5780e^{3\pi}+1020e^{2\pi}+15810e^{\pi}+170}\\ \dfrac{-1513e^{3\pi}-12312e^{2\pi}+32683e^{\pi}+1236}{-5780e^{3\pi}+1020e^{2\pi}+15810e^{\pi}+170}\end{pmatrix},$$

$$X(b)=\begin{pmatrix}\dfrac{-11855e^{3\pi}+7907e^{2\pi}-2149e^{\pi}-23}{-5780e^{3\pi}+1020e^{2\pi}+15810e^{\pi}+170}\\ \dfrac{1}{340}\dfrac{-38674e^{3\pi}+18119e^{2\pi}+16264e^{\pi}+143}{-34e^{3\pi}+6e^{2\pi}+93e^{\pi}+1}\\ \dfrac{1}{340}\dfrac{-17780e^{3\pi}+55787e^{2\pi}-17798e^{\pi}-217}{-34e^{3\pi}+6e^{2\pi}+93e^{\pi}+1}\end{pmatrix}.$$

$$MX(a)-NX(b)=\begin{pmatrix}-2\\ 6\\ -3\end{pmatrix}.$$

Задача розв’язана правильно.

ВИСНОВКИ

В ході виконання даної кваліфікаційної роботи було знайдено розв’язання крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь. Було знайдено диференціальне матричне рівняння, з розв’язком для систем лінійних рівнянь. Для випадку постійної матриці було застосовано приведення до жорданової форми. Для знаходження матричної експоненти було використано суму матричного ряду.

Було знайдено нормальну фундаментальну матрицю задачі Коші, за допомогою якої побудовано розв’язання лінійної фредгольмової крайової задачі у скінчено вимірному просторі за допомогою методу матричної експоненти.

Результати кваліфікаційної роботи мають теоретичний характер.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Маркушевич А. И. Очерки по истории теории аналитических функций. Москва : Изд-во технико-теоретической лит-ры, 1951. 128 с.

2. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. Москва : Наука, 1966. 576 с.

3. Беллман Р. Введение в теорию матриц. Москва : Наука, 1969. 368 с.

4. Егоров А. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. Москва : ФИЗМАЛИТ, 2005. 384 с.

5. Основы матричного анализа. URL : http://www.brsu.by/sites/default/files/priclmath/omaff.pdf (дата звернення : 19.10.2020р)

6. Метод матричної експоненти. Означення та властивість матричної експоненти. URL : http://www.math24.ru/%D0%BC%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4-%D0%BC%D0%B0%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%87%D0%BD%D0%BE%D0%B9-%D1%8D%D0%BA%D1%81%D0%BF%D0%BE%D0%BD%D0%B5%D0%BD%D1%82%D1%8B.html (дата звернення : 19.10.2020р)

7. Богданський Ю. В. Диференціальні рівняння. Навчальний посібник. Київ : Політехніка, 2011. 215с.

8. Домбровський В. А., Крижанівський І. М., Мацьків Р. С., Мигович Ф. М., Неміш В. М., Окрепкий Б. С., Хома Г. П., Шелестовська М. Я., Шинкарик М. І. Вища математика. Тернопіль : Видавництво Карп'юка, 2003. 484 с.

9. Тер-Крикоров А. М. Матричные функции и линейные дифференциальные уравнения. Москва : МФТИ, 2014. 43с

10. Наукова бібліотека. URL : https://scask.ru/f_book_sm_math1.php?id=64 (дата звернення : 20.10.2020р)

11. Бугров Я. С., Никольский С. М. Елементи линейной алгебры и аналитической геометрии. Том 1. Москва : Дрофа, 2004. 288 с.

12. Краснов М. Л. Интегральные уравнения. Введение в теорию. Москва : Наука, 1975. 303 с.

13. Бугров Я. С., Никольский С. М. Дифференциальное и интегральное исчисление. Том 2. Москва : Дрофа, 2004. 512 с.

14. Васильева А. Б., Тихонов Н. А. Интегральные уравнения. Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2002. 160 с.

15. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Том 2. Москва : Наука, 1985. 560 с.

16. Филиппов А. Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. Москва : КомКнига, 2007. 240 с.

17. Краснов М. Л., Киселёв А. И., Макаренко Г. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения: Задачи и примеры с подробными решениями. Москва : Едиториал УРСС, 2002. 256 с.

18. Денисов А. М., Разгулин А. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Часть 2. Москва. 2009. 114с.

19. Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения. Москва : Высшая школа, 1989. 384 с.

20. Денисов А. М., Разгулин А. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Часть 1. Москва. 2009. 122 с.

21. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. Москва : Наука, 1965. 431 с.