МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

І.В. Красікова, Н.М. Д’яченко

# ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ТА ТЕОРІЯ МІРИ Й ІНТЕГРАЛА

Методичні рекомендації до самостійної роботи
для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра
спеціальності «Математика»
освітньо-професійної програми «Математика»

Затверджено
вченою радою ЗНУ
Протокол № від 2020 р.

Запоріжжя
2020

УДК: 517.987.1 (075.8)
К78

Красікова І. В., Д’яченко Н. М. Функціональний аналіз та теорія міри й інтеграла : методичні рекомендації до самостійної роботи для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра спеціальності «Математика» освітньо-професійної програми «Математика». Запоріжжя: ЗНУ, 2020. 70 с.

Методичні рекомендації призначені допомогти студентам якісно засвоїти програмний матеріал з функціонального аналізу та теорії міри й інтеграла.

Видання містить основні теоретичні відомості з курсу функціонального аналізу та теорії міри й інтеграла, приклади задач з методикою їх розв’язання, варіанти завдань для самостійного виконання та питання для самоконтролю.

Для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра спеціальності «Математика» освітньо-професійної програми «Математика».

Рецензент
*М.І. Клименко,* кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри фундаментальної математики

Відповідальний за випуск
*С.М. Гребенюк,* доктор технічних наук, доцент, завідувач кафедри фундаментальної математики

## ЗМІСТ

# ПЕРЕДМОВА

Курс функціонального аналізу та теорії міри й інтеграла є одним з найбільш абстрактних і тому найбільш складних курсів. Зрозуміло, що дуже важливо допомогти здобувачам якісно засвоїти теоретичні основи функціонального аналізу та теорії міри й інтеграла, навчити застосовувати відомі принципи та методи при розв'язанні різноманітних задач. На жаль, кількість аудиторних годин, відведена на знайомство з функціональним аналізом та теорією міри й інтеграла, постійно зменшується. Студентам досить важко встигнути опанувати хоча б основні теоретичні факти та методи розв'язання задач. Існує велика кількість наукової літератури та підручників, які висвітлюють різні розділи функціонального аналізу або теорій міри й інтеграла. Іноді студентам важко зорієнтуватися, де краще знайти потрібний матеріал. Це видання створене, щоб допомогти студентам організувати самостійну роботу при вивченні курсу функціонального аналізу та теорії міри й інтеграла, надати основні теоретичні відомості та навчитися розв'язувати класичні типи задач, зокрема, виконати передбачене робочою програмою індивідуальне завдання.

**Метою** вивчення навчальної дисципліни «Функціональний аналіз та теорія міри й інтеграла» є опанування систематичних знань з основ класичного і сучасного функціонального аналізу, основ класичної теорії міри та інтеграла включно з побудовою міри Лебега у скінченновимірному просторі та розглядом інтеграла Лебега для вимірних за Лебегом функцій однієї змінної, узагальнення понять математичного аналізу, алгебри, геометрії, топології.

Основними **завданнями** вивчення дисципліни «Функціональний аналіз та теорія міри й інтеграла» є:

– ознайомитися з узагальненням відомих математичних понять та внутрішньою логікою теорії множин, теорії неперервних відображень, лінійних просторів та операторів на них, теорії міри та інтеграла;
– отримати інформацію про геометричні, алгебраїчні та аналітичні витоки функціонального аналізу;
– оволодіти методами формулювання конкретних математичних проблем в термінах курсу;
– ознайомитися із застосуванням абстрактних розділів математики до розв'язання класичних та прикладних задач;
– узагальнити відомі поняття довжини, площі, об'єму та ознайомитися з побудовою міри Лебега на прямій, площині, у скінченновимірному просторі та теорії інтеграла Лебега для вимірних функцій;
– розглянути питання застосування теорії міри та інтеграла до розв'язання класичних та прикладних задач.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен **знати:**

– основні поняття та факти теорії метричних, лінійних, топологічних, нормованих та евклідових просторів;
– основні принципи функціонального аналізу, пов'язані з поняттям лінійних неперервних функціоналів та операторів на нормованих просторах;

– основні застосування методів функціонального аналізу при розв'язанні задач;
– основні поняття та факти теорії міри, вимірних функцій та інтеграла Лебега;
– загальну ідею побудови міри;
– властивості просторів Лебега;
– основні застосування методів теорії міри при розв'язанні задач.

**вміти:**

– застосовувати відомі факти до розв'язування задач;
– досліджувати основні властивості просторів;
– наводити приклади, які демонструють той чи інший факт або поняття, а також їх застосування до розв'язання конкретних задач;
– перевіряти оператори та функціонали на адитивність, однорідність, лінійність, обмеженість, неперервність, знаходити їх норму; досліджувати лінійні оператори на оберненість та знаходити обернені оператори;
– застосовувати принцип стискуючих відображень та властивості лінійних неперервних операторів до розв'язання операторних рівнянь;
– застосовувати відомі факти до розв'язування задач;
– досліджувати множини на вимірність та знаходити їх міру;
– досліджувати функції на вимірність;
– обчислювати інтеграли Лебега від функцій однієї та багатьох змінних;
– застосовувати властивості просторів сумовних функцій;
– наводити приклади, які демонструють той чи інший факт або поняття, а також їх застосування до розв'язання конкретних задач.

Згідно з вимогами освітньо-професійної програми студенти повинні досягти таких **компетентностей**:

– Здатність до навчання, в тому числі, і самостійного. Здатність до саморозвитку та самовдосконалення;
– Розуміння предмету навчання та змісту професійної діяльності;
– Здатність використовувати математичні методи, інформаційні і комунікаційні технології;
– Здатність застосовувати прийоми логічного мислення: аналіз, синтез, індукцію, дедукцію, узагальнення та конкретизацію та ін.;
– Здатність до пошуку, оброблення та аналізу інформації з різних джерел;
– Здатність розв'язувати проблеми різної складності та формулювати нові проблеми математичною мовою;
– Здатність конструювати доведення та обґрунтування отриманих результатів у відповідності до обраного методу дослідження;
– Здатність викладення результатів дослідження у логічній послідовності, у тому числі відрізняти основні ідеї від деталей та технічних викладок;
– Розуміння ролі та впливу математики на розвиток наукового та технологічного мислення.

У виданні наведені питання для самоконтролю засвоєння теоретичного матеріалу та методика розв'язання задач. Також наводяться 3 індивідуальних завдання для самостійного виконання.

# 1 МЕТРИЧНІ ПРОСТОРИ

*Мета вивчення теми:*

1) засвоїти поняття теорії метричних просторів;
2) знати означення метрики та вміти перевіряти аксіоми метрики;
3) знати приклади та основні властивості класичних метричних просторів;
4) вміти класифікувати точки та множини у метричному просторі;
5) вміти знаходити замикання та внутрішність множини;
6) знати приклади повних, неповних, сепарабельних, несепарабельних метричних просторів;
7) засвоїти поняття збіжності у метричному просторі та знати його зміст у конкретних метричних просторах;
8) вміти досліджувати послідовності на збіжність та фундаментальність;
9) вміти досліджувати відображення на неперервність;
10) знати поняття компактності у метричному просторі, вміти визначати компактність або передкомпактність множини;
11) знати означення стискуючого відображення, формулювання принципу стискуючих відображень та вміти його застосовувати.

*Основні поняття теми:*

1) метрика, метричний простір;
2) приклади метричних просторів;
3) відкрита куля, замкнена куля, сфера, окіл точки;
4) внутрішня точка, гранична точка, межова точка, точка дотикання, ізольована точка;
5) замикання множини, внутрішність множини;
6) замкнена множина, відкрита множина;
7) всюди щільна та ніде не щільна множина, сепарабельний простір;
8) збіжна послідовність, фундаментальна послідовність, повний метричний простір;
9) $\varepsilon -$ сітка, обмежена множина, цілком обмежена множина, компактна множина, передкомпактна множина;
10) неперервне відображення, стискуюче відображення, нерухома точка відображення.

## 1.1 Метричні простори та їх властивості

Однією з найважливіших операцій у математичному аналізі є граничний перехід, який ґрунтується на понятті відстані між двома числами. Якщо узагальнити поняття відстані між числами, ми прийдемо до поняття *метричного простору* – одного з найважливіших понять сучасної математики.

**Означення 1.1.1.** Нехай $X$ – довільна множина. Функція $\rho: X \times X \to \mathbb{R}^+$ називається *метрикою*, якщо для неї виконуються наступні аксіоми:

M1) $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

M2) $\forall\ x,y \in X \quad \rho(x,y) = \rho(y,x)$ – аксіома симетрії;

M3) $\forall\ x,y,z \in X \quad \rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(z,y)$ – аксіома трикутника.

При цьому пара $(X, \rho)$ називається *метричним простором*.

Відмітимо, що множина $X$ на якій задається метрика, може бути довільною (вона не зобов'язана бути, наприклад, лінійним простором), а метрика є функцією, яка приймає дійсні невід'ємні значення.

Розглянемо тепер класичні приклади метричних просторів, які будуть зустрічатися найчастіше.

1) *Дискретний метричний простір.* Тут $X$ – довільна множина, а метрика задається формулою:

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, x \neq y \\ 0, x = y \end{cases}.$$

2) *Простір дійсних чисел* $\mathbb{R}$. Метрика на множині дійсних чисел (числовій прямій) задається формулою $\rho(x, y) = |x - y|$.

Зрозуміло, що на числовій прямій можна задати метрику в інший спосіб і отримати інший метричний простір.

3) *Простір послідовностей* $l_p$, $1 \leq p < \infty$. Елементами цього простору є числові послідовності дійсних або комплексних чисел з певними умовами:

$$l_p = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_m, \dots) \colon \forall\, i \;\; x_i \in (\mathbb{R}, \mathbb{C}), \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty \right\}.$$

Метрика в цьому просторі задається формулою:

$$\rho(x, y) = \left( \sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}.$$

4) *Простір обмежених послідовностей* $l_\infty = m$ . Елементами цього простору є обмежені числові послідовності дійсних або комплексних чисел:

$$m = \{ x = (x_1, x_2, \dots, x_m, \dots) \colon \forall\, i \;\; x_i \in (\mathbb{R}, \mathbb{C}), \exists\, C_x > 0 \colon \forall\, i \;\; |x_i| \leq C_x \}.$$

Метрика у просторі $m$ задається формулою:

$$\rho(x, y) = \sup_i |x_i - y_i|.$$

5) *Арифметичний* $m$*-вимірний простір* $\mathbb{R}_p^m$, $1 \leq p \leq \infty$ . Елементами цього простору є $m$-вимірні вектори з дійсними координатами, де метрика задається в залежності від параметра $p$: при $1 \leq p < \infty$

$$\mathbb{R}_p^m = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \colon \forall\, i = \overline{1, m} \;\; x_i \in \mathbb{R}, \rho(x, y) = \left( \sum_{i=1}^{m} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p} \right\},$$

$$\mathbb{R}_\infty^m = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \colon \forall\, i = \overline{1, m} \;\; x_i \in \mathbb{R}, \rho(x, y) = \max_{1 \leq i \leq m} |x_i - y_i| \right\}.$$

6) *Простір* $C[a, b]$. Елементами цього простору є неперервні на відрізку $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ функції $x(t)$, а метрика задається формулою

$$\rho(x, y) = \max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|.$$

7) *Простори неперервних функцій* $C_1[a, b], C_2[a, b]$.

У просторі $C_1[a, b]$ метрика задається формулою:

$$\rho(x,y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|\, dt,$$

а у $C_2[a,b]$:

$$\rho(x,y) = \sqrt{\int_a^b |x(t) - y(t)|^2\, dt}.$$

Зрозуміло, що у просторі $C[a,b]$ «відстань» між неперервними функціями визначається як найбільша за модулем різниця значень цих функцій, а у просторі $C_1[a,b]$ – як площа фігури, обмеженої графіками функцій $x(t), y(t)$.

Будемо розглядати довільний метричний простір $(X,\rho)$ , який для зручності будемо позначати просто $X$ . Наведемо класифікацію точок метричного простору.

**Означення 1.1.2.** *Відкритою кулею* радіуса $r$ з центром в точці $x_0$ називається множина $B_r(x_0) = \{x \in X : \rho(x,x_0) < r\}$. *Замкненою кулею* радіуса $r$ з центром в точці $x_0$ називається множина $B_r[x_0] = \{x \in X : \rho(x,x_0) \le r\}$ . *Сферою* радіуса $r$ з центром в точці $x_0$ називається множина $S_r(x_0) = \{x \in X : \rho(x,x_0) = r\}$.

**Означення 1.1.3.** *$\varepsilon$-околом* точки $x_0$ називається відкрита куля радіуса $\varepsilon$ з центром в точці $x_0$.

Зауважимо, що на числовій прямій зі звичайною метрикою відкритою (замкненою) кулею є інтервал (відрізок) вигляду $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ ($[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$). Сферу в цьому випадку будуть утворювати дві точки $\{x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon\}$. На двовимірній площині (у просторі $\mathbb{R}_2^2$) відкрита куля – це звичайний відкритий круг, замкнена куля – замкнений круг, а сфера – це просто коло. У просторі $C_{[a,b]}$ відкриту кулю утворюють неперервні функції, графіки яких розташовані у так званому $\varepsilon$-коридорі функції $x_0(t)$, тобто відстоять від графіка $x_0(t)$ на відстань меншу за $\varepsilon$. А сферою є ті функції $x(t)$, які при деякому значенні аргументу $t \in [a,b]$ приймають значення $x(t) = x_0(t) + \varepsilon$.

Цікаво дослідити кулі та сфери у дискретному метричному просторі. Тут, в залежності від радіуса, кулями можуть бути або весь простір, або тільки одна точка: $B_r(x_0) = \begin{cases} \{x_0\}, r \le 1 \\ X, r > 1 \end{cases}$, $B_r[x_0] = \begin{cases} \{x_0\}, r < 1 \\ X, r \ge 1 \end{cases}$, $S_r(x_0) = \begin{cases} X, r = 1 \\ \emptyset, r \ne 1 \end{cases}$.

**Означення 1.1.4.** Точка $x_0 \in X$ називається:

- *точкою дотикання* множини $M$, якщо в будь-якому околі цієї точки міститься принаймні один елемент множини $M$;
- *граничною точкою* множини $M$, якщо в будь-якому околі цієї точки міститься принаймні один елемент множини $M$, відмінний від $x_0$;
- *ізольованою точкою* множини $M$, якщо $x_0 \in M$ та існує такий окіл точки $x_0$, в якому немає інших елементів множини $M$ (тобто $\exists\, \varepsilon > 0$: $B_\varepsilon(x_0) \cap M = \{x_0\}$);

- *внутрішньою точкою* множини $M$ якщо $x_0 \in M$ разом з деяким своїм околом (тобто $\exists\ \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) \subset M$);
- *межовою точкою* множини $M$, якщо в будь-якому околі цієї точки містяться як точки з множини $M$ , так і точки з доповнення до $M$.

З означення 1.1.4. безпосередньо випливають наступні очевидні факти

- внутрішні та ізольовані точки обов'язково належать множині, а всі інші точки можуть їй не належати;
- якщо деяка точка належить множині $M$ , вона буде точкою дотикання цієї множини (вона сама буде належати будь-якому своєму околові);
- в будь-якому околі граничної точки міститься нескінченна кількість елементів множини $M$;
- точки дотикання множини є або ізольованими, або граничними точками.

**Означення 1.1.5.** Множина точок дотикання множини $M$ називається *замиканням* цієї множини і позначається $\overline{M}$.

**Означення 1.1.6.** Множина внутрішніх точок множини $M$ називається *внутрішністю* цієї множини і позначається $M^0$.

Розглянемо на числовій прямій $\mathbb{R}$ множину $M = [a, b) \cup \{c\}$. Тоді точками дотикання цієї множини буде множина $[a, b] \cup \{c\}$, причому точка $c$ буде ізольованою точкою, а точки відрізка $[a, b]$ будуть граничними. Внутрішніми точками будуть точки інтервалу $(a, b)$, а межовими – три точки $a, b, c$.

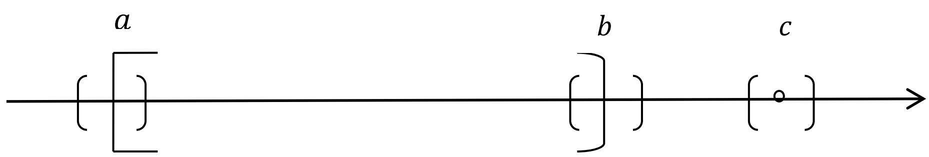


Рис.1.1.

Розглянемо тепер різні класи множин у метричних просторах. Дуже важливий клас множин у метричному просторі утворюють замкнені та відкриті множини.

**Означення 1.1.7.** Множина $M$ називається *замкненою*, якщо вона збігається зі своїм замиканням: $\overline{M} = M$.

Оскільки завжди $\overline{M} \supset M$, множину можна називати замкненою, якщо вона містить всі свої точки дотикання.

Прикладами замкнених множин будуть: точка, відрізок, множина цілих чисел на числовій прямій, замкнена куля у довільному метричному просторі, квадрат або смуга з межею на площині тощо. Зауважимо, що порожня множина та сам простір також будуть замкненими множинами (за означенням). Основна властивість замкнених множин виражається наступною теоремою.

**Теорема 1.1.8.** Перетин довільної кількості та об'єднання скінченної кількості замкнених множин – це замкнені множини.

**Означення 1.1.9.** Множина $M$ називається *відкритою*, якщо вона збігається зі своєю внутрішністю: $M^0 = M$.

Оскільки завжди $M^0 \subset M$, множину можна називати відкритою, якщо будь-яка її точка є внутрішньою.

Прикладами відкритих множин будуть довільні інтервали на прямій, відкриті кулі у довільному метричному просторі, квадрат без межі тощо. Зв'язок між відкритими та замкненими множинами дає наступна теорема.

**Теорема 1.1.10.** Множина $M$ відкрита тоді та тільки тоді, коли її доповнення $CM$ замкнене.

Безпосередньо з цієї теореми випливає, що порожня множина та сам метричний простір будуть відкритими множинами. Застосування теореми 1.1.8. та формул двоїстості дає нам можливість сформулювати основні властивості відкритих множин.

**Теорема 1.1.11.** Об'єднання довільної кількості та перетин скінченної кількості відкритих множин – це відкриті множини.

Існують множини, які є не відкритими та не замкненими. Наприклад, півінтервал $[a, b)$ на числовій прямій (це незамкнена множина, оскільки вона не містить свою точку дотикання $b$, та невідкрита множина, оскільки точка $a$ не є внутрішньою точкою, а множині належить), множина раціональних точок $\mathbb{Q}$ на числовій прямій (замикання цієї множини збігається з $\mathbb{R}$, а внутрішність є порожньою, тому що кожній інтервал містить як раціональні так і ірраціональні точки).

**Означення 1.1.12.** Множина $M \subset X$ називається *обмеженою,* якщо вона міститься в деякій кулі.

**Означення 1.1.12.** Множина $M \subset X$ називається *всюди щільною* в просторі $X$, якщо її замикання збігається з усім простором: $\overline{M} = X$.

**Означення 1.1.13.** Множина $M \subset X$ називається *ніде не щільною*, якщо вона не щільна в жодній кулі, тобто якщо в кожній кулі існує інша куля, яка не має з множиною $M$ жодної спільної точки.

В якості метричного простору розглянемо числову пряму $\mathbb{R}$ зі звичайною метрикою. Множина раціональних чисел $\mathbb{Q}$ буде всюди щільною на числовій прямій, тобто будь-яке дійсне число є точкою дотикання (і навіть граничною точкою) множини раціональних чисел $\mathbb{Q}$**.** Це випливає з того факту, що в довільному околі будь-якого дійсного числа міститься безліч раціональних чисел [3, с. 51].

А множина цілих чисел $\mathbb{Z}$ буде прикладом ніде не щільної множини на числовій прямій. Існують множини, які не є всюди щільними та не є ніде не щільними. Наприклад, це довільний відрізок $[a, b]$ на числовій прямій $\mathbb{R}$. Оскільки відрізок $[a, b]$ – замкнена множина, він не є всюди щільною множиною. Ніде не щільною множиною він також не буде, оскільки, якщо взяти кулю (інтервал), яка повністю міститься всередині відрізка $[a, b]$, ми не зможемо побудувати меншу кулю, яка не містить точок відрізка.

**Означення 1.1.14.** Метричний простір, в якому існує зліченна всюди щільна множина, називається *сепарабельним.*

Прикладами сеперабельних метричних просторів є простори $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_p^m$, $1 \le p \le \infty$, $l_p, 1 \le p < \infty$, $C[a,b]$. В якості несепарабельного простору виступає простір обмежених послідовностей $m$.

Наявність метрики у метричному просторі дає нам можливість сформулювати дуже важливе поняття збіжності.

**Означення 1.1.15.** Говорять, що послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ елементів метричного простору $X$ *збігається* до елемента $x_0 \in X$, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x_0) = 0$, тобто якщо $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \colon \forall\, n \ge n_0 \;\; \rho(x_n, x_0) < \varepsilon$ . При цьому елемент $x_0$ називається *границею послідовності* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, а сама послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – *збіжною*.

Збіжна послідовність може мати лише одну границю. Якщо сформулювати означення 1.1.15. в термінах околів, збіжність послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ до елемента $x_0$ буде означати, що в будь-якому околі елемента $x_0$ містяться всі члени послідовності, починаючи з деякого номера, тобто точка $x_0$ є граничною точкою послідовності (а значить, і її точкою дотикання). Більш того, існує теорема, яка встановлює зв'язок між поняттями границі та точки дотикання.

**Теорема 1.1.16. (критерій точки дотикання).** Точка $x_0$ є точкою дотикання множини $M$ тоді та тільки тоді, коли існує послідовність елементів множини $M$, яка збігається до $x_0$.

Якщо $x_0$ – гранична точка множини $M$ , елементи $x_n$ в доведенні попередньої теореми можна вибрати попарно різними, тобто має місце наступна теорема.

**Теорема 1.1.17. (критерій граничної точки).** Точка $x_0$ є граничною точкою множини $M$ тоді та тільки тоді, коли існує послідовність попарно різних елементів множини $M$, яка збігається до $x_0$.

Необхідною умовою збіжності послідовності у метричному просторі є її обмеженість.

Розглянемо зміст поняття збіжності у конкретних метричних просторах.

1) *Дискретний метричний простір.* Оскільки метрика в дискретному метричному просторі приймає тільки два значення – 0 та 1, для збіжності до нуля послідовності $\rho(x_n, x_0)$ необхідно та достатньо, щоб $\exists n_0 \colon \forall\, n \ge n_0$ $\rho(x_n, x_0) = 0$, тобто щоб $\exists n_0 \colon \forall\, n \ge n_0 \;\; x_n = x_0$. Це означає, що в дискретному метричному просторі збігаються тільки стаціонарні послідовності (стаціонарними вони мають бути принаймні з деякого номера).

2) *Простір* $\mathbb{R}$. Збіжність у цьому метричному просторі добре вивчена у курсі математичного аналізу.

3) *Арифметичний* $m$ *- вимірний простір* $\mathbb{R}_p^m$, $1 \le p \le \infty$ . Нехай послідовність векторів $x_n = (x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nm})$ збігається до елемента $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0m})$, тобто $\rho(x_n, x_0) \to 0$:

$$p < \infty \colon \; \rho(x_n, x_0) = \left( \sum_{i=1}^{m} |x_{ni} - x_{0i}|^p \right)^{1/p} \to 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} |x_{ni} - x_{0i}|^p \to 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall\, i = \overline{1,m}\ \ |x_{ni} - x_{0i}|^p \to 0\ \Leftrightarrow \forall\, i = \overline{1,m}\ \ x_{ni} \to x_{0i}, n \to \infty;$$

$$p = \infty:\ \rho(x_n, x_0) = \rho(x_n, x_0) = \max_{1 \le i \le m} |x_{ni} - x_{0i}| \to 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall\, i = \overline{1,m}\ \ |x_{ni} - x_{0i}| \to 0\ \Leftrightarrow \forall\, i = \overline{1,m}\ \ x_{ni} \to x_{0i}, n \to \infty.$$

Таким чином, збіжність у просторі $\mathbb{R}_p^m$, $1 \le p \le \infty$ еквівалентна звичайній покоординатній збіжності послідовності.

4) *Простір послідовностей* $l_p$, $1 \le p < \infty$. Нехай як і у попередньому випадку послідовність $x_n = (x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nk}, \dots)$ збігається до елемента $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0k}, \dots)$, тобто

$$\rho(x_n, x_0) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_{ni} - x_{0i}|^p\right)^{1/p} \to 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} |x_{ni} - x_{0i}|^p \to 0.$$

З того, що нескінченна сума невід'ємних доданків прямує до нуля при $n \to \infty$ випливає, що кожний доданок прямує до нуля, а зворотне – невірно. Отже,

$$\rho(x_n, x_0) \to 0 \Longrightarrow\ \forall\, i\ \ |x_{ni} - x_{0i}|^p \to 0\ \Longrightarrow \forall\, i\ \ x_{ni} \to x_{0i}, n \to \infty,$$

що означає, що із збіжності за метрикою випливає покоординатна збіжність послідовностей, тобто покоординатна збіжність є необхідною умовою збіжності за метрикою у просторі $l_p$.

5) *Простір неперервних функцій* $C[a, b]$. Пригадуючи вигляд метрики у цьому просторі, запишемо означення збіжності послідовності неперервних на $[a, b]$ функцій $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ до неперервної функції $x_0(t)$ :

$$\rho(x_n, x_0) \to 0 \Leftrightarrow \max_{t \in [a,b]} |x_n(t) - x_0(t)| \to 0.$$

Останній вираз – це критерій рівномірної збіжності функціональної послідовності, елементами якої є неперервні функції (для таких функцій максимум і супремум на відрізку – це одне й те ж число), відомий з курсу математичного аналізу [4, с.71]. Як відомо, необхідною умовою рівномірної збіжності послідовності є поточкова збіжність.

За допомогою поняття збіжності ми можемо сформулювати поняття неперервності відображення $f: (X, \rho_X) \to (Y, \rho_Y)$, де $X, Y$ – довільні метричні простори з відповідними метриками на них.

**Означення 1.1.18.** Відображення $f: (X, \rho_X) \to (Y, \rho_Y)$ називається *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо

$$\forall\ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f): x_n \to x_0\ \ \Longrightarrow\ f(x_n) \to f(x_0).$$

Це означення цілком повторює означення неперервності числової функції в точці за Гейне, відоме з курсу математичного аналізу [3, с.140]. І як в курсі математичного аналізу, існує друге, еквівалентне першому, означення («за Коші»).

**Означення 1.1.19.** Відображення $f: (X, \rho_X) \to (Y, \rho_Y)$ називається *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0: \forall x \in D(f):\ \rho_X(x, x_0) < \delta\ \ \Longrightarrow\ \rho_Y(f(x), f(\,x_0)) < \varepsilon.$$

**Означення 1.1.20.** Послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ точок метричного простору $X$ називається *фундаментальною*, якщо

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists n_0: \forall\, n, m \ge n_0\ \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Безпосередньо з означення випливають наступні властивості фундаментальних послідовностей: будь-яка фундаментальна послідовність є обмеженою та будь-яка збіжна послідовність є фундаментальною.

З курсу математичного аналізу відомо, яку важливу роль відіграє повнота числової прямої, тобто факт, що будь-яка фундаментальна послідовність чисел має границю.

**Означення 1.1.21.** Якщо в метричному просторі збігається будь-яка фундаментальна послідовність, такий простір називається *повним*.

Повними метричними просторами будуть простори $\mathbb{R}_p^m$, $1 \leq p \leq \infty$, $l_p, 1 \leq p < \infty, m, C[a,b]$. Натомість, простори $C_1[a,b]$, $C_2[a,b]$ є прикладами неповних метричних просторів.

Наведемо теорему, яка дасть критерій повноти деякої множини (простору) у метричному просторі. Виявляється, поняття повноти пов'язане з поняттям замкненості.

**Твердження 1.1.22.** Підмножина повного метричного простору є повним метричним простором тоді та тільки тоді, коли вона замкнена.

З цього твердження випливає, наприклад, що на числовій прямій $\mathbb{R}$ повними просторами будуть будь-який відрізок, замкнена півпряма, множина цілих чисел $\mathbb{Z}$. А множина раціональних чисел $\mathbb{Q}$, інтервал – це приклади неповних метричних просторів.

Поняття компактності у метричних просторах тісно пов'язане з поняттям цілковитої обмеженості множини.

**Означення 1.1.23.** Нехай $M$ – деяка множина у метричному просторі $X$, $\varepsilon$ – довільне додатне число. Множина $A \subset X$ називається *$\varepsilon$-сіткою* для $M$, якщо для довільної точки $x \in M$ існує хоча б одна точка $a \in A$, для якої $\rho(x,a) \leq \varepsilon$.

Інакше кажучи, існування $\varepsilon$-сітки для множини $M$ означає можливість розмістити усі елементи $M$ у кулях радіуса $\varepsilon$ з центрами в точках з множини $A$. Зрозуміло, що якщо для деякої множини існує $\varepsilon$-сітка, можна побудувати $2\varepsilon$-сітку. На числовій прямій $\mathbb{R}$ множина цілих чисел $\mathbb{Z}$, наприклад, утворює 0,5-сітку. Причому зменшити $\varepsilon = 0{,}5$ неможливо. Множина $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ точок с цілими координатами утворює $\frac{\sqrt{2}}{2}$-сітку на площині.

**Означення 1.1.24.** Множина $M$ називається *цілком обмеженою*, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує скінченна $\varepsilon$-сітка для цієї множини.

Цілком обмежену множину можна розмістити у скінченній кількості куль з центрами в точках з множини $A$ як завгодно малого радіуса. Зрозуміло, що кожна цілком обмежена множина є обмеженою, оскільки ту скінченну кількість куль, які містять множину, можна оточити однієї кулею. Обернене твердження не є вірним. Але у скінченновимірному просторі $\mathbb{R}^m$ повна обмеженість збігається з обмеженістю.

Натомість, у просторі просторі $l_2$ одинична сфера є прикладом обмеженої, але не цілком обмеженої множини. Тоді як в $l_2$ множина, яка називається основним паралелепіпедом або «гільбертовою цеглиною» $\Pi = \left\{x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \colon \forall n \; |x_n| \leq \frac{1}{2^{n-1}}\right\}$ є цілком обмеженою.

**Означення 1.1.25.** Множина $M$ називається *компактною*, якщо будь-яка її нескінченна підмножина має граничну точку.

**Теорема 1.1.26. (необхідна умова компактності).** Якщо метричний простір компактний, він цілком обмежений.

Цю теорему сформульовано для метричного простору. Зрозуміло, що кожна підмножина метричного простору сама утворює метричний простір, тобто її можна формулювати для деякої підмножини метричного простору.

Зауважимо, що повна обмеженість не є достатньою умовою компактності. Так, множина $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \cap [0; 1]$ є цілком обмеженою (як обмежена множина на прямій), але некомпактною, оскільки послідовність $\frac{\sqrt{2}}{n}$ чисел з цієї множини не має граничної точки (нуль множині не належить).

**Теорема 1.1.27. (критерій компактності метричного простору).** Метричний простір $X$ компактний тоді та тільки тоді, коли він цілком обмежений та повний.

Цей загальний критерій дозволяє формулювати та доводити критерії компактності у конкретних метричних просторах. Розглянемо докладно лише один з них – у скінченновимірному просторі $\mathbb{R}_p^m$ . У цьому просторі обмеженість та цілковита обмеженість збігаються. Крім того, він повний, але ж повнота підмножини цього простору рівносильна її замкненості (див. твердження 2.4.1.) Об'єднання цих фактів дає нам можливість сформулювати наступне твердження.

**Теорема 1.1.28. (критерій компактності у скінченновимірному просторі).** Множина у скінченновимірному просторі є компактною тоді та тільки тоді, коли вона обмежена та замкнена.

Ця корисна теорема дає приклади компактних та некомпактних множин, наприклад, на прямій. Компактними будуть відрізки, одноточкові множини. Некомпактними будуть півінтервали та інтервали (вони не є замкненими), півпрямі, множини цілих, раціональних чисел (вони необмежені).

Може статися так, що деяка множина у метричному просторі не є компактною за рахунок своєї незамкненості. Але її замикання вже є компактним. Такі множини утворюють окремий клас.

**Означення 1.1.29.** Множина $M$ називається *передкомпактною* (або *відносно компактною*), якщо її замикання компактне.

Зрозуміло, що у скінченновимірному просторі передкомпактними будуть всі обмежені множини. У загальному випадку має місце наступне зрозуміле твердження.

**Твердження 1.1.30. (критерій передкомпактності).** Множина $M$ у повному метричному просторі є передкомпактною тоді та тільки тоді, коли вона цілком обмежена.

## 1.2 Принцип стискуючих відображень

При розв'язанні деяких задач важливим є питання про існування та єдиність розв'язку того чи іншого рівняння. Це питання інколи можна сформулювати як питання існування нерухомої точки відображення певного метричного простору в себе. Серед різних критеріїв існування та єдиності нерухомої точки одним з найпростіших і разом з тим, найважливіших, є принцип стискуючих відображень.

**Означення 1.2.1.** Нехай $X$ – метричний простір. Відображення $A: X \to X$ називається *стискуючим*, якщо $\exists \alpha \in (0;1): \forall x, y \in X \quad \rho(Ax, Ay) \le \alpha \rho(x, y)$.

**Твердження 1.2.2.** Будь-яке стискуюче відображення є неперервним.

**Означення 1.2.3.** Точка $x$ називається *нерухомою точкою* відображення $A$, якщо $Ax = x$.

Наведемо просту умову стискання відображення, яке задається числовою функцією.

**Твердження 1.2.4. (достатня умова стискання відображення).** Якщо функція $f(x)$ є диференційовною на $[a,b]$ та $sup_{x\in[a,b]}|f'(x)| = \alpha < 1$, тоді $f$ здійснює стискуюче відображення.

В цьому твердженні відрізок можна замінити на півпряму або навіть пряму.

**Теорема 1.2.5. (принцип стискуючих відображень).** Будь-яке стискуюче відображення, визначене у повному метричному просторі, має єдину нерухому точку.

При доведенні теореми встановлюється не лише існування та єдиність нерухомої точки, але й метод її знаходження як границі послідовності $x_n = Ax_{n-1}$, де $x_0$ – довільний елемент простору $X$.

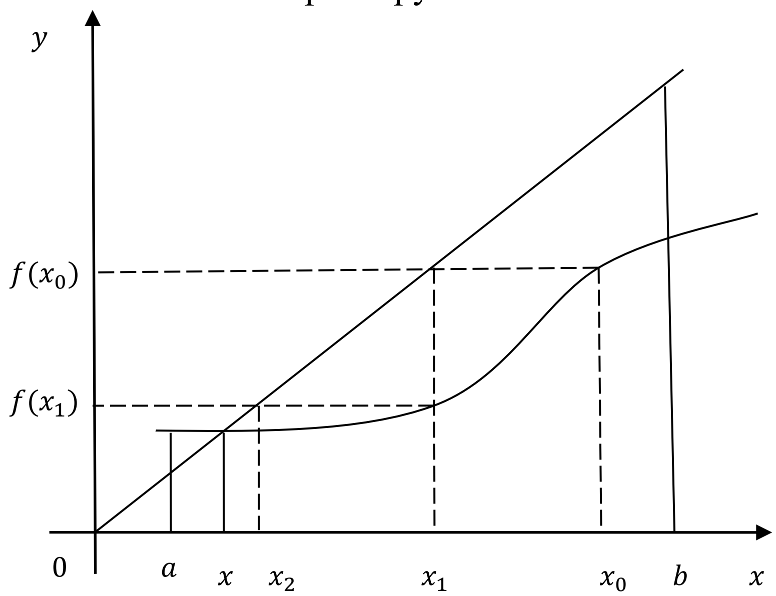


Рис.1.2.

Розглянемо лише декілька прикладів застосування принципу стискуючих відображень до розв'язання рівнянь.

Нехай задано рівняння $f(x) = x$, де $f(x)$ задовольняє умови твердження 1.2.4., тобто є диференційовною на $[a,b]$ та $sup_{x\in[a,b]}|f'(x)| = \alpha < 1$. Тоді $f$ є стискуючим відображенням та послідовність $x_0$, $x_1 = f(x_0)$ , $x_2 = f(x_1)$ ,... збігається до єдиного кореня $x$ заданого рівняння. На рис.1.2. показано хід послідовних наближень до кореня у випадку, коли $0 < f'(x) < 1$.

Нехай ми маємо більш загальне рівняння $F(x) = 0$, причому $F(a) < 0$, $F(b) > 0$ та на $[a,b]$ $0 < K_1 \le F(x) \le K_2$. Розглянемо допоміжну функцію

$f(x) = x - \lambda F(x)$ та будемо шукати розв'язок рівняння $f(x) = x$ , яке рівносильне рівнянню $F(x) = 0$ при $\lambda \neq 0$. Оскільки $f'(x) = 1 - \lambda F'(x)$, тоді $1 - \lambda K_2 \leq f'(x) \leq 1 - \lambda K_1$, тобто число $\lambda$ можна підібрати таким чином, щоб $sup_{x \in [a,b]}|f'(x)| = \alpha < 1$ та можна було застосовувати метод послідовних наближень.

Питання для самоконтролю з теми «Метричні простори»:

- Дайте означення метрики та метричного простору.
- Дайте означення дискретного метричного простору, просторів $\mathbb{R}, l_p, m$ , $\mathbb{R}_p^m, C_{[a,b]}, C_1[a,b], C_2[a,b]$.
- Дайте означення точки дотикання, граничної, внутрішньої, ізольованої, межової точки множини у метричному просторі.
- Що таке замикання множини? Яка множина називається замкненою, а яка – відкритою? Наведіть приклади відкритих та замкнених множин. Сформулюйте основні властивості відкритих та замкнених множин. Яка теорема встановлює зв'язок між відкритими та замкненими множинами?
- Яка множина називається всюди щільної, ніде не щільною? Наведіть відповідні приклади.
- Дайте означення сеперабельного метричного простору та наведіть приклади сепарабельних просторів.
- Дайте означення неперервного відображення метричних просторів.
- Яка послідовність називається збіжною у метричному просторі? А фундаментальною? Встановіть зв'язок між збіжними та фундаментальними послідовностями.
- Розкрийте зміст поняття збіжності у конкретних метричних просторах.
- Сформулюйте критерії точки дотикання та граничної точки за допомогою поняття збіжності.
- Дайте означення повного метричного простору. Наведіть приклади повних та неповних метричних просторів.
- Сформулюйте теорему про вкладені кулі.
- Встановіть зв'язок між замкненими та повними підпросторами повного метричного простору.
- Розкрийте поняття компактності у метричному просторі. Наведіть приклади компактних та некомпактних множин.
- Сформулюйте необхідну умову компактності.
- Сформулюйте критерій компактності у метричному просторі.
- Яка множина називається передкомпактною?
- Розкрийте поняття компактності у скінченновимірному просторі.
- Дайте означення стискуючого відображення.
- Сформулюйте достатню умову стискання для числових функцій.
- Сформулюйте та доведіть принцип стискуючих відображень.
- Поясніть, як принцип стискуючих відображень можна застосувати до знаходження границь числових послідовностей та для розв'язання функціональних рівнянь.

### 1.3 Методика розв'язання задач з теми «Метричні простори»

**Задача 1.3.1.** З'ясувати, чи будуть метриками на множині $X$ наступні функції: а) $X=\mathbb{R}$, $\rho(x,y)=|x-y|+\begin{cases}1, x\neq y\\0, x=y\end{cases}$; б) $X=\mathbb{R}$, $\rho(x,y)=|x+y|\cdot(x-y)^2$; в) $X=\mathbb{R}$, $\rho(x,y)=|arctg\, x-arctg\, y|$;г) $X=\mathbb{R}$, $\rho(x,y)=|x^2-\ y^2|$.

**Розв'язання:** а) Покажемо, що для заданої функції виконуються аксіоми М1-М3 з означення 1.1.1. Зрозуміло, що $\rho(x,y)=0$ тоді та тільки тоді, коли $x=y$. З властивостей модуля випливає також виконання другої аксіоми: $\rho(x,y)=|x-y|+\begin{cases}1, x\neq y\\0, x=y\end{cases}=|y-x|+\begin{cases}1, x\neq y\\0, x=y\end{cases}=\rho(y,x)$ при всіх $x,y\in\mathbb{R}$. Перевіримо тепер аксіому трикутника $\rho(x,y)\leq\rho(x,z)+\rho(z,y)$. Зрозуміло, що доцільно розглянути лише випадок, коли $x\neq y$ та $\rho(x,y)=|x-y|+1$. Якщо $x=z\neq y$, тоді $\rho(x,z)=0$, $\rho(z,y)=|z-y|+1=\rho(x,y)$, тобто нерівність трикутника перетворюється на тотожність: $\rho(x,y)=0+\rho(x,y)$. Аналогічно у випадку $x\neq z=y$. Залишається розглянути випадок, коли $x,y,z$ – попарно різні. Але тоді

$$\rho(x,y)=|x-y|+1=|x-z+z-y|+1\leq|x-z+z-y|+2\leq$$
$$\leq|x-z|+1+|z-y|+1=\rho(x,z)+\rho(z,y).$$

Отже, при всіх $x,y,z\in\mathbb{R}$ аксіома трикутника виконується, тобто функція $\rho$ задає метрику на числовій прямій.

б) Розглянемо першу аксіому метрики для функції $\rho(x,y)=|x+y|\cdot(x-y)^2$. Зрозуміло, що $\rho(x,y)=0$ тоді та тільки тоді, коли $x=y$ або $x=-y$. З цього випливає, що, наприклад, $\rho(1,-1)=0$ хоча $1\neq-1$. Наведений контрприклад показує, що задана функція не є метрикою на числовій прямій.

в) Перевіримо виконання аксіом метрики:

$$\rho(x,y)=0\Leftrightarrow|arctg\, x-arctg\, y|=0\Leftrightarrow arctg\, x=arctg\, y\Leftrightarrow x=y;$$
$$\forall\ x,y\in\mathbb{R}\ \ \rho(x,y)=|arctg\, x-arctg\, y|=|arctg\, y-arctg\, x|=\rho(y,x);$$
$$\forall\ x,y,z\in\mathbb{R}\ \ \rho(x,y)=|arctg\, x-arctg\, y|=$$
$$=|arctg\, x-arctg\, z+arctg\, z-arctg\, y|\leq$$
$$\leq|arctg\, x-arctg\, z|+|arctg\, z-arctg\, y|\leq\rho(x,z)+\rho(z,y).$$

Оскільки три аксіоми виконуються, задана функція є метрикою на просторі $\mathbb{R}$.

г) Перевіримо першу аксіому: $\rho(x,y)=|x^2-\ y^2|=0\Leftrightarrow x=\pm y$. Отже, $\rho(2,-2)=|4-\ 4|=0$, але $2\neq-2$, тобто функція не є метрикою.

**Задача 1.3.2.** З'ясувати, чи будуть метриками на площині $\mathbb{R}^2$ наступні функції: а) $\rho(x,y)=\sqrt{x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2}$ ; б) $\rho(x,y)=|2x_1-2y_1|+|x_2-y_2|$(тут $x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2)$).

**Розв'язання:** а) Покажемо, що перша аксіома метрики не виконується: якщо $x=y\neq0$, тоді $\rho(x,x)=\sqrt{2x_1^2+2x_2^2}\neq0$, тобто задана функція $\rho$ не є метрикою.

б) Перевіримо аксіоми метрики. Перша аксіома: $\rho(x,y)=|2x_1-2y_1|+|x_2-y_2|=0\Leftrightarrow|2x_1-2y_1|=0\wedge|x_2-y_2|=0\Leftrightarrow x_1=y_1\wedge x_2=y_2\Leftrightarrow x=y$.

Друга аксіома: $\rho(x,y) = |2x_1 - 2y_1| + |x_2 - y_2| = |2y_1 - 2x_1| + |y_2 - x_2| = \rho(y,x)$ при всіх $x, y \in \mathbb{R}^2$. Третя аксіома: при всіх $x, y, z \in \mathbb{R}^2$

$$\rho(x,y) = |2x_1 - 2y_1| + |x_2 - y_2| = |2x_1 - 2z_1 + 2z_1 - 2y_1| + \\ +|x_2 - z_2 + z_2 - y_2| \le |2x_1 - 2z_1| + |2z_1 - 2y_1| + |x_2 - z_2| + |z_2 - y_2| = \\ = \rho(x,z) + \rho(z,y).$$

Оскільки всі аксіоми виконуються, задана функція визначає метрику.

**Задача 1.3.3.** З'ясувати, чи збігаються послідовності в тих прикладах задачі 1.3.1, які є метричними просторами: а) $x_n = n + (-1)^n$; б) $x_n = \frac{n}{n^2+1}$.

**Розв'язання:** В задачі 1.3.1. маємо 2 метричних простори: числову пряму $\mathbb{R}$ з метриками $\rho_1(x,y) = |x-y| + \begin{cases} 1, x \ne y \\ 0, x = y \end{cases}$ та $\rho_2(x,y) = |arctg\ x - arctg\ y|$.

а) Припустимо, що послідовність $x_n = n + (-1)^n$ збігається до деякого елемента $x_0$. Але $\rho_1(x_n, x_0) = |n + (-1)^n - x_0| + 1 \to \infty$ при будь-якому $x_0$, тобто відносно $\rho_1$ послідовність не збігається. Аналогічно

$$\rho_2(x_n, x_0) = |arctg\ (n + (-1)^n) - arctg\ x_0| \to \left|\frac{\pi}{2} - arctg\ x_0\right| \ne 0,$$

при жодному $x_0$, тобто відносно $\rho_2$ послідовність $x_n = n + (-1)^n$ також не збігається.

б) Припустимо тепер, що послідовність $x_n = \frac{n}{n^2+1}$ збігається до деякого елемента $x_0$. Але $\rho_1(x_n, x_0) = \left|\frac{n}{n^2+1} - x_0\right| + 1 \to |x_0| + 1 \ne 0$ при жодному $x_0$, тобто відносно $\rho_1$ послідовність не збігається. А у другому просторі

$$\rho_2(x_n, x_0) = \left|arctg\ \frac{n}{n^2+1} - arctg\ x_0\right| \to |arctg\ x_0| = 0$$

при $x_0 = 0$ тобто відносно $\rho_2$ послідовність $x_n = \frac{n}{n^2+1}$ збігається до $x_0 = 0$.

**Задача 1.3.4.** Дослідити на збіжність послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$: а) $x_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{m}{n}\right)$ в просторі $\mathbb{R}_2^m$; б) $x_n = ((-1)^n, 0, \dots, 0)$ в просторі $\mathbb{R}_1^m$.

**Розв'язання:** Нагадаємо, що у скінченновимірному просторі збіжність за метрикою еквівалентна покоординатній збіжності.

а) Оскільки $\forall i = \overline{1,m}\ \ \frac{i}{n} \to 0$ при $n \to \infty$, послідовність $x_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{m}{n}\right)$ збігається до нульового елемента $x_0 = (0,0,\dots,0)$ простору $\mathbb{R}_2^m$.

б) Оскільки послідовність перших координат $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ не є збіжною (вона має дві граничних точки), послідовність $x_n = ((-1)^n, 0, \dots, 0)$ не збігається за метрикою простору $\mathbb{R}_1^m$.

**Задача 1.3.5.** Дослідити на збіжність послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$: а) $x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots\right)$ в просторах $l_1$ та $l_2$; б) $x_n = \left(\underbrace{0,0,\dots,0}_{n-1}, 1, 0, \dots, 0, \dots\right)$ в просторі $l_2$.

**Розв'язання:** а) Дослідимо послідовність на покоординатну збіжність: $x_1 = (1,0,0,\dots)$, $x_2 = \left(1, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots\right)$, $x_3 = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0, 0, \dots\right), \dots$. Зрозуміло, що покоординатно ця послідовність збігається до елемента $x_0 =$

$\left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{m}, \frac{1}{m+1}, \dots\right)$. Але оскільки ряд $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}$ розбігається, елемент $x_0$ не належить простору $l_1$, тобто говорити про збіжність у цьому просторі немає сенсу – послідовність не збігається у $l_1$. А ось простору $l_2$ елемент $x_0$ належить, оскільки $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} < \infty$. Отже, покоординатна збіжність має місце, перевіримо тепер збіжність за метрикою:

$$\rho(x_n, x_0) = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \to 0, n \to \infty$$

як залишок збіжного ряду. Значить, у просторі $l_2$ послідовність збігається за метрикою до елемента $x_0 = \left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{m}, \frac{1}{m+1}, \dots\right)$.

б) Розглянемо елементи цієї послідовності та знайдемо покоординатну границю, якщо вона існує: $x_1 = (1,0,0,\dots)$, $x_2 = (0,1,0,0,\dots)$, $x_3 = (0,0,1,0,0,\dots)$, … . Отже, покоординатно послідовність збігається до нульового елемента $x_0 = (0,0,0,0,\dots) \in l_2$. Перевіримо збіжність за метрикою:

$$\rho(x_n, x_0) = \sqrt{(0-0)^2 + \dots + (0-0)^2 + (1-0)^2 + (0-0)^2 + \cdots} = 1 \nrightarrow 0,$$

тобто послідовність не збігається за метрикою простору $l_2$.

**Задача 1.3.6.** У просторі $C[0,1]$ дослідити на збіжність послідовності: а) $x_n(t) = t^n$; б) $x_n(t) = t^n - t^{n+1}$.

**Розв'язання:** Фактично ми будемо досліджувати послідовності на рівномірну збіжність. У випадку а) поточкова границя буде розривною функцією $x_0(t) = \begin{cases} 0, t \in [0,1) \\ 1, t = 1 \end{cases}$, тобто $x_0 \notin C[0,1]$ і говорити про збіжність за метрикою не варто. У випадку б) гранична функція є неперервною: $x_0(t) \equiv 0$. Отже, будемо перевіряти збіжність за метрикою, для чого знайдемо $\rho(x_n, x_0) = \max_{t\in[0,1]} |x_n(t) - x_0(t)| = \max_{t\in[0,1]} (t^n - t^{n+1})$. Оскільки на кінцях відрізка $[0,1]$ функція $t^n - t^{n+1}$ приймає значення нуль, свого максимуму вона досягає всередині відрізка. Точку екстремуму знайдемо за допомогою похідної: $(t^n - t^{n+1})' = t^{n-1}(n - (n+1)t) = 0$ при $t = \frac{n}{n+1}$. Отже, $\rho(x_n, x_0) = \max_{t\in[0,1]} (t^n - t^{n+1}) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1} \to 0$ при $n \to \infty$, тобто послідовність збігається до $x_0(t) \equiv 0$ за метрикою простору $C[0,1]$.

**Задача 1.3.7.** З'ясувати, що представляють собою відкриті кулі, замкнені кулі та сфери в метричному просторі:

а) $X = \mathbb{R}$ з метрикою $\rho(x,y) = \begin{cases} |x-y|, |x-y| \le 1 \\ 1, |x-y| > 1 \end{cases}$; б) $X = \mathbb{N}$ з метрикою $\rho(m,n) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|$.

**Розв'язання:** а) Нехай спочатку $r \le 1$. Тоді замість умови $\rho(x, x_0) \le r$ можна записати $|x - x_0| \le r$, що рівносильно нерівності $x_0 - r \le x \le x_0 + r$, тобто замкненою кулею радіуса $r \le 1$ є відрізок $[x_0 - r, x_0 + r]$. Аналогічно, відкритою кулею радіуса $r \le 1$ є інтервал $(x_0 - r, x_0 + r)$, а сферою такого ж радіуса буде множина $\{x_0 - r, x_0 + r\}$.

Якщо тепер $r > 1$, тоді нерівності $\rho(x, x_0) \le r$ та $\rho(x, x_0) < r$ будуть виконуватися при довільних $x$, оскільки за означенням метрики $\rho(x, x_0) \le r$. Отже, відкритими та замкненими кулями радіуса $r > 1$ буде увесь простір. А оскільки при $r > 1$ рівність $\rho(x, x_0) = r$ неможлива, тоді сфери такого радіуса – це порожні множини.

Отже, $B_r[x_0] = \begin{cases} [x_0 - r, x_0 + r], r \le 1 \\ \mathbb{R}, r > 1 \end{cases}$, $B_r(x_0) = \begin{cases} (x_0 - r, x_0 + r), r \le 1 \\ \mathbb{R}, r > 1 \end{cases}$, $S_r[x_0] = \begin{cases} \{x_0 - r, x_0 + r\}, r \le 1 \\ \emptyset, r > 1 \end{cases}$.

б) Нехай натуральне число $m_0$ є центром кулі радіуса $r$. Тоді нерівність $\rho(m_0, n) = \left|\frac{1}{m_0} - \frac{1}{n}\right| \le r$ еквівалентна нерівності $-r + \frac{1}{m_0} \le \frac{1}{n} \le r + \frac{1}{m_0}$. Якщо $-r + \frac{1}{m_0} \le 0$, тоді ліва частина останньої нерівності виконується завжди, а права – при $n \ge \frac{m_0}{1 + m_0 r}$. Тобто замкнену кулю будуть утворювати натуральні числа, розташовані на промені $\left[\frac{m_0}{1+m_0 r}; +\infty\right)$. Якщо ж $-r + \frac{1}{m_0} > 0$, тоді замкнену кулю утворюють натуральні числа, розташовані на відрізку $\left[\frac{m_0}{1+m_0 r}; \frac{m_0}{1-m_0 r}\right]$. Цілком аналогічно визначається відкрита куля. Отже,

$$B_r[m_0] = \begin{cases} \mathbb{N} \cap \left[\frac{m_0}{1 + m_0 r}; +\infty\right), r \ge \frac{1}{m_0} \\ \mathbb{N} \cap \left[\frac{m_0}{1 + m_0 r}; \frac{m_0}{1 - m_0 r}\right], r < \frac{1}{m_0} \end{cases},$$

$$B_r(m_0) = \begin{cases} \mathbb{N} \cap \left(\frac{m_0}{1 + m_0 r}; +\infty\right), r \ge \frac{1}{m_0} \\ \mathbb{N} \\ \cap \left(\frac{m_0}{1 + m_0 r}; \frac{m_0}{1 - m_0 r}\right), r < \frac{1}{m_0} \end{cases}.$$

Зауважимо, що в кожному з цих випадків куля – це скінченна або зліченна множина натуральних чисел. Сферу з центром в точці $m_0$ радіуса $r$ будуть утворювати числа вигляду $\frac{m_0}{1 \pm m_0 r}$, якщо вони натуральні. У будь-якому іншому випадку сфера – це порожня множина.

**Задача 1.3.8.** Описати множину внутрішніх, граничних, ізольованих точок

та точок дотикання множини $M$ у просторі $X$. З'ясувати, чи буде множина $M$ відкритою, замкненою, всюди щільною, ніде не щільною у просторі $X$: а) $M = \mathbb{Q}$, $X = \mathbb{R}$ з метрикою $\rho(x, y) = \begin{cases} |x - y|, |x - y| \le 1 \\ 1, |x - y| > 1 \end{cases}$; б) $M = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $X = \mathbb{R}$ з метрикою $\rho(x, y) = |x - y|$; в) $M = (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \times \mathbb{Z}$, $X = \mathbb{R}_2^2$.

**Розв'язання:** а) Із задачі 1.3.7 а) зрозуміло, який вигляд мають околи (відкриті кулі) у просторі $X$. Розглянемо довільне раціональне число $x_0$. Околами цього числа будуть або інтервали вигляду $(x_0 - r, x_0 + r)$, або уся числова пряма $\mathbb{R}$. В будь-якому випадку в околі буде міститися нескінченна кількість раціональних чисел і нескінченна кількість ірраціональних чисел. Це означає, по-перше, що жодне раціональне число не буде внутрішньою точкою множини, тобто внутрішність множини $M$ порожня: $M^0 = \emptyset$, і множина $M$ не є відкритою.

По-друге, у цієї множини немає ізольованих точок, усі її точки є граничними. Крім того, в околі довільної ірраціональної точки міститься нескінченна кількість раціональних чисел, тобто елементів множини, яку ми розглядаємо. Отже, будь-яке ірраціональне число є граничною точкою (і точкою дотикання) множини $\mathbb{Q}$, тобто замикання множини раціональних чисел відносно заданої метрики збігається з усією числовою прямою та множина $\mathbb{Q}$ не є замкненою. Але оскільки $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, множина $M$ є всюди щільною і не є ніде не щільною в просторі $\mathbb{R}$.

б) Околом точки $x_0$ на числовій прямій є інтервал $(x_0 - r, x_0 + r)$. Зрозуміло, що в інтервалі $\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2(n+1)}, \frac{1}{n} + \frac{1}{2(n+1)}\right)$ не буде жодної точки множини $M$ крім точки $\frac{1}{n}$, тобто, по-перше, жодна точка $\frac{1}{n}$ не буде внутрішньою, по-друге, кожна точка $\frac{1}{n}$ є ізольованою точкою (точкою дотикання) множини $M$. Отже, $M^0 = \emptyset$, що означає, що множина не є відкритою.

Зауважимо, що ця множина має єдину граничну точку $x_0 = 0$, що випливає з теореми 1.1.17. Це означає, що $\overline{M} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} \cup \{0\}$, тобто множина не є замкненою ($\overline{M} \neq M$) та не є всюди щільною ($\overline{M} \neq \mathbb{R}$).

Покажемо, що задана множина є ніде не щільною. Розглянемо довільну кулю (інтервал) на числовій прямій — $(a, b)$. За означенням ніде не щільної множини потрібно знайти всередині цього інтервалу менший інтервал, в якому не буде жодного члена послідовності. Зрозуміло, що випадок, коли в $(a, b)$ немає чисел вигляду $\frac{1}{n}$, є тривіальним. Якщо в $(a, b)$ потрапляє лише одне число вигляду $\frac{1}{k}$, в якості кулі, вільної від точок послідовності $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, виберемо, наприклад, $\left(a, \frac{1}{k}\right)$. Якщо ж в інтервалі $(a, b)$ є принаймні два члени послідовності — $\frac{1}{k}, \frac{1}{k+1}$, тоді в якості інтервалу, який не містить жодної точки заданої послідовності, можна вибрати інтервал $\left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right)$. Отже, умови означення виконуються в будь-якому разі, тобто задана числова послідовність буде ніде не щільною множиною.

в) Множина $M$ — це множина точок площини, у яких перша координата ірраціональна, а друга – ціла. Геометрично – це «переривчасті» в раціональних точках прямі, паралельні осі абсцис, які мають рівняння $y = n, n \in \mathbb{Z}$. В околі (крузі) будь-якої точки вигляду $(a, n), a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$ є безліч точок з множини $M$, тобто така точка є точкою дотикання для $M$. Якщо ж розглядати точку $(a, b), a \in \mathbb{R}, b \notin \mathbb{Z}$, вона не буде точкою дотикання для $M$, оскільки на площині можна знайти окіл, в якому не буде жодного елемента множини $M$. В якості радіуса такого околу виберемо число $r < \min\{b-[b],[b]+1-b\}$. Ця куля буде розташована між сусідніми прямими $y=[b], y=[b]+1$. Отже, $\bar{M}=\mathbb{R}\times\mathbb{Z}$, тобто $M$ не є замкненою та не є всюди щільною множиною. З існування куль, які не будуть містити елементів множини $M$ можна зробити висновок, що множина $M$ буде ніде не щільною.

Оскільки в кожному околі точки $(a,n), a\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, n\in\mathbb{Z}$ множини $M$ будуть точки і з раціональними, і з ірраціональними абсцисами та ординатою $n$ (тобто як точки з множини $M$, так і точки з доповнення до множини $M$), точка $(a,n), a\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, n\in\mathbb{Z}$ не буде а ні внутрішньою, а ні ізольованою. Тобто, множини внутрішніх та ізольованих точок є порожніми та множина $M$ не є відкритою.

**Задача 1.3.9.** Дослідити на неперервність відображення $f(x)=\begin{cases}x^2, x\in[-1,1]\\ 1, x\notin[-1,1]\end{cases}$ у випадках: а) $f:(\mathbb{R},|x-y|)\to(\mathbb{R},\hat{\rho})$; б)$f:(\mathbb{R},\hat{\rho})\to(\mathbb{R},|x-y|)$, де $\hat{\rho}$ – дискретна метрика.

**Розв'язання:** Для розв'язання цієї задачі будемо користуватися означенням 1.1.19.

а) Нехай $x_0\in(-1;1)$ та $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – довільна послідовність, яка збігається до $x_0$. Тоді $\exists\, n_0: \forall\, n\geq n_0\ x_n\in(-1;1)$, тобто $f(x_n)=x_n^2$, $f(x_0)=x_0^2$. Оскільки в метричному просторі з дискретною метрикою збігаються лише стаціонарні послідовності, $f(x_n)\nrightarrow f(x_0)$, тобто в жодній точці $x_0\in(-1;1)$ відображення не буде неперервним. Якщо $x_0=\pm1$, тоді розглянемо послідовності $x_n'=1-\frac{1}{n}$ ($x_n''=-1+\frac{1}{n}$), які належать інтервалу $(-1;1)$. Тобто знову маємо попередній випадок: $x_n'\to1, x_n''\to-1$, але $f(x_n')\nrightarrow f(1), f(x_n'')\nrightarrow f(-1)$, що означає розривність відображення у точках $\pm1$. А ось на інтервалах $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$ ситуація інша. Якщо вибирати точку $x_0$ на цих інтервалах та розглядати довільну послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, яка збігається до цієї точки, буде зрозуміло, що $\exists\, n_0$: $\forall\, n\geq n_0\ x_n\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$, тобто що $f(x_n)=1$ $\forall\, n\geq n_0$. Оскільки, починаючи з номера $n_0$, послідовність $f(x_n)$ є стаціонарною, вона збігається у метричному просторі з дискретною метрикою до $f(x_0)$, тобто відображення буде неперервним в будь-якій точці множини $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

б) Нехай $x_0$ – довільне дійсне число та $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – послідовність, яка збігається до $x_0$ за дискретною метрикою. Тоді, без обмеження загальності міркувань, можна вважати послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ стаціонарною, тобто $x_n=x_0$, а з цього буде випливати, що $f(x_n)\to f(x_0)$ у просторі $(\mathbb{R},|x-y|)$, тобто відображення буде неперервним в будь-якій точці.

Зауважимо, що довільне відображення, що визначене на дискретному метричному просторі, буде неперервним на своїй області визначення.

**Задача 1.3.10.** Довести за допомогою принципу стискуючих відображень, що числова послідовність $x_n=2+\frac{1}{x_{n-1}}, x_1=2$ має границю та знайти її.

**Розв'язання:** Розглянемо допоміжну функцію $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$, яка діє на множині $X = [2, +\infty)$. За допомогою цієї функції досліджувану послідовність можна подати у вигляді $x_n = f(x_{n-1}), x_1 = 2$ . Півпряма $X = [2, +\infty)$ є замкненою підмножиною повного метричного простору $\mathbb{R}$, тобто сама є повним метричним простором (твердження 1.1.23). При цьому якщо $x \in X$, тоді $x \geq 2$, $0 \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$, $2 \leq 2 + \frac{1}{x} \leq \frac{5}{2}$, тобто $2 \leq f(x) \leq \frac{5}{2}$ або $f(x) = 2 + \frac{1}{x} \in X$ і функція $f$ відображає простір $X$ в себе. Покажемо, що ця функція є стискуючим відображенням: $\sup\limits_{x\in[2,+\infty)} |f'(x)| = \sup\limits_{x\in[2,+\infty)} \left|-\frac{1}{x^2}\right| = \sup\limits_{x\in[2,+\infty)} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{4} < 1$.

Таким чином, для функції $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$ виконуються усі умови принципу стискуючих відображень, тобто рівняння $f(x) = x$ має єдиний розв'язок, який і буде границею досліджуваної послідовності. Цей факт випливає з доведення принципу стискуючих відображень – єдина нерухома точка знаходиться методом послідовних наближень як границя послідовності $x_n = f(x_{n-1})$ . Розв'язуючи рівняння $2 + \frac{1}{x} = x$, отримуємо два корені $x = 1 \pm \sqrt{2}$, з яких тільки один — $x = 1 + \sqrt{2}$ – належить множині $X = [2, +\infty)$, тобто є границею заданої послідовності.

**Задача 1.3.11.** Показати, що рівняння $x - e^{-x} - 1 = 0$ має єдиний корінь та знайти його з точністю 0,001.

**Розв'язання:** Перетворимо це рівняння до вигляду $x = e^{-x} + 1$. Якщо увести позначення $f(x) = e^{-x} + 1$, це рівняння можна записати у вигляді $f(x) = x$ і тоді знаходження його розв'язку еквівалентне знаходженню нерухомої точки відображення $f$.

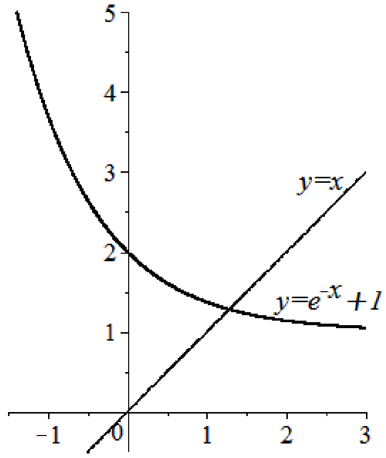


Рис. 1.2

З рисунка 1.2 добре видно, що графік функції $f(x) = e^{-x} + 1$ та пряма $y = x$ перетинаються в єдиній точці з додатною абсцисою. Дійсно, навіть без рисунка зрозуміло, що функція $f(x)$ приймає лише додатні значення, тобто не може дорівнювати недодатному значенню $x$. Більше того, оскільки $f(1) = e^{-1} + 1 \approx 1{,}3679 > 1$, а $f(2) = e^{-2} + 1 \approx 1{,}1353 < 2$, точка перетину двох графіків знаходиться на відрізку [1,2] (це видно й з Рис. 1.2). Отже, в якості повного метричного простору виберемо $X = [1, +\infty)$ (повнота цього простору випливає з твердження 1.1.23). Функція $f(x)$ спадає на цій півпрямій, $f(1) \approx 1{,}3679 > 1$, тобто $f$ дійсно відображає півпряму $[1, +\infty)$ в себе.

Покажемо, що відображення є стискуючим в $X$. Оскільки $f'(x) = -e^{-x}$, $\sup\limits_{x\in[1,+\infty)} |f'(x)| = \sup\limits_{x\in[1,+\infty)} |-e^{-x}| = \sup\limits_{x\in[1,+\infty)} e^{-x} = \frac{1}{e} < 1$. Цього достатньо для того, щоб стверджувати, що відображення є стискуючим. Отже, згідно з принципом стискуючих відображень, відображення $f$ має єдину нерухому точку, яка й є шуканим коренем рівняння. З доведення принципу стискуючих відображень [5, с.88] випливає, що нерухома точка відображення (корінь рівняння) знаходиться як границя послідовності $x_n = f(x_{n-1}), x_0 \in X$.

Виберемо $x_0 = 1$ та побудуємо послідовність $x_1 = f(1) = e^{-1} + 1 \approx 1{,}3679, x_2 = f(x_1) = e^{-1{,}3679} + 1 \approx 1{,}2546, x_3 = f(x_2) = e^{-1{,}2546} + 1 \approx 1{,}2852$

$$x_4 = f(x_3) = e^{-1{,}2852} + 1 \approx 1{,}2766, \qquad x_5 = f(x_4) = e^{-1{,}2766} + 1 \approx 1{,}2789,$$

$$x_6 = f(x_5) = e^{-1{,}2789} + 1 \approx 1{,}2783, x_7 = f(x_6) = e^{-1{,}2783} + 1 \approx 1{,}2785.$$

Границя цієї послідовності і буде шуканим коренем заданого рівняння. З побудови послідовності видно, що цей корінь приблизно дорівнює. 1,278.

**Задача 1.3.12.** З'ясувати, чи буде множина $M$ компактною або передкомпактною у метричному просторі $X$: а) $M_1 = (\mathbb{Q} \times \mathbb{R}) \cap ([0,1] \times [0,1])$, $X = \mathbb{R}_2^2$; б) $M_2 = [0,1] \times \mathbb{R}, X = \mathbb{R}_2^2$; в) $M_3$ – трикутник, $X = \mathbb{R}_2^2$; г) $M_4 = [0,1] \times \mathbb{R} \times [0,2]$, $X = \mathbb{R}_2^3$; г) $M_5$ – трикутна піраміда, $X = \mathbb{R}_2^3$.

**Розв'язання:** Згідно з теоремою 1.1.28, компактність у скінченновимірному просторі еквівалентна обмеженості та замкненості множини. Передкомпактність множини еквівалентна її обмеженості.

Обмеженими множинами серед заданих будуть множини $M_1$, $M_3$ та $M_5$. Отже, ці множини можна продовжувати досліджувати на компактність. Множини $M_2$, $M_4$ – необмежені у відповідних просторах.

Серед множин $M_1$, $M_3$ та $M_5$ замкненими будуть лише множини $M_3$ та $M_5$. Множина $M_1$ не є замкненою, оскільки $\overline{M_1} = [0,1] \times [0,1] \neq M_1$. Отже, множини $M_3$ та $M_5$ є компактними, а множина $M_1$ – передкомпактною у відповідних просторах.

### 1.4 Індивідуальне завдання №1

1. З'ясувати, чи будуть метриками на множині $X$ наступні функції.
2. З'ясувати, чи збігаються послідовності в тих прикладах задачі 1, які є метричними просторами.
3. З'ясувати, чи будуть метриками на площині $\mathbb{R}^2$ наступні функції ($x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ ).
4. З'ясувати, який вигляд мають замкнені кулі, відкриті кулі та сфери в метричному просторі $(X, \rho)$.
5. Описати множину внутрішніх, граничних, ізольованих точок та точок дотикання множини $M$ у просторі $\mathbb{R}_2^2$. З'ясувати, чи буде множина $M$ відкритою, замкненою, всюди щільною, ніде не щільною у просторі $\mathbb{R}_2^2$.

6. Дослідити послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ на збіжність у просторах: а) $l_2$;б) $C[0,1]$.
7. Довести за допомогою принципу стискуючих відображень, що числова послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ має границю та знайти її.
8. Показати, що рівняння має єдиний корінь та знайти його з точністю 0,001.
9. З'ясувати, чи буде множина $M$ компактною у метричному просторі $\mathbb{R}_2^3$.

ВАРІАНТ 1.

1. а) $X = \mathbb{R}\setminus\{0\},\ \rho(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$; б) $X = \mathbb{R},\ \rho(x,y) = |x \cdot y|$.
2. а) $x_n = \frac{1}{n}$; б) $x_n = \frac{n+1}{n+2}$.
3. а) $\rho(x,y) = |x_1 - y_1| \cdot |x_2 - y_2|$; б) $\rho(x,y) = x_1^2 + x_2^2$.
4. $X = \mathbb{R},\ \rho(x,y) = |x^3 - y^3|$.
5. Множина точок площини, обидві координати яких раціональні.
6. а) $x_n = \left(\underbrace{0,0,\dots,0}_{n-1}, \underbrace{1,1,\dots,1}_{n+1}, 0,0,\dots\right)$; б) $x_n(t) = t \cdot e^{-nt}$.
7. $x_n = \frac{x_{n-1}}{2+x_{n-1}},\quad x_1 = 1$.
8. $10x = 1 + \cos x$ .
9. $M$ – довільний куб.

ВАРІАНТ 2.

1. а) $X = (0;+\infty),\ \rho(x,y) = |\ln x - \ln y|$; б) $X = \mathbb{R},\ \rho(x,y) = (x-y)^2$.
2. а) $x_n = \sqrt{n}$; б) $x_n = \frac{n^2+1}{n^2+2}$.
3. а) $\rho(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$; б) $\rho(x,y) = |x_1 - y_2|$.
4. $X = \mathbb{R},\ \rho(x,y) = |arctgx - arctg\, y|$.
5. Множина точок площини, обидві координати яких ірраціональні.
6. а) $x_n = (0,1,0,2,\dots,0,n,0,0,0,\dots)$; б) $x_n(t) = \frac{t^n}{1+t^n}$.
7. $x_n = 1 + \frac{2}{x_{n-1}},\quad x_1 = 3$.
8. $\frac{1}{x+2} = 1 - x, x \in [0,4]$.
9. $M$ – множина точок одиничного куба з раціональними координатами.

ВАРІАНТ 3.

1. а) $X = \mathbb{R},\ \rho(x,y) = |e^x - e^y|$; б) $X = \mathbb{R}\setminus\{0\},\ \rho(x,y) = \left|\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}\right|$.
2. а) $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$; б) $x_n = n$.
3. а) $\rho(x,y) = x_1^2 + x_2^2 - y_1^2 - y_2^2$; б) $\rho(x,y) = x_1 \cdot y_1$.
4. $X = (-\infty, 0),\ \rho(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$.
5. Множина точок площини, обидві координати яких цілі.

6. а) $x_n = \left(\underbrace{0,0,\dots,0}_{n-1},(-1)^n,0,0,\dots\right)$ б) $x_n(t) = n\cdot\left(\sqrt{t+1+\frac{1}{n}}-\sqrt{t+1}\right)$.
7. $x_n = \frac{3}{8}+\frac{1}{2}x_{n-1}^2$, $x_1 = \frac{3}{8}$.
8. $x^3-2-x=0$.
9. $M$ – множина точок з раціональними координатами.

ВАРІАНТ 4.

1. а) $X=\mathbb{R}$, $\rho(x,y)=x^2+y^2$; б) $X=\mathbb{R}$, $\rho(x,y)=\sqrt{|x-y|}$.
2. а) $x_n=(-1)^n$; б) $x_n=\frac{1}{n+2}$.
3. а) $\rho(x,y)=|x_1\cdot x_2- y_1\cdot y_2|$; б) $\rho(x,y)=|x_2- y_2|$.
4. $X=\mathbb{R}$, $\rho(x,y)=|e^{-x}-e^{-y}|$.
5. Множина точок площини, у яких хоча б одна координата ціла.
6. а) $x_n=\left(\underbrace{\frac{1}{n},0,\dots,0}_{n-1},1,0,0,\dots\right)$; б) $x_n(t)=\sin t-\sin\frac{t}{n}$.
7. $x_n=\frac{2x_{n-1}}{4-x_{n-1}}$, $x_1=-3$.
8. $e^{-\frac{x}{2}}=x$.
9. $M$ – пряма лінія.

ВАРІАНТ 5.

1. а) $X=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, $\rho(x,y)=|\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y|$; б) $X=\mathbb{R}$, $\rho(x,y)=|x-y^2|$.
2. а) $x_n=-\frac{1}{n}$; б) $x_n=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{n}}$.
3. а) $\rho(x,y)=|x_1\cdot y_2|$; б) $\rho(x,y)=\max\{|x_1- y_1|,|x_2- y_2|\}$.
4. $X=\mathbb{R}$, $\rho(x,y)=|x-y|+\begin{cases}1, x\neq y\\0, x=y\end{cases}$.
5. Множина точок площини, одна з координат яких раціональна.
6. а) $x_n=\left(\frac{n+1}{n!}0,0,\dots\right)$; б) $x_n(t)=\frac{\sin nt}{n}$.
7. $x_n=1+\frac{1}{2x_{n-1}}$, $x_1=1$.
8. $-\sin x+x=0{,}25$.
9. $M$ – сфера.

ВАРІАНТ 6.

1. а) $X=\mathbb{R}$, $\rho(x,y)=|x|\cdot|x-y|$; б) $X=\mathbb{R}$, $\rho(x,y)=\left|\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}\right|$.
2. а) $x_n=n^3$; б) $x_n=\frac{(-1)^n}{n}$.
3. а) $\rho(x,y)=(x_1-x_2)^2+y_1^2$; б) $\rho(x,y)=(x_1\cdot y_1)^2$.
4. $X=\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, $\rho(x,y)=|\sin x-\sin y|$.

5. Множина точок кола $x^2 + y^2 = 1$.
6. а) $x_n = \left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots, \frac{1}{n^2} 0,0, \dots\right)$; б) $x_n(t) = \frac{t^n}{\ln(n+1)}$.
7. $x_n = 4 - \frac{3}{x_{n-1}}, \quad x_1 = 2$.
8. $ln^2 x + x - 2 = 0, x \in [1,2]$.
9. $M$ – площина $x = 5$.

ВАРІАНТ 7.

1. а) $X = \mathbb{R}, \rho(x,y) = \begin{cases} |x-y|, |x-y| < 5 \\ 8, |x-y| \geq 5 \end{cases}$; б) $X = \mathbb{R},\ \rho(x,y) = \sqrt[3]{|x-y|}$.
2. а) $x_n = n^2$; б) $x_n = \sin\frac{1}{n}$.
3. а) $\rho(x,y) = |\sin x_1 - \sin y_1|$; б) $\rho(x,y) = |(x_1^2 + x_2^2) - (y_1^2 - y_2^2)|$.
4. $X = \mathbb{N},\ \rho(m,n) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{m+n}, m \neq n \\ 0, m = n \end{cases}$.
5. Множина точок круга $x^2 + y^2 \leq 1$.
6. а) $x_n = \left(\underbrace{0,0,\dots,0}_{n-1}, n, 0,0, \dots\right)$; б) $x_n(t) = \sqrt{t^2 + \frac{1}{n^2}}$.
7. $x_n = \frac{1}{4} + \frac{x_{n-1}^2}{2}, \quad x_1 = \frac{1}{4}$.
8. $x^5 + x - 5 = 0$.
9. $M$ – довільна куля.

ВАРІАНТ 8.

1. а) $X = \mathbb{R},\ \rho(x,y) = |x \cdot y| \cdot (x^2 + y^2)$;б) $X = \mathbb{R},\ \rho(x,y) = |2^x - 2^y|$.
2. а) $x_n = \frac{1}{n}$; б) $x_n = \ln\frac{1}{n}$.
3. а) $\rho(x,y) = |x_1^2 - x_2^2 + y_1^2|$; б) $\rho(x,y) = |x_1| + |x_2|$.
4. $X = (0, +\infty),\ \rho(x,y) = |\ln x - \ln y|$.
5. Множина точок площини, у яких абсциса – парне число.
6. а) $x_n = \left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{4n^2}, \frac{1}{9n^2}, \dots\right)$; б) $x_n(t) = \frac{t}{1+n^4 t^2}$.
7. $x_n = 1 + \frac{1}{8x_{n-1}}, \quad x_1 = 1$.
8. $3x = \cos x - \sin x - \operatorname{arctg} x$.
9. $M$ – двовимірний квадрат $|x| + |y| \leq 1$.

ВАРІАНТ 9.

1. а) $X = \mathbb{N},\ \rho(m,n) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{m+n}, m \neq n \\ 0, m = n \end{cases}$; б) $X = \mathbb{R},\ \rho(x,y) = e^{|x-y|}$.
2. а) $x_n = 2 + (-1)^n$; б) $x_n = n$.
3. а) $\rho(x,y) = |\sin x_1 - \sin y_2|$; б) $\rho(x,y) = |x_1 - y_2| + |x_2 - y_1|$.
4. $X = \mathbb{R},\ \rho(x,y) = \sqrt{|x-y|}$.

5. $M = [0,4] \times \mathbb{Q}$.
6. а) $x_n = \left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{(n+1)^2}, \frac{1}{(n+2)^2}, \ldots\right)$; б) $x_n(t) = t^n - t^{2n}$.
7. $x_n = \frac{x_{n-1}}{3+x_{n-1}}, \quad x_1 = 2$.
8. $x^3 + 4x + 1{,}2 = 0$.
9. $M$ – поверхня довільного куба.

ВАРІАНТ 10.

1. а) $X = \mathbb{R}^+,\ \rho(x,y) = \left|\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}\right|$; б) $X = \mathbb{R},\ \rho(x,y) = |\sin x - \sin y|$.
2. а) $x_n = n!$; б) $x_n = \frac{1}{n^2}$.
3. а) $\rho(x,y) = \sqrt{|x_1 - y_1|}$; б) $\rho(x,y) = |x_1 \cdot x_2| + |y_1 \cdot y_2|$.
4. $X = \mathbb{R},\ \rho(x,y) = |2^{-x} - 2^{-y}|$.
5. $M = (\mathbb{Q} \cap [0,1]) \times \mathbb{Q}$.
6. а) $x_n = \left(\underbrace{1,0,\ldots,0}_{n-1}, \frac{1}{n}, 0,0,\ldots\right)$; б) $x_n(t) = e^{-\frac{t}{n}}$.
7. $x_n = \frac{1}{5} + \frac{x_{n-1}^2}{3}, \quad x_1 = \frac{1}{5}$.
8. $x^3 - x - 5{,}2 = 0$.
9. $M$ – двовимірне коло $x^2 + y^2 = 1$.

## 2 МІРА. ВИМІРНІ МНОЖИНИ ТА ВИМІРНІ ФУНКЦІЇ

*Мета вивчення теми:*

1) засвоїти поняття теорії міри;
2) ознайомитися з класифікацією систем множин, вміти визначати, яку саме систему утворюють множини;
3) визначити міру на прямокутниках на площині та на прямій;
4) продовжити міру з прямокутників на елементарні множини;
5) визначити клас вимірних за Лебегом множин;
6) знати загальну ідею побудови міри Лебега у скінченновимірному просторі;
7) знати властивості вимірних множин;
8) вміти знаходити міру Лебега вимірних множин на прямій та площині;
9) знати означення та властивості вимірних функцій;
10) вміти досліджувати функцію на вимірність;
11) вміти досліджувати послідовність вимірних функцій на різні типи збіжності;
12) знати зв’язок між різними типами збіжності послідовностей вимірних функцій.

*Основні поняття теми:*

1) кільце множин, півкільце множин, одиниця системи множин, алгебра множин, $\sigma$-кільце та $\sigma$-алгебра множин;

2) прямокутник, міра прямокутника;
3) елементарна множина, міра елементарної множини;
4) зовнішня міра множини, вимірна множина, міра Лебега;
5) борелева множина;
6) адитивність, $\sigma$- адитивність міри, неперервність міри;
7) вимірна функція, характеристична функція множини, проста функція;
8) виконання властивості майже скрізь, еквівалентні функції;
9) збіжність майже скрізь, збіжність за мірою, рівномірна збіжність послідовності вимірних функцій.

## 2.1 Міра Лебега на прямій та на площині

Поняття міри множини є природним узагальненням поняття довжини відрізка, площі плоскої фігури, об'єму просторового тіла, приросту неспадної функції тощо. Спочатку наведемо деякі означення, які стосуються сукупностей множин.

*Системою множин* називається будь-яка множина, елементи якої самі є довільними множинами. Якщо не зазначено протилежне, ми будемо розглядати системи таких множин, кожна з яких є підмножиною деякої фіксованої множини $X$.

**Означення 2.1.1.** Непорожня система множин $\mathfrak{R}$ називається *кільцем*, якщо з того, що $A, B \in \mathfrak{R}$ випливає, що $A \Delta B \in \mathfrak{R}$ та $A \cap B \in \mathfrak{R}$.

Оскільки $A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B)$ та $A \backslash B = A \Delta (A \cap B)$, тоді з того, що $A, B \in \mathfrak{R}$, випливає також належність до $\mathfrak{R}$ множин $A \cup B$ та $A \backslash B$. Отже, кільце множин є системою множин, замкненою відносно операцій об'єднання, перетину, різниці та симетричної різниці. Очевидно, що кільце замкнене і по відношенню до утворення будь-яких скінченних об'єднань та перетинів.

Будь-яке кільце містить порожню множину $\emptyset$, оскільки завжди $A \backslash A = \emptyset$. Система, що складається тільки з порожньої множини, є найменшим можливим кільцем множин.

**Означення 2.1.2.** Множина E називається *одиницею* системи множин $\mathfrak{S}$, якщо вона належить $\mathfrak{S}$ і якщо для будь-якого $A \in \mathfrak{S}$ $A \cap E = A$.

Таким чином, одиниця системи множин $\mathfrak{S}$ є фактично максимальною множиною цієї системи, що містить всі інші множини, що входять до $\mathfrak{S}$.

**Означення 2.1.3.** Кільце множин з одиницею називається *алгеброю* множин.

Прикладом алгебри є система всіх підмножин деякої множини $A$, яка при цьому буде одиницею алгебри.

**Означення 2.1.4.** Система множин $\mathfrak{S}$ називається *півкільцем*, якщо вона містить порожню множину $\emptyset$, замкнена по відношенню до утворення перетинів і з належності до $\mathfrak{S}$ множин $A$ і $A_1 \subset A$ випливає можливість подання $A$ у вигляді $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, де $A_k$ – множини з $\mathfrak{S}$, які попарно не перетинаються, та перша з яких є заданою множиною $A_1$.

Будь-яке кільце множин $\mathfrak{R}$ є півкільцем, тому що якщо $A$ і $A_1 \subset A$ належать $\mathfrak{R}$, тоді має місце розклад $A = A_1 \cup A_2$, де $A_2 = A \backslash A_1 \in \mathfrak{R}$.

Прикладом півкільця, яка не є кільцем множин, може бути сукупність всіх інтервалів $(a, b)$, відрізків $[a, b]$ і півінтервалів $[a, b)$ і $(a, b]$ на числовій прямій. Зрозуміло, що властивості півкільця для цієї системи виконуються, але навіть об'єднання двох інтервалів не мусить бути інтервалом, відрізком чи півінтервалом.

Відомо [5, с.51], що для кожної непорожньої системи множин $\mathfrak{S}$ існує єдине кільце, що містить $\mathfrak{S}$ і що міститься в будь-якому кільці $\mathfrak{R}$, яке містить $\mathfrak{S}$. Таке кільце називається *мінімальним кільцем над* $\mathfrak{S}$, або *кільцем, породженим* $\mathfrak{S}$, і позначається $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$.

**Твердження 2.1.5.** Якщо $\mathfrak{S}$ – півкільце, тоді $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$ збігається з системою множин $A$, що припускають подання у вигляді $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, де $A_k \in \mathfrak{S}$.

Тобто кільце, породжене півкільцем, утворюється усілякими скінченними об'єднаннями множин з півкільця.

Інколи доводиться розглядати об'єднання і перетини не лише скінченної, а й зліченної кількості множин.

**Означення 2.1.6.** Кільце множин називається *$\sigma$-кільцем*, якщо воно разом з кожною послідовністю множин $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ містить їх об'єднання $S = \bigcup_n A_n$.

**Означення 2.1.7.** *$\sigma$ –алгеброю* називається $\sigma$-кільце з одиницею.

Найпростішим прикладом $\sigma$-алгебри є сукупність всіх підмножин деякої множини $A$.

В аналізі важливу роль відіграють так звані борелеві множини.

**Означення 2.1.8.** Множина називається *борелевою*, якщо її можна отримати із відкритих або замкнених множин за допомогою не більш, ніж зліченної кількості операцій об'єднання, перетину та різниці.

**Означення 2.1.9.** *Прямокутником* на площині будемо називати множину на площині, яка є декартовим добутком однієї з множин $a \le x \le b$, $a \le x < b$, $a < x \le b$, $a < x < b$ та однієї з множин $c \le y \le d$, $c \le y < d$, $c < y \le d$, $c < y < d$, де $a, b, c$ та $d$ – довільні дійсні числа.

Наприклад, множина $P = [a, b] \times [c, d]$ – це звичайний замкнений прямокутник, сторони якого паралельні осям координат, якщо $a < b$ та $c < d$; $(a, b) \times (c, d)$ – відкритий прямокутник. Прямокутником буде відрізок $[a, a] \times [c, d]$, точка $[a, a] \times [c, c]$ та порожня множина (якщо $a > b$ або $c > d$).

*Прямокутником* на прямій будемо називати довільний відрізок $[a, b]$, інтервал $(a, b)$ або півінтервал $[a, b), (a, b]$.

Клас всіх прямокутників (на площині або на прямій) позначимо $\mathfrak{S}$. Зрозуміло, що цей клас є півкільцем. Для кожного із прямокутників визначимо його *міру*: $m(P) = (b - a)(d - c)$ – на площині, $m(P) = b - a$ – на прямій.

Таким чином, кожному прямокутнику $P$ поставлено у відповідність число $m(P)$ (його міра), при цьому виконуються наступні умови:

1) міра $m(P)$ приймає дійсні невід'ємні значення;
2) міра $m(P)$ *адитивна*, тобто якщо $P = \coprod_{k=1}^{n} P_k$, де $P_k \in \mathfrak{S}$, тоді

$$m(P) = \sum_{k=1}^{n} m(P_k).$$

Тут символ $\coprod_{k=1}^{n} P_k$ означає об’єднання прямокутників, що попарно не перетинаються, тобто що $P_i \cap P_k = \emptyset$ при $i \neq k$.

Зрозуміло, що міра точки та порожньої множини на площині та прямій дорівнює нулю.

Наша задача – розповсюдити, із зберіганням властивостей 1) та 2), міру $m(P)$, визначену для прямокутників, на більш широкий клас множин.

**Означення 2.1.10.** Назвемо множину *елементарною*, якщо її можна представити хоча б в один спосіб у вигляді об'єднання скінченної кількості прямокутників, що попарно не перетинаються.

**Твердження 2.1.11.** Об'єднання, перетин, різниця та симетрична різниця двох елементарних множин також являються елементарними множинами.

Отже, система елементарних множин є кільцем. Більше того, вона є мінімальним кільцем, породженим півкільцем прямокутників.

Визначимо *міру* $m'(A)$ *елементарних множин* наступним чином: якщо $A = \coprod_{k=1}^{n} P_k$, де $P_k$ – прямокутники, тоді

$$m'(A) = \sum_{k=1}^{n} m(P_k).$$

Міра $m'(A)$ не залежить від способу розкладу $A$ в суму скінченного числа прямокутників. Для прямокутників міра $m'$ збігається з даною мірою $m$. Зрозуміло, що визначена таким чином міра елементарних множин невід'ємна та адитивна.

Відмітимо наступну важливу властивість міри елементарних множин: *зліченну адитивність*, або $\sigma$ *−адитивність*.

Нехай елементарну множину $A$ подано у вигляді суми зліченної сукупності елементарних множин $A_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, що попарно не перетинаються:

$$A = \coprod_{n=1}^{\infty} A_n.$$

тоді

$$m'(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m'(A_n).$$

Нам доведеться розглядати не тільки скінченні, але і нескінченні об'єднання прямокутників. Для того, щоб при цьому не зіткнутися з множиною «нескінченної міри», обмежимося спочатку множинами, що повністю належать квадрату $\boldsymbol{E = \{0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1\}}$ на площині, або відрізку $\boldsymbol{E = [0, 1]}$ на прямій.

На сукупності всіх таких множин визначимо функцію $\boldsymbol{\mu^*(A)}$ наступним чином.

**Означення 2.1.12.** *Зовнішньою мірою* множини $\boldsymbol{A}$ називається число

$$\boldsymbol{\mu}^*(\boldsymbol{A}) = \inf_{A\subset\bigcup P_k} \sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{m}(\boldsymbol{P_k}),$$

де нижня межа береться за всіма можливими покриттями множини $\boldsymbol{A}$ скінченними або зліченними системами прямокутників.

**Означення 2.1.13.** Множина $A$ називається *вимірною за Лебегом*, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться така елементарна множина $B$, що

$$\mu^*(A\Delta B) < \varepsilon.$$

Функція $\mu^*$, яка розглядається тільки на вимірних множинах називається *мірою Лебега*. Будемо позначати її через $\mu$.

Вимірність множини означає, що її можна «як завгодно точно наблизити» елементарними множинами.

Отже, ми визначили деякий клас $\mathfrak{W}_E$ множин, які називаються вимірними, і функцію $\mu$, міру Лебега, на цьому класі.

Познайомимося з основними властивостями вимірних множин та властивостями міри Лебега.

**Твердження 2.1.14.** Доповнення вимірної множини є вимірною множиною.

**Твердження 2.1.15.** Сума і перетин скінченної кількості вимірних множин є вимірною множиною.

**Наслідок 2.1.16.** Різниця і симетрична різниця двох вимірних множин вимірні.

**Твердження 2.1.17. (адитивність міри).** Якщо $A_1, \dots, A_n$ – вимірні множини, що попарно не перетинаються, тоді

$$\mu\left(\coprod_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu\,(A_k).$$

**Твердження 2.1.18.** Сума і перетин зліченної кількості вимірних множин є вимірними множинами.

Твердження 2.1.18. підсилює твердження 2.1.15. і означає, що система вимірних множин утворює $\sigma$ – алгебру. Наступне твердження є аналогічним підсиленням твердження 2.1.17.

**Твердження 2.1.19. ( $\boldsymbol{\sigma}$ –адитивність міри).** Якщо $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ – послідовність вимірних множин, що попарно не перетинаються і $A = \coprod_n A_n$ , тоді

$$\mu(A) = \sum_{n} \mu\,(A_n).$$

Отже, ми розповсюдили міру з елементарних множин на більш широкий клас $\mathfrak{W}_E$, замкнений відносно операцій знаходження зліченних об'єднань та перетинів, тобто є $\sigma$–алгеброю з одиницею $E$. Побудована міра $\sigma$–адитивна на цьому класі. Встановлені вище теореми дозволяють описати сукупність вимірних за Лебегом множин.

Будь-яку відкриту множину, яка належить $E$, можна подати у вигляді об'єднання скінченної або зліченної кількості відкритих прямокутників, тобто вимірних множин, і в силу твердження 2.1.18., всі відкриті множини вимірні. Замкнені множини є доповненнями відкритих, а значить, вони також вимірні. Згідно твердження 2.1.18., вимірними мають бути і всі ті множини, які можуть бути отримані з відкритих і замкнутих за допомогою скінченної або зліченної кількості операцій об'єднання і перетину, тобто будь-яка борелева множина є вимірною.

Вище ми розглядали лише ті множини, які містяться в одиничному квадраті або відрізку $E$. Позбавимося тепер цього обмеження. Подамо всю площину (пряму) як суму напіввідкритих квадратів $E_{nm} = \{n < x \leq n + 1, m < y \leq m + 1\}$ ($E_n = (n, n + 1]$ ) ($n, m$ – цілі) та будемо говорити, що множина $A$ *вимірна*, якщо її перетин $A_{nm} = A \cap E_{nm}$ ($A_n = A \cap E_n$) з кожним з цих квадратів вимірний. При цьому ми покладемо, за означенням, на площині $\mu(A) = \sum_{n,m} \mu(A_{nm})$, на прямій $\mu(A) = \sum_n \mu(A_n)$.

Ряд, який стоїть праворуч, або збігається до деякого числа, або розбігається до $+\infty$. Тому міра може приймати й нескінченні значення. Всі властивості міри і вимірних множин, встановлені вище, очевидним чином переносяться на цей випадок. Потрібно відмітити лише те, що сума зліченної кількості вимірних множин скінченної міри може мати нескінченну міру. Клас вимірних множин на всій площині позначимо $\mathfrak{A}$.

Ми докладно розглянули побудову міри Лебега для плоских та лінійних множин. Аналогічно може бути побудована лебегова міра в скінченновимірному просторі. В кожному з цих випадків міра будується за одним зразком: спочатку міра визначається на $m$-вимірному прямокутнику, потім на скінченному об'єднанні таких прямокутників, а потім розповсюджується на більш широкий клас множин – на множини, вимірні за Лебегом. При цьому означення вимірності переноситься на множини в просторі будь-якої вимірності.

## 2.2 Вимірні функції та їх властивості

Ми будемо розглядати числові функції однієї змінної, але усі поняття легко переносяться на випадок функції $m$ змінних. Домовимося, що функція $f$ задана на вимірній за Лебегом множині $A$ та будемо скорочено позначати множину $\{x \in A: f(x) < c\}$ символом $\{f < c\}$. Аналогічно уводяться символи $\{f \geq c\}, \{f = c\}, \{f \leq c\}, \{f > c\}$. $\mu$ – міра Лебега на прямій.

**Означення 2.2.1.** Числова функція $f(x)$, яка задана на вимірній множині $A$, називається *вимірною,* якщо $\forall c \in \mathbb{R}$ вимірною буде множина $\{x: f(x) < c\}$.

Знак $<$ в цьому означенні можна замінити на інший, а саме, мають місце наступні результати.

**Твердження 2.2.2.** Якщо $f$ – вимірна функція, яка задана на множині $A$, то при будь-якому дійсному $c$ вимірними будуть множини $\{f \leq c\}, \{f \geq c\}$, $\{f = c\}, \{f > c\}$.

**Твердження 2.2.3.** Якщо хоча б одна з множин $\{f \leq c\}, \{f \geq c\}, \{f > c\}$ виявиться вимірною при довільному дійсному $c$, тоді функція $f$ вимірна на множині $A$ (яка також є вимірною).

Отже, в означенні 2.2.1. вимірної функції можна замінити множину $\{f < c\}$ будь-якою з множин $\{f \le c\}, \{f \ge c\}, \{f > c\}$.

Розглянемо докладно властивості вимірних функцій.

**Теорема 2.2.4.** Довільна функція, задана на множині міри нуль, вимірна.

**Теорема 2.2.5.** Вимірна функція $f$, задана на множині $A$, буде вимірною на будь-якій вимірній підмножині $B \subset A$ .

**Терема 2.2.6.** Нехай $f$ задана на вимірній множині $A$, яка подається у вигляді об'єднання скінченної або зліченної сукупності вимірних множин $A_\kappa$: $A = \bigcup_\kappa A_\kappa$. Якщо $f$ вимірна на кожній із множин $A_\kappa$, тоді вона вимірна й на $A$.

**Теорема 2.2.7.** Якщо для всіх точок вимірної множини $A$ $f(x) = k = const$, тоді функція $f$ вимірна.

**Теорема 2.2.8.** Неперервна на множині $A$ функція $f(x)$ вимірна.

**Означення 2.2.9.** *Характеристичною функцією* множини $M$ називається функція $\chi_M(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in M \\ 0, & \text{якщо } x \notin M \end{cases}$.

**Теорема 2.2.10.** Множина $M$ і її характеристична функція $\chi_M(x)$ одночасно вимірні або ні.

З цієї теореми дуже просто отримуються приклади розривних вимірних функцій.

**Означення 2.2.11.** Функція $f(x)$, визначена на деякій множині $X$ із заданою на ній мірою, називається *простою*, якщо вона вимірна і приймає не більше, ніж зліченне число значень.

Структура простих функцій характеризується наступним твердженням.

**Твердження 2.2.12.** Функція $f(x)$, яка має не більше ніж зліченну сукупність різних значень $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ вимірна тоді та тільки тоді, коли всі множини $A_n = \{x: f(x) = y_n\}$ вимірні.

**Теорема 2.2.13.** Якщо функція $f$, яка задана на множині $A$, вимірна, а $k = const \ne 0$, тоді вимірними будуть функції 1) $f + k$, 2) $kf$, 3) $|f|$, 4)$f^2$, і якщо $f(x) \ne 0$, тоді вимірна й функція 5) $\frac{1}{f}$.

**Теорема 2.2.14.** Нехай $f$ та $g$ – вимірні функції. Тоді вимірна кожна з функцій 1)$f(x) - g(x)$, 2) $f(x) + g(x)$, 3)$f(x) \cdot g(x)$, і якщо $g(x) \ne 0$, тоді вимірна також функція 4) $\frac{f(x)}{g(x)}$.

Отже, ми показали, що арифметичні дії над вимірними функціями знову приводять до вимірних функцій. Тепер покажемо, що сукупність вимірних функцій замкнена по відношенню не тільки до арифметичних операцій, але і до операції граничного переходу.

**Теорема 2.2.15.** Границя збіжної при кожному $x \in A$ послідовності вимірних функцій вимірна.

При вивчені вимірних функцій часто можна знехтувати їхніми значеннями на множині міри нуль. У зв'язку з цим виникає наступне означення.

**Означення 2.2.16.** Дві функції, $f$ та $g$, задані на одній і тій ж вимірній множині $A$, називаються *еквівалентними* (позначення: $f \sim g$), якщо

$$\mu\{x: f(x) \ne g(x)\} = 0.$$

**Означення 2.2.17.** Говорять, що деяка властивість виконана *майже скрізь* на $A$, якщо вона виконана всюди на $A$, окрім точок, які утворюють множину міри нуль. Таким чином, дві функції називають еквівалентними, якщо вони збігаються майже скрізь (м.с.).

**Приклад 2.2.18.** Нехай $f(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$. Оскільки $\mu(\mathbb{Q}) = 0$, $f(x) = 0$ майже скрізь.

**Теорема 2.2.19.** Функція $f$, визначена на деякій вимірній множині $A$ та еквівалентна деякій вимірній функції $g$, також вимірна.

Оскільки у багатьох випадках поведінка вимірної функції на той або іншій множині міри нуль для нас несуттєва, буде природно ввести наступне узагальнення поняття поточкової збіжності.

**Означення 2.2.20.** Послідовність $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ функцій, визначених на деякій множині $A$, називається *збіжною майже скрізь* до функції $f(x)$, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ для майже всіх $x \in A$ (тобто $\mu\{f_n \nrightarrow f\} = 0$).

**Приклад 2.2.21.** Послідовність функції $f_n(x) = x^n$ , визначених на відрізку $[0; 1]$, при $n \to \infty$ збігається до функції $f(x) = 0$ майже скрізь (а саме, крім точки $x = 1$).

Уведене поняття дає нам можливість узагальнити теорему 2.2.15.

**Теорема 2.2.22.** Якщо послідовність вимірних функцій $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$збігається до функції $f(x)$ майже скрізь на $A$, тоді $f$ також вимірна.

Нагадаємо відоме з математичного аналізу означення рівномірної збіжності послідовності.

**Означення 2.2.23.** Послідовність $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ функцій називається *рівномірно збіжною* на множині $A$ до функції $f(x)$, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \sup_{x\in A}|f_n(x) - f(x)| = 0$.

Зрозуміло, що з рівномірної збіжності випливає поточкова збіжність.

**Означення 2.2.24.** Говорять, що послідовність вимірних функцій $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *збігається за мірою* на множині $A$ до функції $f(x)$, якщо для будь-якого $\sigma > 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} \mu\{x: |f_n(x) - f(x)| \geq \sigma\} = 0$.

Якщо розглядати послідовності вимірних функцій на множинах скінченної міри, найсильнішою з розглянутих збіжностей виявляється рівномірна збіжність. З неї випливає поточкова (або збіжність майже скрізь), з якої в свою чергу випливає найслабкіша збіжність за мірою.

Питання для самоконтролю з теми «Міра. Вимірні множини та вимірні функції»:

- Дайте означення та наведіть приклади різних систем множин (півкільце, кільце, алгебра, $\sigma$-алгебра).
- Побудуйте систему вимірних за Лебегом множин на прямій та на площині.
- Дайте означення вимірної за Лебегом множини.
- Наведіть приклад необмеженої множини нульової міри.
- Сформулюйте основні властивості вимірних множин.

- Яка міра називається $\sigma$-адитивною?
- Які множини називаються борелевими?
- Що означає, що сукупність вимірних за Лебегом множин утворює $\sigma$-алгебру?
- Дайте різні означення вимірної числової функції.
- Який зв'язок існує між вимірними та неперервними функціями?
- Наведіть приклад розривної вимірної функції.
- Які дії можна виконувати з вимірними функціями, щоб не втратити вимірність?
- Наведіть приклад еквівалентних функцій.
- Дайте означення рівномірної збіжності, збіжності майже скрізь та збіжності за мірою послідовності вимірних функцій та встановіть зв'язок між ними.

### 2.3 Методика розв'язання задач з теми «Міра. Вимірні множини та вимірні функції»

**Задача 2.3.1.** Показати, що множина $A = \{x \in \mathbb{R}: e^x \in \mathbb{Q}\} \times [0; 2]$ є борелевою та знайти її міру.

**Розв'язання:** Оскільки множина раціональних чисел – зліченна, її можна подати у вигляді $\mathbb{Q}^+ = \coprod_{n=1}^{\infty}\{r_n\}$, тоді $\{x \in \mathbb{R}: e^x \in \mathbb{Q}\} = \coprod_{n=1}^{\infty}\{\ln r_n\}$ та $A = (\coprod_{n=1}^{\infty}\{\ln r_n\}) \times [0; 2] = \coprod_{n=1}^{\infty}(\{\ln r_n\} \times [0; 2])$, тобто множина $A$ подається у вигляді зліченного об'єднання відрізків на площині, які є замкненими множинами. Отже, $A$ – борелева множина. Оскільки $\mu(\{\ln r_n\} \times [0; 2]) = 0$, $\mu(A) = 0$.

**Задача 2.3.2.** Довести, що множина $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}(-10, arctg\, n) \backslash \mathbb{Q}$ є борелевою та знайти її міру.

**Розв'язання:** Знайдемо об'єднання інтервалів та подамо задану множину у вигляді $A = \left(-10, \frac{\pi}{2}\right) \backslash \mathbb{Q}$. Враховуючи, що зліченну множину $\mathbb{Q}$ можна подати у вигляді зліченного об'єднання одноточкових (замкнених) множин, $A = \left(-10, \frac{\pi}{2}\right) \backslash \bigcup_{n=1}^{\infty}\{r_n\}$. З такого подання випливає, що множина $A$ утворюється з різниці відкритої множини та зліченного об'єднання замкнених множин, тобто є борелевою.

Для обчислення міри множини скористаємося адитивністю міри: $\left(-10, \frac{\pi}{2}\right) = A \cup \left(\left(-10, \frac{\pi}{2}\right) \cap \mathbb{Q}\right)$, $\mu\left(-10, \frac{\pi}{2}\right) = \mu A + \mu\left(\left(-10, \frac{\pi}{2}\right) \cap \mathbb{Q}\right) = \mu A + 0$, тобто $\mu A = \mu\left(-10, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + 10$.

**Задача 2.3.3.** Довести, що множина $A = (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \times (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ є борелевою та знайти її міру.

**Розв'язання:** Задана множина – це сукупність точок площини з ірраціональними координатами. Подамо всю площину у вигляді об'єднання неперетинних множин: $\mathbb{R}^2 = A \cup (\mathbb{R} \times \mathbb{Q}) \cup (\mathbb{Q} \times \mathbb{R})$. Тоді $A = \mathbb{R}^2 \backslash ((\mathbb{R} \times \mathbb{Q}) \cup (\mathbb{Q} \times \mathbb{R}))$. Оскільки $\mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{r_n\}$, $\mathbb{R} \times \mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty}(\mathbb{R} \times \{r_n\})$, $\mathbb{Q} \times \mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty}(\{r_n\} \times \mathbb{R})$, тоді $A = \mathbb{R}^2 \backslash ((\bigcup_{n=1}^{\infty}(\mathbb{R} \times \{r_n\})) \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty}(\{r_n\} \times \mathbb{R})))$. Це означає, що задана множина подається у вигляді різниці площини (замкнена множина) та об'єднання двох зліченних об'єднань прямих (замкнених множин), отже, є множиною борелевою. Оскільки міра прямої на площині дорівнює нулю, міра зліченного об'єднання прямих також буде дорівнювати нулю, тобто $\mu(\mathbb{R}^2) = \mu A + \mu((\mathbb{R}\times\mathbb{Q}) \cup (\mathbb{Q}\times\mathbb{R})) = \mu A = +\infty$.

**Задача 2.3.4.** Довести вимірність функції $f(x) = e^{[2\sin x]}$ на числовій прямій.

**Розв'язання:** Оскільки задана функція є простою, згідно з твердженням 2.2.12, достатньо перевірити вимірність тих множин $A_n = \{x: f(x) = y_n\}$, на яких функція приймає сталі значення. Оскільки $-1 \le \sin x \le 1$, $[2\sin x]$ може приймати значення $-2,-1,0,1,2$ . При цьому сама функція буди набувати значень $e^{-2}, e^{-1}, 1, e, e^2$. Визначимо відповідні множини:

$$A_1 = \left\{x: e^{[2\sin x]} = e^{-2}\right\} = \{x: [2\sin x] = -2\} = \{x: \sin x < -0{,}5\} =$$
$$= \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{7\pi}{6} + 2\pi n; \frac{11\pi}{6} + 2\pi n\right);$$
$$A_2 = \left\{x: e^{[2\sin x]} = e^{-1}\right\} = \{x: [2\sin x] = -1\} = \{x: -0{,}5 \le \sin x < 0\} =$$
$$= \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; 2\pi n\right) \bigcup \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left(\pi + 2\pi n; \frac{7\pi}{6} + 2\pi n\right);$$
$$A_3 = \left\{x: e^{[2\sin x]} = 1\right\} = \{x: [2\sin x] = 0\} = \{x: 0 \le \sin x < 0{,}5\} =$$
$$= \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left(2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right) \bigcup \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \pi + 2\pi n\right);$$

$$A_4 = \left\{x: e^{[2\sin x]} = e\right\} = \{x: [2\sin x] = 1\} = \{x: 0{,}5 \le \sin x < 1\} =$$
$$= \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right) \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right\};$$
$$A_5 = \left\{x: e^{[2\sin x]} = e^2\right\} = \{x: [2\sin x] = 2\} = \{x: \sin x = 1\} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right\}.$$

Зрозуміло, що кожна з множин $A_n$ є вимірною, отже, вимірною буде й задана проста функція.

**Задача 2.3.5.** Довести вимірність функції $f(x) = \begin{cases} x^2, \sin x \in \mathbb{Q} \\ \sin^2 x, \sin x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ на відрізку $[0,1]$.

**Розв'язання:** Задана функція майже скрізь на $[0,1]$ дорівнює функції $g(x) = \sin^2 x$ , оскільки $\mu\{x: f(x) \ne g(x)\} = \mu(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = 0$ . Функція $g(x)$ вимірна, оскільки неперервна, Значить, згідно з теоремою 2.2.19, еквівалентна їй функція $f(x)$ також вимірна.

**Задача 2.3.6.** Дослідити послідовність функцій $f_n(x) = e^{-n|x^2-1|}$ на збіжність майже скрізь та за мірою на числовій прямій $\mathbb{R}$ . Чи буде ця послідовність збігатися рівномірно на числовій прямій?

**Розв'язання:** Зауважимо, що коли $|x^2 - 1| > 0$, $e^{-n|x^2-1|} \to 0$ при $n \to \infty$. Це означає, що задана послідовність збігається до нуля майже скрізь на числовій прямій, оскільки $\mu\{x: f(x) \nrightarrow 0\} = \mu\{-1; 1\} = 0$ . Але оскільки $\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|e^{-n|x^2-1|} - 0\right| = \sup_{x\in\mathbb{R}} e^{-n|x^2-1|} = 1 \nrightarrow 0$ , послідовність не буде збігатися рівномірно.

Перевіримо тепер збіжність до нуля за мірою. Нехай $\sigma > 0$, тоді

$$A_\sigma = \{x: |f_n(x) - f(x)| \geq \sigma\} = \left\{x: e^{-n|x^2-1|} \geq \sigma\right\} = \{x: -n|x^2 - 1| \geq \ln\sigma\} =$$

$$= \left\{x: |x^2 - 1| \leq -\frac{\ln\sigma}{n}\right\} = \begin{cases} \emptyset, \sigma > 1 \\ \left\{x: \sqrt{1 + \frac{\ln\sigma}{n}} \leq |x| \leq \sqrt{1 - \frac{\ln\sigma}{n}}\right\}, 0 < \sigma \leq 1 \end{cases} =$$

$$\begin{cases} \emptyset, c > 1 \\ \left(\sqrt{1 + \frac{\ln\sigma}{n}} \leq x \leq \sqrt{1 - \frac{\ln\sigma}{n}}\right) \cup \left(-\sqrt{1 - \frac{\ln\sigma}{n}} \leq x \leq -\sqrt{1 + \frac{\sigma}{n}}\right), 0 < \sigma \leq 1 \end{cases};$$

$$\mu(A_\sigma) = \begin{cases} 0, c > 1 \\ 2\left(\sqrt{1 - \frac{\ln\sigma}{n}} - \sqrt{1 + \frac{\ln\sigma}{n}}\right), 0 < \sigma \leq 1 \end{cases} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Це означає, що задана послідовність збігається також і за мірою на всій числовий прямій. Слід зауважити, що взагалі зі збіжності майже скрізь на множині нескінченної міри не випливає збіжність за мірою.

**Задача 2.3.7.** Довести, що послідовність функцій $f_n(x) = \chi_{[0,\frac{1}{n}]}(x)$ збігається до нуля майже скрізь на $[0; 1]$.

**Розв'язання:** Виберемо довільне значення $x_0 \in [0; 1], x_0 > 0$ та знайдемо значення елементів послідовності в цій точці. Зрозуміло, що, починаючи з деякого номеру $n_0$, $\frac{1}{n} < x_0$, тобто, починаючи з цього номеру, $f_n(x_0) = 0$. Це означає, що при будь-якому $x_0 > 0$ $f_n(x_0) \to 0$ при $n \to \infty$. Отже, послідовність збігається на півінтервалі $(0, 1]$. Лише в точці $x_0 = 0$ функції послідовності мають значення $f_n(x_0) = 1 \to 1$. Отже, задана послідовність не збігається до нуля лише в одній точці відрізка $[0; 1]$, тобто збігається майже скрізь на $[0; 1]$.

**Задача 2.3.8.** Показати, що із збіжності послідовності функцій за мірою, взагалі не випливає її збіжність майже скрізь.

**Розв'язання:** Означимо для кожного натурального $k$ на півінтервалі $(0, 1]$ функції $f_1^{(k)}, f_2^{(k)}, \dots, f_k^{(k)}, \dots$ наступним чином:

$$f_i^{(k)}(x) = \begin{cases} 1, \text{при } \frac{i-1}{k} < x \leq \frac{i}{k} \\ 0, \text{при інших значеннях } x \end{cases}.$$

Пронумерувавши всі ці функції поспіль, ми отримаємо послідовність, яка збігається за мірою до нуля: $\left\{\left|f_i^{(k)}\right| \geq \sigma\right\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{якщо } \sigma > 1 \\ \left(\frac{i-1}{k}; \frac{i}{k}\right], & \text{якщо } \sigma \leq 1 \end{cases}$,

$$\mu\left\{\left|f_i^{(k)}\right| \geq \sigma\right\} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \sigma > 1 \\ \dfrac{1}{k}, & \text{якщо } \sigma \leq 1 \end{cases}.$$

Отже, при довільному $\sigma > 0$ $\lim\limits_{k\to\infty} \mu\left\{x: \left|f_i^{(k)}(x)\right| \geq \sigma\right\} = 0$, тобто послідовність збігається до нуля за мірою. І у той же час вона не збігається в жодній точці, оскільки послідовність значень функцій в будь-якій точці з $(0, 1]$ містить нескінченну кількість нулів та нескінченну кількість одиниць, тобто не є збіжною.

## 3 ІНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

*Мета вивчення теми:*

1) ознайомитися з процедурою побудови інтеграла Лебега від простої функції та від довільної вимірної функції;
2) знати основні властивості інтеграла Лебега;
3) знати зв'язок інтеграла Лебега з інтегралом Рімана та з невласними інтегралами;
4) вміти обчислювати інтеграли Лебега від простих функцій, від довільних функцій та інтеграли по множинам нескінченної міри;
5) знати означення та основні властивості просторів Лебега $L_p[a, b]$;
6) вміти досліджувати функцію на належність просторам $L_p[a, b]$;
7) вміти досліджувати послідовність вимірних функцій на збіжність у просторах $L_p[a, b]$.

*Основні поняття теми:*

1) сумовна за Лебегом функція;
2) інтеграл Лебега від простої функції по множині скінченної міри;
3) інтеграл Лебега від довільної функції по множині скінченної міри;
4) інтеграл Лебега по множині нескінченної міри;
5) достатні умови інтегровності функції за Лебегом;
6) зв'язок між інтегралом Лебега та інтегралом Рімана;
7) простір $L_p[a, b]$, $1 \leq p < \infty$, метрика у цьому просторі.

### 3.1 Означення та основні властивості інтеграла Лебега

Ми будемо докладно розглядати інтеграл від числових функцій, заданих на вимірних множинах. Спочатку означимо інтеграл на простих функціях.

Використання простих функцій у побудові інтеграла Лебега ґрунтується на наступному твердженні.

**Твердження 3.1.1.** Для вимірності функції $f(x)$ необхідно та достатньо, щоб вона могла бути подана у вигляді границі рівномірно збіжної послідовності простих вимірних функцій.

Нехай $f$ – деяка проста функція, яка приймає значення $y_1, y_2, \ldots, y_n \ldots$; $y_i \neq y_j$ при $i \neq j$, і нехай $A$ – деяка вимірна підмножина множини $X$ скінченної міри. Природно визначити інтеграл від функції $f$ по множині $A$ рівністю

$$\int_A f(x)\,d\mu = \sum_n y_n\,\mu(A_n), \text{ де } A_n = \{x \in A, f(x) = y_n\}, \tag{3.1}$$
якщо ряд справа збігається.

**Означення 3.1.2.** Проста функція $f$ називається *інтегровною або сумовною* (за мірою $\mu$) на множині $A$, якщо ряд (3.1) абсолютно збігається. Якщо $f$ інтегровна, тоді сума ряду (3.1) називається *інтегралом від $f$ по множині A.*

**Означення 3.1.3.** Назвемо функцію $f$ *інтегровною (сумовною) на множині $A$*, якщо існує послідовність простих інтегровних на $A$ функцій $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, яка збігається рівномірно до $f$. Границю

$$I = \lim_{n\to\infty} \int\limits_A f_n(x)d\mu$$

позначимо

$$\int\limits_A f_n(x)d\mu$$

і назвемо *інтегралом від функції $f$* по множині A.

Наведемо основні властивості інтеграла Лебега по множині скінченної міои.

**Твердження 3.1.4.** Для будь-якого постійної $k$

$$\int\limits_A kf(x)d\mu = k\int\limits_A f(x)d\mu,$$

причому з існування інтеграла в правій частині випливає існування інтеграла в лівій.

**Твердження 3.1.5. (адитивність інтеграла).**

$$\int\limits_A [f(x) + g(x)]d\mu = \int\limits_A f(x)d\mu + \int\limits_A g(x)d\mu,$$

причому з існування інтегралів у правій частині випливає існування інтеграла в лівій.

**Твердження 3.1.6.** Обмежена на множині скінченної міри $A$ функція $f$ інтегровна на $A$.

**Твердження 3.1.7.** Якщо $f(x) = g(x)$ майже скрізь на $A$, тоді

$$\int\limits_A f(x)d\mu = \int\limits_A g(x)d\mu,$$

причому обидва інтеграли існують або не існують одночасно.

Цей факт означає, що при обчисленні інтеграла можна знехтувати множиною нульової міри.

**Твердження 3.1.8.** Інтеграли $I_1 = \int_A f(x)d\mu,\quad I_2 = \int_A |f(x)|d\mu$ існують або не існують одночасно.

Ця властивість істотно відрізняє інтеграл Лебега від інтеграла Рімана, оскільки для інтегралів Рімана лише з існування інтеграла від модуля функції випливає інтегровність самої функції, але не навпаки.

Ми сформулювали властивості інтеграла Лебега по фіксованій множині. Тепер будемо розглядати інтеграл Лебега як функцію множини

$$F(A) = \int_A f(x)d\mu,$$

яка визначена на сукупності вимірних множин при фіксованій функції $f(x)$.

**Твердження 3.1.9.** Якщо $A = \coprod_n A_n$, тоді

$$\int_A f(x)d\mu = \sum_n \int_{A_n} f(x)d\mu,$$

причому з існування інтеграла в лівій частині випливає існування інтегралів та абсолютна збіжність ряду у правій частині.

**Наслідок 3.1.10.** Якщо $f$ інтегровна на $A$, тоді $f$ інтегровна і на будь-якій вимірній множині $A' \subset A$.

**Твердження 3.1.11.** Якщо $A = \coprod_n A_n$, та ряд $\sum_n \int_{A_n} |f(x)|d\mu$ збігається, тоді функція $f$ інтегровна на $A$ та

$$\int_A f(x)d\mu = \sum_n \int_{A_n} f(x)d\mu.$$

**Твердження 3.1.12.** Якщо $\int_A |f(x)|d\mu = 0$, тоді $f(x) = 0$ майже скрізь.

Розповсюдимо тепер поняття інтеграла Лебега на множини нескінченної міри. Припустимо, що множину $X$ можна подати у вигляді об'єднання зліченної сукупності вимірних множин скінченної міри $X = \bigcup_n X_n$, $\mu(X_n) < \infty$ (в такому випадку міра називається $\sigma$ *-скінченною*). Якщо послідовність $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно зростає, назвемо її *вичерпною* послідовністю. Наприклад, якщо в якості $X$ вибрати множину дійсних чисел, тоді вичерпну послідовність будуть утворювати вкладені інтервали $(-n; n)$.

**Означення 3.1.13.** Вимірна функція $f$, визначена на множині $X$ з $\sigma$-скінченною мірою $\mu$, називається *сумовною* на $X$, якщо вона сумовна на кожній вимірній підмножині $A \subset X$ скінченної міри і якщо для кожної вичерпної послідовності $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ границя $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{X_n} f(x)d\mu$ існує і не залежить від вибору цієї послідовності. Ця границя називається *інтегралом від $f$ на множині $X$* і позначається символом

$$\int_X f(x)d\mu.$$

Зрозуміло, що якщо функція $f$ дорівнює нулю за межами деякої множини скінченної міри, то для неї сформульоване означення інтеграла рівносильне тому, яке було розглянуто вище.

Властивості інтеграла Лебега для випадку скінченної міри, в основному переносяться на інтеграли по множині нескінченної міри. Істотна відмінність полягає в тому, що у випадку $\mu(X) = \infty$ обмежена вимірна функція не зобов'язана бути інтегровною. Зокрема, якщо $\mu(X) = \infty$, то жодна відмінна від нуля стала не інтегрована на $X$.

З'ясуємо зв'язок між інтегралами Лебега та Рімана. При цьому обмежимося найпростішим випадком міри Лебега на прямій.

**Теорема 3.1.14.** Якщо існує інтеграл Рімана

$$I = (R)\int_a^b f(x)dx,$$

тоді $f$ інтегровна на $[a, b]$ за Лебегом і $\int_{[a,b]} f(x)d\mu = I$.

**Приклад 3.1.15.** Оскільки обмеженість є достатньою умовою інтегровності за Лебегом на довільному відрізку та лише необхідною умовою інтегровності за Ріманом, легко навести приклади функцій, що інтегруються за Лебегом, але не інтегруються за Ріманом. Такою буде функція Діріхле на відрізку [0,1]: $\varphi(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$.

**Зауваження 3.1.16.** Довільна функція $f(x) \geq 0$, для якої інтеграл Рімана $\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ існує для кожного $\varepsilon > 0$ і має скінченну границю $I$ при $\varepsilon \to 0$ (тобто для функції $f$ існує невласний інтеграл другого роду) інтегрується за Лебегом на $[a, b]$ причому $\int_{[a,b]} f(x)d\mu = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon} f(x)dx$.

Інтеграл $\int_{[a,b]} f(x)d\mu$ у випадку коли $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon} |f(x)|\, dx = \infty$, не існує за Лебегом, оскільки, згідно твердження 3.1.8., функції $f(x)$ та $|f(x)|$ інтегровні одночасно.

Нехай на відрізку $[a, b]$ задано $\sigma$ – алгебру вимірних підмножин цього відрізка та $\mu$ – це міра Лебега.

**Означення 3.1.17.** *Простором* $L_p[a, b]$ *при* $1 \leq p < \infty$ називається сукупність класів еквівалентних функцій, для яких існує інтеграл $\int_{[a,b]} |f(x)|^p\, d\mu$ (такі функції називаються сумовними з $p$-м степенем).

Зауважимо, що елементами цього простору є не окремі функції, а саме класи функцій, які майже скрізь рівні. Це пояснюється тим, що інтеграли від функцій одного класу дорівнюють одному й тому ж числу.

Метрика в просторі $L_p[a, b]$ уводиться таким чином: $\rho(f, g) = \sqrt[p]{\int_{[a,b]} |f(x) - g(x)|^p\, d\mu}$ .

**Твердження 3.1.18.** Простори $L_p[a, b]$ *при* $1 \leq p < \infty$ – повні метричні простори.

<u>Питання для самоконтролю:</u>

- Дайте означення інтеграла Лебега від простої функції.
- Сформулюйте означення інтегровної за Лебегом функції.
- Сформулюйте основні властивості інтеграла Лебега.

- Сформулюйте властивості інтеграла Лебега як функції множини.
- Встановіть зв'язок між інтегралами Рімана та Лебега.
- Як визначається інтеграл Лебега на множині нескінченної міри?
- Дайте означення та опишіть основні властивості простору $L_p[a,b]$ при $1 \le p < \infty$.

### 3.2 Методика розв'язання задач з теми «Інтеграл Лебега»

**Задача 3.2.1.** Обчислити інтеграли Лебега від простої функції: а) $\int_{[0,\sqrt{6}]}(-1)^{[x^2]}\,d\mu$; б) $\int_{[-2,2]}[x|x|]\,d\mu$.

**Розв'язання:** Скористаємося формулою (3.1) обчислення інтеграла Лебега від простої функції.

а) На $[0,\sqrt{6}]$ проста функція $[x^2]$ приймає такі значення: $y_1 = 0$ на множині $A_1 = [0,1)$, $y_2 = 1$ на множині $A_2 = [1,\sqrt{2})$, $y_3 = 2$ на множині $A_3 = [\sqrt{2},\sqrt{3})$, $y_4 = 3$ на множині $A_4 = [\sqrt{3},2)$, $y_5 = 4$ на множині $A_5 = [2,\sqrt{5})$, $y_6 = 5$ на множині $A_6 = [\sqrt{5},\sqrt{6})$, $y_7 = 6$ на множині $A_7 = \{\sqrt{6}\}$. Отже,

$$\int_{[0,\sqrt{6}]}(-1)^{[x^2]}\,d\mu = \sum_{n=1}^{7}(-1)^{y_n}\cdot\mu(A_n) =$$

$$= \mu(A_1) - \mu(A_2) + \mu(A_3) - \mu(A_4) + \mu(A_5) - \mu(A_6) + \mu(A_7) = 1 - \left(\sqrt{2}-1\right) +$$

$$+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) - \left(2-\sqrt{3}\right) + \left(\sqrt{5}-2\right) - \left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right) + 0 =$$

$$= 2\sqrt{5} + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} - 2 - \sqrt{6}.$$

б) Подамо інтеграл від простої функції у вигляді суми двох інтегралів:

$$\int_{[-2,2]}[x+|x|]\,d\mu = \int_{[-2,0]}[x-x]\,d\mu + \int_{[0,2]}[x+x]\,d\mu = \int_{[0,2]}[x+x]d\mu =$$

$$= \int_{[0,2]}[2x]d\mu = 0\cdot\mu\left[0,\frac{1}{2}\right) + 1\cdot\mu\left[\frac{1}{2},1\right) + 2\mu\left[1,\frac{3}{2}\right) + 3\mu\left[\frac{3}{2},2\right) + 4\mu\{2\} = 3.$$

**Задача 3.2.2.** Обчислити інтеграл Лебега $\int_{[0,1]} f(x)\,d\mu$, якщо $f(x) = \begin{cases} x^2, \sin x \in \mathbb{Q} \\ \sin^2 x, \sin x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$.

**Розв'язання:** Згідно з твердженням 3.1.7., інтеграли Лебега від еквівалентних функцій, дорівнюють один одному. Оскільки $f(x) = \begin{cases} x^2, \sin x \in \mathbb{Q} \\ \sin^2 x, \sin x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ майже скрізь дорівнює функції $g(x) = \sin^2 x$, яка неперерна на $[0,1]$, тобто інтегровна на цьому відрізку не лише за Лебегом, а й за Ріманом, та інтеграл Лебега для неї дорівнює інтегралу Рімана:

$$\int_{[0,1]} f(x)\,d\mu = \int_{[0,1]}\sin^2 x\,d\mu = \int_0^1 \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1(1-\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sin 2}{2}\right).$$

**Задача 3.2.3.** Обчислити інтеграл Лебега $\int_{[0,+\infty)} 2^{-x}\,d\mu$.

**Розв'язання:** Оскільки функція інтегрується по множині нескінченної міри, оберемо вичерпну послідовність множин $[0,n]$. Тоді

$$\int_{[0,+\infty)} 2^{-x}\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{[0,n]} 2^{-x} d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^n 2^{-x} dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1-2^{-n}}{\ln 2} = \frac{1-2^{-n}}{\ln 2}.$$

**Задача 3.2.4.** З'ясувати, чи належить функція $f(x) = \frac{\arcsin x}{x\sqrt{1-x}}$ простору $L_1[0,1]$? $L_2[0,1]$?

**Розв'язання:** Із зауваження 3.1.16 випливає, що якщо невід'ємна та необмежена на відрізку функція має невласний інтеграл другого роду, тоді вона інтегровна за Лебегом на цьому відрізку. Зауважимо, що задана функція має єдину особливу точку на $[0,1]$ – точку 1. Точка 0 особливою не буде, оскільки $\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{\arcsin x}{x\sqrt{1-x}} = 1$, тобто в околі точки 0 функція обмежена, тоді як $\lim\limits_{x\to 1-0} \frac{\arcsin x}{x\sqrt{1-x}} = +\infty$.

З'ясуємо, чи буде існувати інтеграл Лебега (який дорівнює невласному інтегралу другого роду):

$$\int_{[0,1]} \frac{\arcsin x}{x\sqrt{1-x}} d\mu = \int\limits_0^1 \frac{\arcsin x}{x\sqrt{1-x}} dx \sim \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = 2.$$

Символом $\sim$ позначається невласний інтеграл, який поводить себе з точки зору збіжності однаково з початковим інтегралом (ознака порівняння збіжності невласних інтегралів у граничній формі [3, с. 421]).

Отже, інтеграл $\int_{[0,1]} \frac{\arcsin x}{x\sqrt{1-x}} d\mu$ існує, що означає, що $f(x) = \frac{\arcsin x}{x\sqrt{1-x}} \in L_1[0,1]$.

Для того, щоб перевірити належність функції простору $L_2[0,1]$, потрібно розглянути питання існування інтеграла $\int_{[0,1]} \left(\frac{\arcsin x}{x\sqrt{1-x}}\right)^2 d\mu$, знову порівнюючи його з невласним інтегралом:

$$\int_{[0,1]} \left(\frac{\arcsin x}{x\sqrt{1-x}}\right)^2 d\mu = \int\limits_0^1 \left(\frac{\arcsin x}{x\sqrt{1-x}}\right)^2 dx \sim \int\limits_0^1 \frac{1}{1-x} dx = +\infty.$$

Оскільки невласний інтеграл розбігається, функція $f(x) = \frac{\arcsin x}{x\sqrt{1-x}}$ не інтегровна з квадратом на $[0,1]$, тобто $f(x) = \frac{\arcsin x}{x\sqrt{1-x}} \notin L_2[0,1]$.

Зауважимо, що якщо б на відрізку було б декілька особливих точок заданої функції, відрізок потрібно було б розбивати на такі інтервали, щоб на кожному з них особлива точка була єдиною.

### 3.3 Індивідуальне завдання №2

1. Довести, що множина $A$ є вимірною та знайти її міру Лебега.
2. Побудувати послідовність борелевих множин $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, які задовольняють наступні умови.

3. Дослідити послідовність $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ на збіжність майже скрізь та на рівномірну збіжність на $\mathbb{R}$.
4. Дослідити послідовність $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ на збіжність за мірою на $\mathbb{R}$.
5. Довести вимірність функції $f(x)$ на множині $A$ та обчислити інтеграл Лебега $\int_A f(x)\,d\mu$.
6. З'ясувати, чи належить функція $f(x)$ простору $L_1[0,1]$.
7. Визначити, чи збігається послідовність $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ у просторі $L_2[0,1]$.

ВАРІАНТ 1.

1. $A = \left(\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon |\sin x| < \frac{1}{2}, (x+y) \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\right\}\right) \cup ([0,1] \times [0,1])$.
2. $A_n \in \mathbb{R}, \mu(A_n) = +\infty, \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{N}$.
4. $x_n(t) = t^2 \cdot sin^n t^2$.
5. $x_n(t) = \aleph_{\left[n^2; n^2+\frac{1}{n}\right]}(t)$.
6. а) $\int_{[0,1]} f(x)\,d\mu$, де $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \\ \frac{1}{x-1}, x \in \mathbb{Q} \end{cases}$; б) $\int_{(0,+\infty)} e^{-2[x]}\,d\mu$.
7. $f(x) = \frac{e^x \cdot lnx}{x^2 \cdot (1-x)^4}$.
8. $f_n(x) = \sqrt{nx} \cdot \aleph_{\left[0;\frac{1}{n^2}\right]}(x)$.

ВАРІАНТ 2.

1. $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}(n, n+1)$.
2. $A_n \in \mathbb{R}, \mu(A_n) = \frac{1}{n}, \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{N}$.
3. $x_n(t) = \left(\frac{2}{\pi} arctg\ t\right)^n + sin^n 2t$.
4. $x_n(t) = 2t + \aleph_{[\ln n; \ln(n+1)]}(t)$.
5. а) $\int_{[0,1]} f(x)\,d\mu$, где $f(x) = \begin{cases} 2^x, x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \\ \sin x, x \in \mathbb{Q} \end{cases}$; б) $\int_{(0,+\infty)} \frac{d\mu}{[x+2][x+3]}$.
6. $f(x) = \frac{\aleph_{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}}(x)}{\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[5]{1-x}}$.
7. $f_n(x) = n^{-2} \cdot e^{-\frac{x}{n^2}} \cdot \aleph_{[0;+\infty)}(x)$.

ВАРІАНТ 3.

1. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$.
2. $A_n \in \mathbb{R}, \mu(A_n) = +\infty, A_{n+1}$ – підмножина $A_n, \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$.
3. $x_n(t) = \begin{cases} cos^n t, t \neq 0 \\ 0, t = 0 \end{cases}$.
4. $x_n(t) = |t| \cdot \aleph_{[\sqrt{n}; \sqrt{n+1}]}(t)$.
5. а) $\int_{(0,1]} sign(\cos \pi x)\,d\mu$; б) $\int_{(1,+\infty)} \frac{sign\ x}{[x]^2}\,d\mu$.

6. $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x}\cdot(1+x)}$.
7. $f_n(x) = \sqrt{|n - n^2x|} \cdot \aleph_{[0;\frac{1}{n})}(x)$.

ВАРІАНТ 4.

1. $A = \{x \in \mathbb{R}: e^x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\} \times [0,2]$.
2. $A_n \in \mathbb{R}, \mu(A_n) = +\infty, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$.
3. $x_n(t) = e^{-n|t^2-1|}$.
4. $x_n(t) = sin^n t \cdot \aleph_{[2\pi n;\pi+2\pi n]}(t)$.
5. a) $\int_{(1,2)} \frac{d\mu}{\sqrt[3]{x-1}}$; б) $\int_{(-\infty,0)} e^{[x]}\, d\mu$.
6. $f(x) = \frac{\cos x}{(1-x)^5}$.
7. $f_n(x) = \sqrt{1 + nx^n} \cdot \aleph_{[0;1)}(x)$.

ВАРІАНТ 5.

1. $A = \bigcup_{n=0}^{\infty}[n^3 - 5^{-n}; n^3 + 5^{-n}] \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$.
2. $A_n \in \mathbb{R}^2, \mu(A_n) = \frac{1}{2^n}, \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
3. $x_n(t) = e^{-nt^2} + \frac{nt}{1+nt}$.
4. $x_n(t) = \cos t + |t| \cdot \aleph_{\left[\sqrt[3]{n};\sqrt[3]{n+5}\right]}(t)$.
5. a) $\int_{[0,2]} 2^x \cdot \aleph_{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}}(x)\, d\mu$; б) $\int_{(0,+\infty)} sign\, (\sin \pi x)\, d\mu$.
6. $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt[5]{1-x}}$.
7. $f_n(x) = \sqrt{n} \cdot \aleph_{[0;\frac{1}{n})}(x)$.

ВАРІАНТ 6.

1. $A = (\{(x,y) \in \mathbb{R}^2: (x+y) \in \mathbb{Q}\}) \cup ([0,2] \times [-1,1])$.
2. $A_n \in \mathbb{R}^2, \mu(A_n) = +\infty, \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
3. $x_n(t) = t^2 + e^{-nt^2}$.
4. $x_n(t) = t + \aleph_{\left[n;n+\frac{1}{n^2}\right]}(t)$.
5. a) $\int_{[0,\frac{\pi}{2})} f(x)\, d\mu$, где $f(x) = \begin{cases} \sin x, \cos x \in \mathbb{Q} \\ sin^2 x, \cos x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$; б) $\int_{(0,+\infty)} sign\, \left[\frac{1}{x}\right] d\mu$.
6. $f(x) = \frac{\sin 2x}{\sqrt{x}\cdot(1-x)}$.
7. $f_n(x) = n \cdot x^{n+1} \cdot \aleph_{[0;1]}(x)$.

ВАРІАНТ 7.

1. $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{(n+1)^2}; \frac{1}{n^2}]\backslash\mathbb{Q}$.
2. $A_n \in \mathbb{R}^2, \mu(A_n) = 1, \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

3. $x_n(t) = \frac{sin^n t}{2+sin^n t}$.
4. $x_n(t) = e^{-nt^2}$.
5. а) $\int_{[0,20]} \aleph_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x)\, d\mu$; б) $\int_{(0,+\infty)} \left(\frac{2}{3}\right)^{[x]} d\mu$.
6. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-x}}, x \in [0,1]\setminus\mathbb{Q} \\ \cos x\,, x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$.
7. $f_n(x) = 2n(1-nx) \cdot \aleph_{[0;\frac{1}{n}]}(x)$.

## ВАРІАНТ 8.

1. $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon |\cos x| < \frac{\sqrt{2}}{2}, |\cos y| < \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.
2. $A_n \in \mathbb{R}, \mu(A_n) = +\infty, \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = +\infty$,
   $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ не містить жодного інтервала.
3. $x_n(t) = \frac{n^2 \cdot cos^2 t}{1+n^2 \cdot cos^2 t}$.
4. $x_n(t) = \begin{cases} e^{n(t-2)}, t \in [0,2] \\ 0, t \notin [0,2] \end{cases}$.
5. а) $\int_{[0,\pi]} \sin x \cdot \aleph_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x)\, d\mu$; б) $\int_{(-\infty,+\infty)} \frac{[\sin x]}{e^x}\, d\mu$.
6. $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$.
7. $f_n(x) = (\sqrt{n} - n\sqrt{n}x) \cdot \aleph_{[0;\frac{1}{n}]}(x)$.

## ВАРІАНТ 9.

1. $A = \bigcup_{n=0}^{\infty}[n - e^{-n}; n + 4^{-n}] \cap (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$.
2. $A_n \in \mathbb{R}^2, \mu(A_n) = \frac{1}{2^{\text{т}}}, \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{R} \times \{0\}$.
3. $x_n(t) = \frac{n^2 \cdot |\sin \pi t|}{1+n^2 \cdot |\sin \pi t|}$.
4. $x_n(t) = 1 - \aleph_{[\ln n; \ln(n+1)]}(t)$.
5. а) $\int_{[0,1)} f(x)\, d\mu$, где $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, x \in (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \cap [0,+\infty) \\ x^2, x \in \mathbb{Q} \cap [0,+\infty) \end{cases}$;
   б) $\int_{(2,+\infty)} \frac{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}(x)}{[x]^2}\, d\mu$.
6. $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^2}$.
7. $f_n(x) = (1 - nx) \cdot \aleph_{\left[0;\frac{1}{n}\right]}(x)$.

## ВАРІАНТ 10.

1. $A = [0,1] \times \{y \in \mathbb{R} \colon e^y < 1\} \times (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$.
2. $A_n \in \mathbb{R}, \mu(A_n) = +\infty, \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$.

3. $x_n(t) = \sqrt[n]{(x+1)^2}\, sin^n x$.
4. $x_n(t) = \begin{cases} e^{n(t-1)}, t \in [0,1] \\ 1, t \notin [0,1] \end{cases}$.
5. а) $\int_{[0,1]} f(x)\, d\mu$, где $f(x) = \begin{cases} 3^x, x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \\ \cos x + x, x \in \mathbb{Q} \end{cases}$; б) $\int_{(0,+\infty)} \frac{[\sin x]}{x}\, d\mu$.
6. $f(x) = \frac{tg\, x}{x\cdot(1-x)}$.
7. $f_n(x) = n \cdot e^{-nx} \cdot \aleph_{[0;1]}(x)$.

## 4 ЛІНІЙНІ НОРМОВАНІ ПРОСТОРИ ТА ЛІНІЙНІ НЕПЕРЕРВНІ ОПЕРАТОРИ НА НИХ

*Мета вивчення теми:*
1) засвоїти поняття теорії нормованих просторів;
2) знати означення норми та вміти перевіряти аксіоми норми;
3) знати приклади та основні властивості класичних нормованих просторів;
4) вміти досліджувати послідовності на збіжність у різних нормованих просторах;
5) ознайомитися з поняттями скалярного добутку, евклідового та гільбертового простору;
6) знати приклади івклідових та гільбертових просторів та формули скалярного добутку на них;
7) знати зв’язок між різними класами просторів та вміти класифікувати простори;
8) знати основні поняття теорії лінійних неперервних операторів;
9) вміти досліджувати оператори на лінійність, неперервність, обмеженість;
10) вміти обчислювати норму лінійного неперервного оператора;
11) знати поняття теорії оборотності лінійних неперервних операторів, зокрема, теорему Банаха про обернений оператор;
12) вміти досліджувати лінійний неперервний оператор на різні типи оборотності та знаходити обернений оператор.

*Основні поняття теми:*
1) норма, нормований простір;
2) приклади нормованих просторів;
3) збіжність у нормованому просторі, банахів простір;
4) скалярний добуток, евклідів простір, нескінченновимірний простір, гільбертів простір, приклади просторів;
5) оператор, лінійний оператор, неперервний оператор, лінійний обмежений оператор;
6) норма лінійного обмеженого оператора, простір лінійних неперервних операторів;

7) добуток операторів, алгебраїчний обернений оператор, оборотність оператора, неперервна оборотність оператора.

## 4.1 Лінійні нормовані простори. Гільбертові простори

На відміну від метрики, поняття норми вводиться лише на лінійних просторах, тобто на множинах, на яких задано операції додавання елементів та множення їх на скаляри. В залежності від того, на дійсні чи комплексні скаляри відбувається множення, розглядають дійсні або комплексні лінійні простори. Домовимося у подальшому розглядати лише дійсні простори.

**Означення 4.1.1.** Нехай $X$ – дійсний лінійний простір. Функція $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}^+$ називається *нормою*, якщо для неї виконуються наступні аксіоми:

Н1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

Н2) $\forall\ x \in X\ \forall\ \lambda \in \mathbb{R}\ \ \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$;

Н3) $\forall\ x, y \in X\ \ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ – аксіома трикутника.

При цьому пара $(X, \|\cdot\|)$ називається *лінійним нормованим простором* або просто *нормованим простором*.

Зауважимо, що метричні та нормовані простори тісно пов'язані між собою.

**Твердження 4.1.2.** Кожний лінійний нормований простір є метричним, метрика в якому задається формулою $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

Отже, кожний нормований простір є метричним простором, тобто в нормованих просторах можна розглядати всі поняття та об'єкти, які уведені у метричних просторах. Зокрема, це поняття збіжності послідовності.

**Означення 4.1.3.** Послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ елементів нормованого простору $X$ *збігається* до елемента $x_0 \in X$, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0$. При цьому елемент $x_0$ називається *границею послідовності* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

В якості прикладів нормованих просторів ми можемо розглядати відомі нам метричні простори. Зауважимо, що в кожному з цих просторів числові значення $\rho(x, y)$ та $\|x - y\|$ будуть однаковими.

1) *Простір дійсних чисел* $\mathbb{R}$, де норма задається формулою $\|x\| = |x|$.

2) *Простір послідовностей* $l_p$, $1 \leq p < \infty$ з нормою елемента $x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)$

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p}.$$

3) *Простір обмежених послідовностей* $l_\infty = m < \infty$ з нормою елемента $x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)$

$$\|x\| = \sup_i |x_i|.$$

4) *Арифметичний* $m$ *-вимірний простір* $\mathbb{R}_p^m$, $1 \leq p \leq \infty$ з нормою елемента $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ в залежності від параметра $p$:

$$\text{при } 1 \leq p < \infty \qquad \|x\| = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p\right)^{1/p},$$

$$\text{при } p = \infty \qquad \|x\| = \max_{1 \le i \le m} |x_i|.$$

5) *Простір* $C[a,b]$ з нормою функції $x(t)$

$$\|x\| = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|.$$

6) *Простори неперервних функцій* $C_1[a,b], C_2[a,b]$ з нормами

$$\|x\| = \int_a^b |x(t)|\, dt, \|x\| = \sqrt{\int_a^b |x(t)|^2\, dt},$$

відповідно.

7) *Простори сумовних функцій* $L_p[a,b], 1 \le p < \infty$ з нормою

$$\|x\| = \left( \int_{[a,b]} |x(t)|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Серед нормованих просторів виділимо клас повних нормованих просторів, тобто таких, в яких будь-яка фундаментальна послідовність збігається.

**Означення 4.1.4.** Повний лінійний нормований простір називається *банаховим* простором.

Зрозуміло, що прикладами банахових просторів будуть простори $\mathbb{R}, \mathbb{R}_p^m, l_p, m, C[a,b], L_p[a,b]$.

На лінійному просторі можна також задати операцію скалярного добутку, що надасть можливість розглянути ще один клас просторів.

**Означення 4.1.5.** Нехай $X$ – дійсний лінійний простір. Функція $(\cdot,\cdot): X \times X \to \mathbb{R}$ називається *скалярним добутком*, якщо для неї виконуються наступні аксіоми:

C1) $(x,x) \ge 0; (x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0;$

C2) $\forall\ x, y \in X \ \ (x,y) = (y,x)$ – аксіома симетрії;

C3) $\forall\ x \in X\ \forall\ \lambda \in \mathbb{R} \ \ (\lambda x, y) = \lambda(x,y);$

C4) $\forall\ x, y, z \in X \ \ (x+y, z) = (x,z) + \rho(y,z).$

При цьому простір с заданим на ньому скалярним добутком, називається *евклідовим простором.*

**Твердження 4.1.6.** Кожний евклідів простір є нормованим простором, в якому норма задається формулою $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$.

Прикладами евклідових просторів будуть такі простори:

1) *Арифметичний* $m$ *-вимірний простір* $\mathbb{R}_2^m$ зі скалярним добутком векторів $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ та $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot y_i.$$

2) *Простір послідовностей* $l_2$ зі скалярним добутком послідовностей $x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)$ та $y = (y_1, y_2, \dots, y_i, \dots)$

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i\cdot y_i.$$

3) *Простір неперервних функцій* $C_2[a,b]$ зі скалярним добутком

$$(x,y)=\int_a^b x(t)\cdot y(t)dt.$$

4) *Простір сумовних функцій* $L_2[a,b]$ зі скалярним добутком

$$(x,y)=\int_{[a,b]} x(t)\cdot y(t)d\mu.$$

**Означення 4.1.7.** Лінійний простір називається *нескінченновимірним*, якщо в ньому для довільного $n\in\mathbb{N}$ існують $n$ лінійно незалежних елементів.

В протилежному випадку простір називається *скінченновимірним*.

**Означення 4.1.8.** Повний нескінченновимірний евклідів простір називається *гільбертовим* простором.

Серед розглянутих вище евклідових просторів $l_2, \mathbb{R}_2^m, C_2[a,b], L_2[a,b]$ простір $\mathbb{R}_2^m$ не є нескінченновимірним, а простір $C_2[a,b]$ не є повним, отже прикладами гільбертових просторі є простори $l_2, L_2[a,b]$.

**4.2 Лінійні неперервні оператори**

Одним із найважливіших класів відображень нормованих просторів є клас лінійних неперервних операторів.

**Означення 4.2.1.** Нехай $X,Y$ – лінійні нормовані простори. Відображення $A: X\to Y$ називається *лінійним оператором*, якщо $\forall\, x,y\in X$ та $\forall\, \alpha,\beta\in\mathbb{R}$ виконується умова $A(\alpha x+\beta y)=\alpha Ax+\beta Ay$.

Взагалі, оператор – це довільне відображення між двома нормованими просторами. Областю визначення оператора називається множина $D(A)=\{x\in X: \exists y\in Y: y=Ax\}$, а областю значень – множина $R(A)=\{y\in Y: \exists x\in X: y=Ax\}$

Якщо не сказано протилежне, будемо вважати, що $D(A)=X$, тобто що оператор задано на всьому просторі.

Зауважимо, що з лінійності оператора випливає, що $A0=A(x-x)=Ax-Ax=0$ . Цю умову можна вважати необхідною умовою лінійності оператора.

**Означення 4.2.2.** Оператор $A$ називається *неперервним в точці* $x_0\in X$, якщо він є неперервним відображенням, тобто якщо

$$\forall\ \{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X: x_n\to x_0\ \ \Longrightarrow\ Ax_n\to Ax_0.$$

**Твердження 4.2.3.** Якщо лінійний оператор $A$ неперервний в одній точці, він буде неперервним на всьому просторі.

Якщо оператор неперервний на всьому просторі, будемо називати його просто *неперервним*.

Зрозуміло, що для неперервних операторів виконується умова

$$A\left(\lim_n x_n\right)=\lim_n Ax_n.$$

**Означення 4.2.4.** Лінійний оператор $A$ називається *обмеженим*, якщо $\exists c > 0 \ \ \forall x \in X \quad \|Ax\| \leq c\|x\|$.

**Теорема 4.2.5.** Лінійний оператор є неперервним тоді та тільки тоді, коли він обмежений.

Ця теорема дає можливість перевірять обмеженість лінійного оператора замість його неперервності, що інколи буває значно простіше.

**Означення 4.2.6.** *Нормою* лінійного неперервного оператора $A: X \to Y$ називається число

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}. \tag{4.1}$$

З цього означення випливає, що

$$\forall x \in X \quad \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|. \tag{4.2}$$

Більше того, $\|A\|$ – це інфімум констант $c$, для яких нерівність $\|Ax\| \leq c\|x\|$ виконується при всіх $x \in X$. Таким чином, можна дати інше означення норми лінійного неперервного оператора.

**Означення 4.2.7.** *Нормою* лінійного неперервного оператора $A: X \to Y$ називається число

$$\|A\| = \inf\{c > 0 : \forall x \in X \quad \|Ax\| \leq c \cdot \|x\|\}.$$

Сукупність лінійних неперервних (обмежених) операторів, що діють між просторами $X, Y$, будемо позначати символом $\mathcal{L}(X, Y)$. Якщо $X = Y$, тоді $\mathcal{L}(X, X) = \mathcal{L}(X)$. На цій множині задамо лінійні операції додавання та множення на дійсний скаляр. Для довільних $x \in X$ та $\alpha \in \mathbb{R}$ покладемо

$$(A + B)x = Ax + Bx, (\alpha A)x = \alpha Ax.$$

**Твердження 4.2.8.** Норма лінійного оператора (4.1) є нормою на множині $\mathcal{L}(X, Y)$, тобто множина $\mathcal{L}(X, Y)$ є лінійним нормованим простором.

Зауважимо, що простір $\mathcal{L}(X, Y)$ при виконанні певних умов буде повним. А саме, має місце місце наступний результат.

**Теорема 4.2.9.** Якщо простір $Y$ – банаховий, тоді простір $\mathcal{L}(X, Y)$ також банаховий.

## 4.3 Оборотність лінійних неперервних операторів

Існування оберненого відображення – це питання, на якому ґрунтується можливість розв'язання різноманітних рівнянь (диференціальних, інтегральних тощо). Розглянемо це питання для лінійних неперервних операторів.

**Означення 4.3.1.** Нехай $A: X \to Y, B: Y \to Z$. *Добутком операторів* $B$ та $A$ називається оператор $BA: X \to Z$, який діє за правилом $(BA)x = B(Ax)$.

**Зауваження 4.3.2.** Зауважимо, крім того, що добуток двох неперервних операторів є неперервним оператором як композиція неперервних відображень. Отже, якщо $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, $B \in \mathcal{L}(Y, Z)$, тоді $BA \in \mathcal{L}(X, Z)$. Неперервність добутку можна встановити іншим чином: для довільного $x \in X$

$$\|(BA)x\| \leq \|B\|\|Ax\| \leq \|B\|\|A\|\|x\|.$$

З цього випливає, по-перше, що оператор $BA$ є обмеженим (неперервним), та, по-друге, оцінка $\|BA\| \leq \|B\|\|A\|$.

Зрозуміло, що операція множення не є комутативною, тобто у загальному випадку $BA \neq AB$. У просторі $\mathcal{L}(X)$ будемо розглядати *одиничний (тотожний)* оператор $I: x \to x$.

**Означення 4.3.3.** *Алгебраїчним оберненим* до оператора $A: X \to Y$ називається оператор $A^{-1}: Y \to X$, який здійснює обернене відображення, тобто такий, що $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Відомо, що для існування оберненого відображення, заданого на множині $R(A)$, необхідно та достатньо, щоб оператор $A$ був ін'єкцією.

**Твердження 4.3.4.** Лінійний оператор $A: X \to Y$ є ін'єктивним (у нього існує алгебраїчний обернений) тоді та тільки тоді, коли його *ядро* $Ker\ A = \{x \in X: Ax = 0\}$ нульове, тобто $Ker\ A = \{0\}$.

Отже, нульове ядро є критерієм існування алгебраїчного оберненого відображення $A^{-1}$. Але навіть коли оператор має алгебраїчний обернений, він може бути заданий лише на множині значень оператора $A$, а не на всьому просторі $Y$. Згідно цього, виникає нове поняття.

**Означення 4.3.5.** Оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ називається *оборотним*, якщо він має алгебраїчний обернений оператор $A^{-1}$, який задано на всьому просторі $Y$. При цьому оператор $A^{-1}$ називається *оберненим* оператором.

Оскільки існування алгебраїчного оберненого оператора рівносильне ін'єктивності, а існування оберненого відображення на всьому просторі $Y$ – сюр'єктивності оператора $A$, оборотність оператора рівносильна його бієктивності. Тобто можна говорити, що оператор називається оборотним, якщо він є бієктивним, або якщо $Ker\ A = \{0\}$ та $R(A) = Y$.

**Твердження 4.3.6.** Оператор, обернений до лінійного, лінійний. Інакше кажучи, якщо $A$ – лінійний оборотний оператор, тоді обернений оператор $A^{-1}$ також лінійний.

Отже, властивість лінійності зберігається для оберненого оператора. Натомість неперервність (обмеженість) оберненого оператора має місце не завжди.

**Означення 4.3.7.** Оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ називається *неперервно оборотним*, якщо він оборотний та обернений оператор є $A^{-1}$ є неперервним, тобто якщо $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.

Зауважимо, що поняття оборотності та неперервної оборотності не еквівалентні. Обернений оператор може існувати, але не бути неперервним. Але є клас просторів, в яких ці два поняття збігаються, тобто оборотність оператора гарантує його неперервну оборотність. Відповідний результат встановлює наступна теорема.

**Теорема 4.3.8. (Банаха про обернений оператор).** Нехай $X, Y$ – банахові простори. Якщо оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ – бієктивний, він неперервно оборотний. Інакше кажучи, з оборотності лінійного неперервного оператора, який діє між банаховими просторами, випливає його неперервна оборотність.

Питання для самоконтролю:

- Дайте означення норми.
- Встановіть зв'язок між метричними та нормованими просторами.

- Дайте означення збіжної послідовності у нормованому просторі.
- Дайте означення та наведіть приклади банахових просторів.
- Дайте означення евклідових та гільбертових просторів.
- Встановіть зв'язок між різними класами просторів.
- Наведіть приклади гільбертових просторів.
- Який оператор називається лінійним?
- Дайте означення неперервного та обмеженого оператора. Як пов'язані між собою ці поняття для лінійних операторів?
- Дайте означення норми лінійного неперервного оператора.
- Якою нормою наділений простір лінійних неперервних операторів?
- Дайте означення добутку двох операторів.
- Дайте означення алгебраїчної оборотності оператора та її критерій.
- Який оператор називається оборотним?
- Дайте означення неперервно оборотного оператора.
- Сформулюйте теорему Банаха про обернений оператор.
-В яких просторах поняття оборотності та неперервної оборотності еквівалентні?

### 4.4 Методика розв'язання задач з теми «Лінійні нормовані простори та лінійні неперервні оператори на них»

**Задача 4.4.1.** З'ясувати, чи буде нормою на просторі неперервних функцій $C[a,b]$ функція $\varphi(x) = \max_{a \le t \le \frac{a+b}{2}} |x(t)|$.

**Розв'язання:** Перевіримо першу аксіому норми: $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. В нашому випадку $\varphi(x) = \max_{a \le t \le \frac{a+b}{2}} |x(t)| = 0 \Leftrightarrow \forall t \in \left[a; \frac{a+b}{2}\right]\ x(t) = 0$. Зрозуміло, що з цього не випливає, що $x(t) = 0\ \forall t \in [a;b]$.Наприклад, функція $x_0(t) = \begin{cases} 0, t \in \left[a; \frac{a+b}{2}\right] \\ t - \frac{a+b}{2}, t \in \left(\frac{a+b}{2}; b\right] \end{cases}$ не дорівнює нулю в кожній точці відрізка, але $\varphi(x_0) = 0$. Отже, перша аксіома норми не виконується, значить, задана функція не є нормою на просторі неперервних функцій.

**Задача 4.4.2.** З'ясувати, чи визначає функція $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n - x_{n+1})^2$ норму на просторі $l_2$ (тут $x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots)$).

**Розв'язання:** Перевіримо виконання аксіом норми.

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n - x_{n+1})^2 = 0 \Leftrightarrow \forall n\ (x_n - x_{n+1})^2 = 0 \ \Leftrightarrow \forall n\ x_n = x_{n+1}.$$

Це означає, що елемент $x$ має вигляд $x = (c, c, \dots c, \dots)$. Але за умови $x \in l_2$ ряд $\sum_{i=1}^{\infty} c^2$ має бути збіжним. Це можливо лише у випадку $c = 0$, тобто коли $x = 0$. Перша аксіома норми виконується.

Перевіримо другу аксіому: зрозуміло, що

$$\varphi(\lambda x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda x_n - \lambda x_{n+1})^2 = \lambda^2 \varphi(x) \neq |\lambda| \varphi(x).$$

Це означає, що друга аксіома при довільному $\lambda \in \mathbb{R}$ місця не має, лише при $\lambda = \pm 1$, тобто задана функція норму не визначає.

**Задача 4.4.3.** З'ясувати, чи визначає функція $f(x,y)$ скалярний добуток на площині ( $x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2)$): а) $f(x,y)=x_1x_2+y_1y_2$; б) $f(x,y)=x_1y_1+x_2y_2$.

**Розв'язання:** а) Перевіримо виконання аксіом скалярного добутку: $f(x,x)=x_1x_2+x_1x_2=2x_1x_2$. Зрозуміло, що це число може бути від'ємним наприклад, якщо $x=(1,-2)$ ).Отже, задана функція скалярний добуток не визначає.

б) $f(x,x)=x_1^2+x_2^2\geq 0; f(x,x)=x_1^2+x_2^2=0 \Leftrightarrow x_1^2=x_2^2=0 \Leftrightarrow x_1=x_2=0 \Leftrightarrow x=0$ – перша аксіома виконується;

$\forall\, x,y\; f(x,y)=x_1y_1+x_2y_2=y_1x_1+y_2x_2=f(y,x)$ – виконується друга аксіома;

$\forall\, x,y\;\; \forall\lambda\in\mathbb{R}\quad f(\lambda x,y)=\lambda x_1y_1+\lambda x_2y_2 = \lambda(x_1y_1+x_2y_2)=\lambda f(x,y)$ – виконується третя аксіома;

$\forall\, x,y,z \qquad f(x+y,z)=(x_1+y_1)z_1+(x_2+y_2)z_2=(x_1z_1+x_2z_2)+(y_1z_1+y_2z_2)=f(x,z)+f(y,z)$ – виконується четверта аксіома.

Для заданої функції виконуються усі аксіоми скалярного добутку, тобто вона визначає скалярний добуток.

**Задача 4.4.4.** Перевірити лінійність, неперервність оператора $A\colon X\to X$ та знайти його норму.

**Розв'язання:** а) $A\colon l_2\to l_2$, $x=(x_1,x_2,\dots,x_i,\dots)$, $Ax=\left(\frac{x_1}{2},\frac{x_2}{2^2},\dots,\frac{x_i}{2^i},\dots\right)$.

По-перше, доведемо, що $A\colon l_2\to l_2$, тобто, якщо $x\in l_2$, тоді $Ax\in l_2$. Для цього треба показати, що ряд $\sum_{i=1}^{\infty}\left|\frac{x_i}{2^i}\right|^2$збігається. Дійсно,

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left|\frac{x_i}{2^i}\right|^2=\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2\cdot\frac{1}{4^i}\leq\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2<\infty,$$

тому що $x\in l_2$. Отже, $\forall x\in l_2\; Ax\in l_2$.

Перевіримо тепер лінійність цього оператора за означенням: нехай $x=(x_1,x_2,\dots,x_i,\dots)\in l_2$, $y=(y_1,y_2,\dots,y_i,\dots)\in l_2$ , $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, тоді

$$A(\alpha x+\beta y)=\left(\frac{\alpha x_1+\beta y_1}{2},\frac{\alpha x_2+\beta y_2}{2^2},\dots,\frac{\alpha x_i+\beta y_i}{2^i},\dots\right)=\alpha\left(\frac{x_1}{2},\frac{x_2}{2^2},\dots,\frac{x_i}{2^i},\dots\right)+$$
$$+\beta\left(\frac{y_1}{2},\frac{y_2}{2^2},\dots,\frac{y_i}{2^i},\dots\right)=\alpha Ax+\beta Ay,$$

тобто оператор $A$ – лінійний, отже, замість неперервності можна перевіряти його обмеженість. Нехай $x\in l_2$, тоді

$$\|Ax\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}\left|\frac{x_i}{2^i}\right|^2}\leq\frac{1}{2}\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2}=\frac{1}{2}\|x\|,$$

тобто$\|Ax\|\leq\frac{1}{2}\|x\|$, що означає обмеженість оператора та дає оцінку для його норми : $\|A\|\leq\frac{1}{2}$ (ця оцінка випливає з означення 4.2.7.).

Для лінійного обмеженого оператора $A$ вірна нерівність

$$\forall x\in l_2\quad \|Ax\|\leq\|A\|\cdot\|x\|.$$

Виберемо $x_0 = (1,0,\ldots,0,\ldots)$. Для нього також

$$\|Ax_0\| \le \|A\| \cdot \|x_0\|.$$

Але $\|x_0\| = 1$, $Ax_0 = \left(\frac{1}{2},0,\ldots,0,\ldots\right)$ тобто $\|Ax_0\| = \frac{1}{2}$, значить, $\frac{1}{2} \le \|A\| \cdot 1$.

Таким чином, одночасно виконуються дві нерівності: $\frac{1}{2} \le \|A\|$ та $\frac{1}{2} \ge \|A\|$, тобто $\|A\| = \frac{1}{2}$.

б) $A: C[0,1] \to C[0,1], (Ax)(t) = \int_0^1 t \cdot s \cdot x(s)ds$.

Якщо $x(s)$ – неперервна на $[0,1]$ функція, тоді $s \cdot x(s)$ також неперервна, тобто інтегровна на відрізку $[0,1]$. Значить, функція $(Ax)(t) = t \cdot \int_0^1 s \cdot x(s)ds$ також неперервна на $[0,1]$, тобто належить $C[0,1]$. Отже, оператор $A$ дійсно діє у просторі $C[0,1]$. Перевіримо його лінійність: нехай $x(t), y(t) \in C[0,1]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, тоді

$$A(\alpha x + \beta y) = \int_0^1 t \cdot s \cdot (\alpha x(s) + \beta y(s))ds = \alpha \int_0^1 tsx(s)ds + \beta \int_0^1 tsy(s)ds =$$

$$= \alpha Ax + \beta Ay,$$

тобто оператор $A$ – лінійний.

Замість доведення неперервності оператора $A$ доведемо його обмеженість: нехай $x(t) \in C[0,1]$, тоді

$$\|Ax(t)\| = \max_{t\in[0,1]} \left|\int_0^1 t \cdot s \cdot x(s)ds\right| = \left|\int_0^1 s \cdot x(s)ds\right| \le \int_0^1 s \max_{t\in[0,1]} |x(t)|ds =$$

$$= \|x\| \int_0^1 sds = \frac{1}{2}\|x\|,$$

тобто оператор $A$ обмежений, та $\|A\| \le \frac{1}{2}$.

Для оператора $A$ виконується умова $\forall x \in C[0,1]$ $\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|$. Виберемо $x_0(t) \equiv 1 \in C[0,1]$, тоді $\|(Ax_0)(t)\| \le \|A\| \cdot \|x_0(t)\|$. Але $\|x_0(t)\| = \max_{t\in[0,1]} |x_0(t)| = 1$, $(Ax_0)(t) = \int_0^1 t \cdot sds = t \cdot \int_0^1 sds = \frac{1}{2}t$, $\|Ax_0(t)\| = \max_{t\in[0,1]} \frac{1}{2}t = \frac{1}{2}$. Отже, $\frac{1}{2} \le \|A\| \cdot 1$.

З цієї нерівності та з того, що $\|A\| \le \frac{1}{2}$, випливає що $\|A\| = \frac{1}{2}$.

**Задача 4.4.5.** Дослідити на неперервну оборотність оператор $A \in \mathcal{L}(l_2)$, якщо:

а) $x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots)$, $Ax = (x_1 + x_2, x_2, x_3, \ldots)$;

б) $x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots)$, $Ax = (0, x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots)$;

в) $x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots)$, $Ax = \left(x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \ldots\right)$.

**Розв'язання:** а) Перевіримо, чи здійснює оператор $A$ ін'єктивне відображення. Для цього знайдемо ядро оператора, тобто розв'яжемо рівняння $Ax = 0$:

$$(x_1 + x_2, x_2, x_3, \ldots) = (0,0,0, \ldots).$$

Це рівняння рівносильне нескінченній системі рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_n = 0, n \geq 2 \end{cases}.$$

Зрозуміло, що ця система має тільки нульовий розв'язок, тобто $\forall n \ x_n = 0$ або $x = 0$. Отже, $Ker\ A = \{0\}$.

Перевіримо, чи буде оператор $A$ сюр'єктивним, тобто чи дорівнює образ простору $l_2$ всьому $l_2$. Інакше кажучи, треба перевірити, чи має рівняння $Ax = y$ розв'язок у просторі $l_2$ при будь-якій правій частині $y \in l_2$.

Нехай $y = (y_1, y_2, y_3, \ldots)$ – довільний елемент простору $l_2$. Рівняння $Ax = y$ буде рівносильним нескінченній системі рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = y_1 \\ x_n = y_n, n \geq 2 \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи буде елемент

$$x_0 = (y_1 - y_2, y_2, y_3, \ldots).$$

Доведемо, що цей $x_0$ дійсно належить простору $l_2$:

$$(y_1 - y_2)^2 + \sum_{i=2}^{\infty} y_i^2 < \infty, \text{ тому що } y \in l_2.$$

Отже, $R(A) = l_2$, тобто $A$ є бієктивним оператором. Відомо, що простір $l_2$ є банаховим, тобто до оператора $A$ можна застосувати теорему Банаха про обернений оператор та стверджувати, що $A$ є неперервно оборотним оператором.

При цьому оператор $A^{-1}$ було отримано при розв'язанні рівняння $Ax = y$, яке рівносильне рівнянню $x = A^{-1}y$, тобто обернений оператор діє так:

$$A^{-1}y = (y_1 - y_2, y_2, y_3, \ldots).$$

б) Доведемо, що цей оператор не є сюр'єктивним відображенням. Дійсно, розв'яжемо рівняння $Ax = y$, де $y$ – довільний елемент з простору $l_2$.

Це рівняння перепишемо у вигляді:

$$(0, x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots) = (y_1, y_2, y_3, \ldots).$$

Зрозуміло, що воно буде мати розв'язок тоді та тільки тоді, коли $y_1 = 0$. Але $y$ – довільний елемент простору $l_2$, тобто перша координата $y_1$ може бути будь-яким дійсним числом. З цього випливає, що ті елементи $y \in l_2$, у яких перша координата ненульова, не належать образу $R(A)$, тобто $R(A)$ є підпростором простору $l_2$, але $R(A) \neq l_2$. Дійсно, ніякий елемент $x \in l_2$ під дією оператора $A$ не перейде в елемент, наприклад, $y = (1,0,0, \ldots)$. Отже, $A$ не є сюр'єкцією, тобто не існує оберненого відображення $A^{-1}: l_2 \to l_2$ та оператор $A$ не має оберненого оператора.

в) Знову перевіряємо ін'єктивність оператора та знаходимо його ядро:

$$\left(x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \ldots\right) = (0,0,0, \ldots).$$

Це рівняння рівносильне нескінченній системі рівнянь:

$\forall n \ \ \frac{x_n}{n} = 0 \ \Leftrightarrow \forall n \ x_n = 0$ або $x = 0$. Отже, $Ker\ A = \{0\}$.

Перевіримо, чи буде оператор $A$ сюр'єктивним, тобто чи дорівнює $R(A)$ всьому $l_2$. Інакше кажучи, треба перевірити, чи має рівняння $Ax = y$ розв'язок у просторі $l_2$ при будь-якій правій частині $y \in l_2$.

Нехай $y = (y_1, y_2, y_3, \dots)$ – довільний елемент простору $l_2$. Рівняння $Ax = y$ буде рівносильним нескінченній системі рівнянь: $\forall n \, \frac{x_n}{n} = y_n$. Зрозуміло, що розв'язком цієї системи буде елемент $x_0 = (y_1, 2y_2, 3y_3, \dots)$. Але елемент такого вигляду буде належати простору $l_2$ не для будь-якого $y$. Наприклад, якщо $y = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right) \in l_2$, тоді відповідний $x_0$ має вигляд $x_0 = (1,1,1, \dots)$, тобто не належить простору $l_2$.

Отже, $R(A) \neq l_2$, тобто $A$ не є сюр'єктивним оператором, тому не буде оборотним.

# 5 ЛІНІЙНІ НЕПЕРЕРВНІ ФУНКЦІОНАЛИ

*Мета вивчення теми:*

1) знати основні поняття теорії лінійних неперервних функціоналів;
2) вміти досліджувати функціонали на лінійність, неперервність, обмеженість;
3) вміти обчислювати норму лінійного неперервного функціонала;
4) знати загальний вигляд лінійних неперервних функціоналів у просторах послідовностей та у гільбертових просторах;
5) знати поняття та зміст слабкої збіжності послідовностей у нормованих просторах;
6) вміти досліджувати послідовності на сильну та слабку збіжність у нормованих просторах.

*Основні поняття теми:*

1) функціонал, лінійний функціонал, неперервний функціонал, лінійний обмежений функціонал;
2) норма лінійного обмеженого функціонала, спряжений простір;
3) слабко збіжна послідовність, сильно збіжна послідовність.

## 5.1 Означення та властивості лінійних неперервних функціоналів

Познайомимося тепер з одним з найважливіших прикладів лінійних неперервних операторів – лінійними неперервними функціоналами, які мають чисельні застосування в математиці. Зауважимо, що функціонал – це частковий випадок оператора, тому основні означення та факти, які стосуються операторів, без суттєвих змін переносяться на функціонали.

**Означення 5.1.1.** Нехай $X$ – лінійні нормовані простори. *Функціоналом* називається довільне відображення $f: X \to \mathbb{R}$.

**Означення 5.1.2.** Функціонал $f: X \to \mathbb{R}$ називається *лінійним*, якщо $\forall\, x, y \in X$ та $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ виконується умова $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$.

Прикладами лінійних функціоналів є наступні відображення:

1. $f: l_2 \to \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)$, $f(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2$.

2. $f: C[a;b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \int_a^b x(t)dt$; $f(x) = x(a)$.

**Означення 5.1.3.** Функціонал $f$ називається *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо він є неперервним відображенням, тобто якщо

$$\forall\ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X: x_n \to x_0 \ \Longrightarrow\ f(x_n) \to f(x_0).$$

Як і для операторів, з неперервності лінійного функціонала в одній точці випливає його неперервність на всьому просторі. Якщо функціонал неперервний на всьому просторі, будемо називати його просто *неперервним*.

Зрозуміло, що для неперервних функціоналів також виконується умова

$$f\left(\lim_n x_n\right) = \lim_n f(x_n).$$

**Означення 5.1.4.** Лінійний функціонал $f$ називається *обмеженим*, якщо $\exists c > 0\ \ \forall x \in X\ \ \ |f(x)| \le c\|x\|$.

**Теорема 5.1.5.** Лінійний функціонал є неперервним тоді та тільки тоді, коли він обмежений.

**Означення 5.1.6.** *Нормою* лінійного неперервного функціонала $f$ називається число

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}. \qquad (5.1)$$

З цього означення випливає, що

$$\forall x \in X \quad |f(x)| \le \|f\| \cdot \|x\|. \qquad (5.2)$$

Більше того, $\|f\|$ – це інфімум констант $c$, для яких нерівність $|f(x)| \le \|f\| \cdot \|x\|$ виконується при всіх $x \in X$. Таким чином, можна дати інше означення норми лінійного неперервного функціонала.

**Означення 5.1.7.** *Нормою* лінійного неперервного функціонала $f$ називається число

$$\|f\| = \inf\{c > 0: \forall x \in X \quad |f(x)| \le c \cdot \|x\|\}.$$

Нагадаємо, що символом $\mathcal{L}(X,Y)$ ми позначаємо **с**укупність лінійних неперервних (обмежених) операторів, що діють між просторами $X, Y$. У випадку $Y = \mathbb{R}$ простір $\mathcal{L}(X,\mathbb{R})$ позначається $X^*$ та називається простором, спряженим до $X$.

**Означення 5.1.8.** *Спряженим* до простору $X$ називається простір лінійних неперервних функціоналів, заданих на $X$.

Оскільки спряжений простір $X^*$ є частковим випадком простору $\mathcal{L}(X,Y)$, він також є нормованим простором з нормою, що задається формулою (5.1). Більше того, оскільки простір дійсних чисел $\mathbb{R}$ є банаховим, з теореми 4.2.9. випливає наступний результат.

**Теорема 5.1.9.** Спряжений простір $X^*$ до нормованого простору $X$ є банаховим простором.

Зауважимо, що для багатьох нормованих просторів спряжені до них простори добре відомі та докладно описані. Отже, відомий і загальний вигляд лінійних неперервних функціоналів у таких нормованих просторах. Ми докладно зупинимося лише на просторах послідовностей та гільбертовому просторі.

**Теорема 5.1.10.** Нехай $p > 1$ і $1/p + 1/q = 1$. Тоді $l_p{}^* = l_q$ .

Інакше кажучи, для будь-якого лінійного неперервного функціонала $f$, заданого на $l_p$, існує такий елемент $(f_1, f_2, \dots, f_k, \dots) \in l_q$, що для довільного $x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots) \in l_p$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k x_k \, . \qquad (5.3)$$

Вірно й зворотне: для будь-якого елемента $(f_1, f_2, \dots, f_k, \dots) \in l_q$ формула (9.3) визначає функціонал $f \in {l_p}^*$. При цьому $\|f\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^q\right)^{1/q}$.

З теореми 5.1.10. випливає, що ${l_2}^* = l_2$, тобто простір $l_2$ збігається зі своїм спряженим. Це не випадково, такий результат має місце для будь-якого гільбертового простору.

**Теорема 5.1.11. (Рісса).** Нехай $H$ — гільбертів простір. Тоді для будь-якого функціонала $f \in H^*$ існує єдиний елемент $u \in H$ такий, що $\forall\, x \in H$

$$f(x) = (x, u). \qquad (5.4)$$

При цьому $\|f\| = \|u\|$. Зворотно, для будь-якого $u \in H$ формула (5.4) визначає функціонал $f$ з нормою $\|f\| = \|u\|$.

Ця теорема фактично дозволяє ототожнити гільбертів простір та спряжений до нього.

## 5.2 Слабка збіжність у нормованих просторах

Існування лінійних неперервних функціоналів дозволяє розглянути поняття слабкої збіжності у нормованому просторі.

**Означення 5.2.1.** Нехай $X$ – лінійний нормований простір. Послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ називається *слабко збіжною* до елемента $x_0 \in X$, якщо для будь-якого $f \in X^*$ $f(x_n) \to f(x_0)$.

Слабку збіжність послідовності позначають таким чином: $x_n \overset{\omega}{\to} x_0$. На відміну від слабкої, збіжність за нормою простору називають сильною збіжністю. Це легко пояснити, оскільки зі збіжності за нормою випливає слабка збіжність, тобто збіжність за нормою є «сильнішою»:

$$|f(x_n) - f(x_0)| \le \|f\| \|x_n - x_0\|.$$

З цієї нерівності випливає також, що якщо послідовність не збігається слабко, вона не збігається також і за нормою.

**Теорема 5.2.2. (необхідна умова слабкої збіжності).** Якщо $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — слабко збіжна послідовність у нормованому просторі, тоді існує таке число $C$, що для всіх $n$ $\|x_n\| \le C$. Інакше кажучи, будь-яка слабко збіжна послідовність у нормованому просторі обмежена.

Наступна теорема часто буває корисна для фактичної перевірки слабкої збіжності тієї чи іншої послідовності.

**Теорема 5.2.3.** Послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ елементів нормованого простору $X$ слабко збігається до $x \in X$, якщо:

1) $||x_n||$ обмежені в сукупності деякою константою $M$;

2) $f(x_n) \to f(x)$ для всякого $f \in \Delta$, де $\Delta$ — деяка множина, лінійна оболонка якої всюди щільна в $X^*$.

Таким чином, для перевірки слабкої збіжності послідовності достатньо перевірити її обмеженість та збіжність $f(x_n) \to f(x)$ не для всіх функціоналів $f$, а лише для тих, які утворюють всюди щільний лінійний підпростір простору

$X^*$. Ця теорема дає можливість сформулювати умови слабкої збіжності послідовності у конкретних нормованих просторах.

Розглянемо зміст поняття слабкої збіжності в деяких конкретних просторах.

**Твердження 5.2.4.** У скінченновимірному просторі $\mathbb{R}_p^m$ послідовність збігається слабко тоді та тільки тоді, коли збігається сильно.

**Твердження 5.2.5.** У просторах $l_p,\ 1 < p < \infty$ послідовність збігається слабко тоді та тільки тоді, коли вона обмежена $(\exists M > 0\ \forall n\ \ ||x_n|| \leq M)$ та збігається покоординатно.

Слабка збіжність в $l_p$ не збігається з сильною. Прикладом послідовності, яка збігається слабко, але не збігається сильно, є послідовність елементів $e_n = \left(\underbrace{0,0,\dots,0}_{n-1}, 1,0,\dots\right)$. Покоординатно вона збігається до нуля, але за нормою не збігається, оскільки $\|e_n\| = 1 \nrightarrow 0$.

Розглянемо тепер слабку збіжність обмеженої послідовності у просторі неперервних функцій $C[a,b]$. В якості множини $\Delta$ вибирається сукупність лінійних функціоналів, кожний з яких є значенням функції в деякій фіксованій точці $t_0$: $\delta_{t_0}(x_n) = x_n(t_0)$. Для кожного такого функціонала умова $\delta_{t_0}(x_n) \to \delta_{t_0}(x)$ означає, що $x_n(t_0) \to x(t_0)$, тобто поточкову збіжність функціональної послідовності.

**Твердження 5.2.6.** У просторі $C[a,b]$ послідовність $x_n$ збігається слабко тоді та тільки тоді, коли вона обмежена $(\exists M > 0\ \forall n\ \ ||x_n|| \leq M)$ та збігається поточково.

**Твердження 5.2.7.** У просторах $L_p[a,b]$ при $1 \leq p < \infty$ послідовність $x_n$ збігається слабко до елемента $x$ тоді та тільки тоді, коли вона обмежена $(\exists M > 0\ \forall n\ \ ||x_n|| \leq M)$ та $\int_{[0,\tau]} x_n(t)d\mu \to \int_{[0,\tau]} x(t)d\mu$ при $n \to \infty$ для будь-якого $\tau \in [a,b]$.

<u>Питання для самоконтролю:</u>

- Дайте означення лінійного неперервного та лінійного обмеженого функціонала.
- Як визначається норма лінійного неперервного функціонала?
- Який простір називається спряженим? Як задається норма у спряженому просторі?
- Опишіть, який вигляд мають лінійні неперервні функціонали, задані на просторі $l_p,\ 1 < p < \infty$.
- Сформулюйте теорему Рісса про загальний вигляд лінійного неперервного функціонала у гільбертовому просторі.
- Дайте означення слабкої збіжності послідовності у нормованому просторі.
- Сформулюйте необхідну умову слабкої збіжності послідовності у нормованому просторі.

- Сформулюйте критерій слабкої збіжності послідовності у нормованому просторі.
- Який зміст слабкої збіжності у скінченновимірному просторі? У просторах $l_p,\ 1 < p < \infty$? У просторі $C[a,b]$? У просторах $L_p[a,b]$ при $1 \le p < \infty$?

### 5.3 Методика розв'язання задач з теми «Лінійні неперервні функціонали»

**Задача 5.3.1.** Перевірити лінійність, неперервність функціонала $f$ та знайти його норму.

**Розв'язання:** а) $X = l_1, x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots), f(x) = x_1 + x_2$.

Перевіримо лінійність цього функціонала за означенням: нехай $x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots) \in l_2,\ y = (y_1, y_2, \dots, y_k, \dots) \in l_2$ , $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
тоді $f(\alpha x + \beta y) = \alpha x_1 + \beta y_1 + \alpha x_2 + \beta y_2 = \alpha x_1 + \alpha x_2 + \beta y_1 + \beta y_2 =$
$= \alpha f(x) + \beta f(y)$,
тобто функціонал $f$ – лінійний, отже, замість неперервності можна перевіряти його обмеженість. Нехай $x \in l_1$, тоді

$$|f(x)| = |x_1 + x_2| \le |x_1| + |x_2| \le \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| = \|x\|,$$

тобто $|f(x)| \le \|x\|$, що означає обмеженість функціонала та дає оцінку для його норми : $\|f\| \le 1$.

З нерівності (5.2) випливає що для лінійного обмеженого функціонала $f$ вірна нерівність

$$\forall x \in l_2 \quad |f(x)| \le \|f\| \cdot \|x\|.$$

Виберемо $x_0 = (1,0, \dots ,0, \dots)$. Для нього також $|f(x_0)| \le \|f\| \cdot \|x_0\|$. Але $\|x_0\| = 1, f(x_0) = 1$ тобто $|f(x_0)| = 1$, значить, $1 \le \|f\| \cdot 1$.

Таким чином, одночасно виконуються дві нерівності: $1 \le \|f\|$ та $\|f\| \le 1$, тобто $\|f\| = 1$.

б) Розглянемо тепер той же самий функціонал, але в іншому просторі $X = l_2$, та покажемо, що його норма буде іншою.

Нехай $x \in l_2$, тоді, користуючись нерівністю Коші-Буняковського $|(x, y)| \le \|x\| \ \cdot \|y\|$, отримаємо оцінку

$$|f(x)| = |x_1 + x_2| = \big((1,1,0,0, \dots), (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)\big) \le$$
$$\le \|(1,1,0,0, \dots)\| \|(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)\| = \sqrt{2}\|x\|,$$

тобто $|f(x)| \le \sqrt{2}\|x\|$, що означає обмеженість функціонала та дає оцінку для його норми : $\|f\| \le \sqrt{2}$.

В нерівності $|f(x)| \le \|f\| \cdot \|x\|$ виберемо $x_0 = (1,1,0,0, \dots ,0, \dots)$ . Для нього також

$$|f(x_0)| \le \|f\| \cdot \|x_0\|.$$

Але $\|x_0\| = \sqrt{2}$, $f(x_0) = 1 + 1 = 2$ тобто $2 \le \|f\| \cdot \sqrt{2}$.

Таким чином, одночасно виконуються дві нерівності: $\sqrt{2} \le \|f\|$ та $\|f\| \le \sqrt{2}$, тобто $\|f\| = \sqrt{2}$.

в) $X = C[0,1], f(x) = \int_0^1 (t+1)x(t)dt$.

Перевіримо його лінійність: нехай $x(t), y(t) \in C[0,1]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, тоді

$$f(\alpha x + \beta y) = \int_0^1 (t+1)\big(\alpha x(t) + \beta y(t)\big)dt = \alpha \int_0^1 (t+1)x(t)dt +$$

$$+\beta \int_0^1 (t+1)y(t)ds = \alpha f(x) + \beta f(y),$$

тобто функціонал $f$ – лінійний.

Замість доведення неперервності функціонала $f$ доведемо його обмеженість: нехай $x(t) \in C[0,1]$ , тоді

$$|f(x)| = \left|\int_0^1 (t+1)x(t)dt\right| \le \int_0^1 (t+1)|x(t)|dt \le \int_0^1 (t+1)\max_{s\in[0,1]}|x(s)|dt =$$

$$= \|x\| \int_0^1 (t+1)dt = \frac{3}{2}\|x\|,$$

тобто функціонал $f$ обмежений, та $\|f\| \le \frac{3}{2}$ .

Для функціонала $f$ виконується нерівність $\forall x \in C[0,1]$ $|f(x)| \le \|f\| \cdot \|x\|$. Виберемо $x_0(t) \equiv 1 \in C[0,1]$, тоді $|f(x_0)| \le \|f\| \cdot \|x_0(t)\|$.
Але $\|x_0(t)\| = \max_{t\in[0,1]}|x_0(t)| = 1$, $f(x_0) = \int_0^1 (t+1)dt = \frac{3}{2}$. Отже, $\frac{3}{2} \le \|f\| \cdot 1$.

З цієї нерівності та з того, що $\|f\| \le \frac{3}{2}$, випливає що $\|f\| = \frac{3}{2}$.

**Задача 5.3.2.** Перевірити лінійність, неперервність функціонала $f$ та знайти його норму, якщо $x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots) \in l_2$, $f(x) = x_1 + 3x_2 - x_4$.

**Розв'язання:** Оскільки $l_2$ – гільбертів простір, застосуємо теорему Рісса, тобто подамо заданий функціонал у вигляді скалярного добутку $f(x) = 1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + (-1) \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + \cdots = (x, u)$ , де $u = (1,3,0,-1,0,0,\dots)$ . Зрозуміло, що $u \in l_2$. Отже, функціонал є лінійним та неперервним, а його норму знаходиться за формулою $\|f\| = \|u\| = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{11}$ .

**Задача 5.3.3.** Перевірити лінійність, неперервність функціонала $f$ та знайти його норму, якщо $x(t) \in L_2[0,1]$, $f(x) = \int_{[0,\frac{1}{2}]} x(t)(t+1)d\mu$.

**Розв'язання:** Знову застосуємо теорему Рісса та подамо функціонал у вигляді скалярного добутку $f(x) = (x, u)$, де $u(t) = \begin{cases} t+1, t \in [0,\frac{1}{2}] \\ 0, t \notin [0,\frac{1}{2}] \end{cases}$. Оскільки функція $u(t)$ майже скрізь неперервна, вона належить просторові $L_2[0,1]$, тобто заданий функціонал є лінійним та неперервним. А його норма дорівнює $\|f\| = \|u\| = \sqrt{\int_{[0,\frac{1}{2}]} (t+1)^2 d\mu} = \sqrt{\int_0^{\frac{1}{2}} (t+1)^2 dt} = \sqrt{\frac{19}{24}}$.

**Задача 5.3.4.** Дослідити послідовність $x_n(t) = t^n - t^{2n}$ на слабку на сильну збіжність у просторі $C[0,1]$.

**Розв'язання:** Зрозуміло, що $\|x_n - 0\| = \max\limits_{t\in[0,1]}|t^n - t^{2n}| \le 2$ , тобто послідовність є рівномірно обмеженою. При будь-якому $t \in [0,1]$ $x_n(t) \to 0$ коли $n \to \infty$, тобто послідовність збігається слабко.

Перевіримо тепер сильну (рівномірну) збіжність до нуля цієї послідовності: $\|x_n - 0\| = \max\limits_{t\in[0,1]}|x_n(t)| = \max\limits_{t\in[0,1]}(t^n - t^{2n})$. Оскільки на кінцях відрізка $[0,1]$ функція $t^n - t^{2n}$ приймає значення нуль, свого максимуму вона досягає всередині відрізка. Точку екстремуму знайдемо за допомогою похідної: $(t^n - t^{2n})' = nt^{n-1}(1 - 2t^n) = 0$ при $t = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$. Отже, $\|x_n\| = \max\limits_{t\in[0,1]}(t^n - t^{2n}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \nrightarrow 0$ при $n \to \infty$, тобто послідовність не збігається до нуля за нормою простору $C[0,1]$.

**Задача 5.3.5.** Дослідити послідовність елементів $x_n$ на слабку та сильну збіжність у просторі $l_2$:

а) $x_n = \left(\underbrace{1,\dots,1}_{n-1}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots\right)$;

б) $x_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{1}{2}, 1,0,0, \dots\right)$;

в) $x_n = \left(\underbrace{0,\dots,0}_{n-1}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots\right)$.

**Розв'язання:** а) Перевіримо обмеженість послідовності: $\|x_n\| = \sqrt{n - 1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots} \ge \sqrt{n-1} \to \infty$ . Зрозуміло, що послідовність не є обмеженою, отже, не буде збігатися ні слабко, ні сильно.

б) Знову оцінимо норму послідовності: $\|x_n\| = \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{2^2} + 1} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{6}}$ – послідовність обмежена, отже, необхідна умова слабкої збіжності виконується. Перевіримо покоординатну збіжність. Послідовність перших координат має вигляд $x_{n1} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots)$ та збігається до нуля. Послідовність других координат має вигляд $x_{n2} = (0,1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots)$ та також збігається до нуля. Загалом, послідовність $k -$ их координат має вигляд $x_{nk} = (\underbrace{0,0,\dots,0}_{k-1}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots)$ та збігається до нуля. Отже, має місце обмеженість та покоординатна збіжність послідовності до нульового елемента простору, тобто послідовність слабко збігається до $x_0 = 0$.

Перевіримо тепер сильну збіжність до $x_0$:

$$\|x_n - x_0\| = \|x_n\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}} \to \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \neq 0.$$

Це означає, що задана послідовність не збігається сильно (за нормою) у просторі $l_2$.

в) Покажемо, що ця послідовність збігається сильно. З цього буде випливати також її слабка збіжність. Дійсно, покоординатно ця послідовність збігається до $x_0 = 0$, оскільки послідовність $k -$ их координат має вигляд $x_{nk} = (\underbrace{\frac{1}{k}, \frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k}}_{k}, 0,0,0, \dots)$ та збігається до нуля. Перевіряємо умову збіжності за нормою: $\|x_n - x_0\| = \|x_n\| = \sqrt{\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}} \to 0$ як залишок збіжного ряду. Отже, задана послідовність збігається і слабко, і сильно.

**Задача 5.3.6.** Дослідити послідовність елементів $x_n$ на слабку та сильну збіжність у просторі $\mathbb{R}_1^m$:

а) $x_n = (n, 1,1, \dots, 1)$;

б) $x_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n+m-1}}\right)$.

**Розв'язання:** Нагадаємо, що у скінченновимірному просторі і слабка, і сильна збіжність рівносильні покоординатній збіжності. У задачі а) послідовність не збігається покоординатно, оскільки послідовність $n$ перших координат є нескінченно великою. Отже, ця послідовність не збігається ні слабко, ні сильно.

У задачі б) послідовність $\frac{1}{\sqrt{n+k-1}}$ $k -$ их координат збігається до нуля, тобто ця послідовність збігається і слабко, і сильно до $x_0 = 0$

**Задача 5.3.7.** Дослідити послідовність $x_n(t)$ на слабку та сильну збіжність у просторі $L_2[0,1]$:

а) $x_n(t) = \begin{cases} \sqrt{n}, t \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 0, t \in \left(\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$; б) $x_n(t) = t^n - t^{2n}$.

**Розв'язання:** а) Зрозуміло, що майже скрізь на $[0,1]$ послідовність збігається до нуля. Виключенням є точка $t = 0$, в якій послідовність прямує до нескінченності, але міра одноточкової множини – нуль.

Перевіримо обмеженість послідовності: $\|x_n\| = \sqrt{\int_{[0,1]} |x_n(t)|^2 d\mu} = \sqrt{\int_{\left[0,\frac{1}{n}\right]} n d\mu} = 1$. Зауважимо, що з цієї оцінки випливає, що послідовність не збігається до нуля сильно (за нормою).

Перевіримо другу умову слабкої збіжності: $\int_{[0,\tau]} x_n(t) d\mu \to 0$ для будь-якого $\tau \in [0,1]$. В нашому випадку, для будь-якого $\tau \in [0,1]$, починаючи з деякого номеру $n$, $\int_{[0,\tau]} x_n(t)d\mu = \int_{\left[0,\frac{1}{n}\right]} \sqrt{n}d\mu = \sqrt{n}\mu\left[0,\frac{1}{n}\right] = \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$, тобто задана послідовність збігається слабко, але не збігається сильно (за нормою).

б) Задана послідовність $x_n(t) = t^n - t^{2n}$ на $[0,1]$ поточково збігається до нуля. Покажемо, що вона збігається до нуля сильно:

$$\|x_n\| = \sqrt{\int_{[0,1]} |x_n(t)|^2 d\mu} = \sqrt{\int_{[0,1]} |t^n - t^{2n}|^2 d\mu} =$$

$$\sqrt{\int_0^1 (t^{2n} - 2t^{3n} + t^{4n})dt} = \frac{t^{2n+1}}{2n+1} - 2\frac{t^{3n+1}}{3n+1} + \frac{t^{4n+1}}{4n+1}\bigg|_0^1 = \frac{1}{2n+1} - \frac{2}{3n+1} + \frac{1}{4n+1}\bigg|_0^1 \to 0.$$

Отже, послідовність збігається до функції $x_0(t) = 0$ і сильно, і слабко.

### 5.4 Індивідуальне завдання №3

1. З'ясувати, чи визначає функція $\varphi(x)$ норму на просторі $l_2$ (тут $x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots)$).
2. Перевірити, чи визначає функція $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ скалярний добуток ($x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ ).
3. Перевірити лінійність, неперервність оператора $A: X \to X$ та знайти його норму.
4. Дослідити оператор $A \in \mathcal{L}(l_2)$ на неперервну оборотність. Якщо $A^{-1}$ існує, знайти його (тут $x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots)$).
5. Перевірити лінійність, неперервність функціонала $f: X \to \mathbb{R}$ та знайти його норму.
6. Дослідити послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ на слабку та сильну збіжність у просторах: а) $\mathbb{R}_1^m$; б) $l_1$; в) $C[0,1]$; г) $L_2[0,1]$.

ВАРІАНТ 1.

1. $\varphi(x) = \sup\limits_{n\geq 1} |x_n + x_{n+1}|$.
2. $f(x,y) = 3x_1y_1 + 2x_2y_2$.
3. $X = l_2, x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots)$, $Ax = (x_1, 0, x_3, 0, x_5, \dots)$.
4. $Ax = (x_1, x_3, x_4, x_5, x_6, \dots)$.
5. $X = L_2[0,1], f(x) = \int_{[0,1]} e^t x(t) d\mu$.
6. а)$x_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{m}{n}\right)$; б)$x_n = \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, 1 - \frac{1}{n}, 0, 0, \dots\right)$; в, г)$x_n(t) = \frac{nt}{1+n+t}$.

ВАРІАНТ 2.

1. $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|}{n^2}$.
2. $f(x,y) = x_2y_2$.
3. $X = C[0,1]$, $(Ax)(t) = \int_0^1 \cos t \cdot \sin\tau \cdot x(\tau)\, d\tau$.
4. $Ax = (4x_2 - x_1, -3x_2, x_3, x_4, x_5, \dots)$.

5. $X = l_2, x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots),\ f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|}{n}$.

6. а)$x_n = ((-1)^n, 1, \dots, 1)$; б)$x_n = \left( \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1},\ 1 - \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \dots \right)$;

в, г)$x_n(t) = n \cdot \sin\dfrac{t}{n}$.

## ВАРІАНТ 3.

1. $\varphi(x) = \sup\limits_{n \geq 1} x_n^2$.
2. $f(x, y) = x_1 + y_2$.
3. $X = l_2, x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots),\ Ax = \left( \underbrace{0, \dots, 0}_{9}, x_{10}, 0, 0, \dots \right)$.
4. $Ax = (3x_2 + x_1, x_2 - x_3, x_4, x_5, \dots)$.
5. $X = L_2[0,1], f(x) = \int_{[0,5;0,75]} t^3 x(t) d\mu$.
6. а)$x_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{2n}, \dots, \frac{1}{mn}\right)$; б)$x_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^3}, \dots\right)$;

в) $x_n(t) = \dfrac{t}{1 + n^4 + t^2}$; г) $x_n(t) = n \cdot \aleph_{\left[0, \frac{1}{n^2}\right]}(t)$.

## ВАРІАНТ 4.

1. $\varphi(x) = \sup\limits_{n \geq 2} |x_n|$.
2. $f(x, y) = 2x_1 y_1 - x_2 y_2$.
3. $X = C[0,1],\ (Ax)(t) = \int_0^1 t^{10} \tau \cdot x(\tau)\, d\tau$.
4. $Ax = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots, \frac{x_n}{n}, \dots\right)$.
5. $X = l_2, x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots),\ f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x_{2n}}{n}$.
6. а)$x_n = ((-1)^n, 0, \dots, 0)$; б)$x_n = \left( 1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, \dots, 2n - 1, \frac{1}{2n}, 0, 0, 0, \dots \right)$;

в, г)$x_n(t) = \dfrac{n^2 t}{n^2 + t^2}$.

## ВАРІАНТ 5.

1. $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{20} |x_{2n}|$.
2. $f(x, y) = \frac{x_1 y_1}{2} - \frac{x_2 y_2}{3}$.
3. $X = l_2, x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots), Ax = (0, x_1, x_2, \dots, x_k, \dots)$.
4. $Ax = (x_1, -x_2, x_3, -x_4, \dots)$.
5. $X = C[0,1],\ f(x) = \int_0^1 \ln(t + 1) x(t) dt$.

6. а)$x_n = \left(\sqrt[n]{1}, \sqrt[n]{2}, \dots, \sqrt[n]{m}\right)$; б)$x_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \dots, \frac{1}{2n}, 0,0,0, \dots\right)$;
   в, г)$x_n(t) = \dfrac{n+t}{n^2+t}$.

## ВАРІАНТ 6.

1. $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n + x_{n+1}|}{2^n}$.
2. $f(x,y) = 2x_1^2 + 3y_1^2$.
3. $X = C[0,1],\ (Ax)(t) = \int_0^t x(\tau)\, d\tau$.
4. $Ax = (x_1, 0, x_3, 0, x_5, \dots)$.
5. $X = l_1, x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots),\ f(x) = \sum_{n=1}^{100} \frac{x_n}{\sqrt{n}}$.
6. а)$x_n = \left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{(n+1)^2}, \dots, \frac{1}{(n+m)^2}\right)$; б)$x_n = \left(\underbrace{1,0,\dots,0,}_{n-1} \frac{1}{n}, 0,0, \dots\right)$;
   в) $x_n(t) = \dfrac{\sqrt[n]{t}}{n}$; г) $x_n(t) = n \cdot e^{-nt}$.

## ВАРІАНТ 7.

1. $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|}{\sqrt{(n^2+1)(n^2+2)}}$.
2. $f(x,y) = x_1y_1 - x_2y_2$.
3. $X = l_2, x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots), Ax = (x_2, x_3, \dots, x_k, \dots)$.
4. $Ax = (x_2 - x_1, x_2 + x_3, x_4, x_5, \dots)$.
5. $X = L_2[0,1], f(x) = \int_{[0;1]} \cos\frac{t}{2} x(t) d\mu$.
6. а)$x_n = \left(\frac{-1}{n+1}, \frac{1}{n+1}, \dots, \frac{(-1)^m}{n+1}\right)$; б)$x_n = x_n = \left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}, 0,0,0, \dots\right)$;
   в, г)$x_n(t) = t^n - t^{n^2}$.

## ВАРІАНТ 8.

1. $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{10} |x_n|$.
2. $f(x,y) = x_1y_2 + x_2y_1$.
3. $X = l_1, x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots), Ax = \left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2^2}, \dots, \frac{x_k}{2^k}, \dots\right)$.
4. $Ax = (4x_2 - x_1, 2x_1 - 3x_2, x_3, x_4, \dots)$.
5. $X = l_2, x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots),\ f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x_n}{4^n}$.
6. а)$x_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \dots, \frac{1}{n^m}\right)$; б)$x_n = \left(\underbrace{n, 0, \dots, 0,}_{n-1} \frac{1}{n}, 0,0, \dots\right)$;

в) $x_n(t)=\dfrac{n+t}{n+t^2}$; г) $x_n(t)=\begin{cases}\sqrt{n}-n\sqrt{n}t, t\in\left[0,\dfrac{1}{n}\right]\\ 0, t\notin\left[0,\dfrac{1}{n}\right]\end{cases}$.

## ВАРІАНТ 9.

1. $\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2$.
2. $f(x,y)=x_1^2+x_2y_2$.
3. $X=l_1, x=(x_1,x_2,\dots,x_k,\dots), Ax=(x_2,x_4,\dots,x_{2k},\dots)$.
4. $Ax=(2x_2+x_1,x_1-x_3,x_3,x_4,\dots)$.
5. $X=L_2[0,1], f(x)=\int_{[0;0,5]}(t+4)x(t)d\mu$.
6. а)$x_n=\left(\sqrt{n},\sqrt[3]{n},\dots,\sqrt[m+1]{n}\right)$; б)$x_n=\left(\underbrace{\frac{(-1)^n}{n},0,\dots,0,}_{n-1} n,0,0,\dots\right)$;

   в, г) $x_n(t)=\dfrac{n+t}{n}$.

## ВАРІАНТ 10.

1. $\varphi(x)=\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty}x_n^2}$.
2. $f(x,y)=y_1^2+x_2x_1$.
3. $X=C[0,1],\ (Ax)(t)=t^2\int_0^1 x(\tau)\,d\tau$.
4. $Ax=(x_2,x_3,x_4,x_5,\dots)$.
5. $X=l_1, x=(x_1,x_2,\dots,x_k,\dots),\ f(x)=x_2-x_4$.
6. а)$x_n=\left(\frac{1}{n},\frac{\sqrt{2}}{n^2},\dots,\frac{\sqrt{m}}{n^m}\right)$; б)$x_n=\left(\underbrace{0,0,\dots,0,}_{n-1}\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{n+1}},\frac{1}{2^{n+2}},\dots\right)$;

   в) $x_n(t)=\cos\dfrac{t}{n}+\sin t$; г) $x_n(t)=\begin{cases}2n(1-nt), t\in\left[0,\dfrac{1}{n}\right]\\ 0, t\notin\left[0,\dfrac{1}{n}\right]\end{cases}$.

## ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ


1. Банах С. С. Курс функціонального аналізу (лінійні операції). Київ : Радянська школа, 1948. 216 с.
2. Березанський Ю. М., Ус Г. М., Шефтель З. Г. Функціональний аналіз : курс лекцій : навч. посіб. Киев : Вища школа, 1990. 600 с.
3. Городецкий В. В., Нагнибида Н. И., Настасиев П. П. Методы решения задач по функциональному анализу. Киев : Выща школа. 1990. 479 с.
4. Дороговцев А. Я. Элементы общей теории меры и интеграла. Киев : Выща школа, 1989. 152 с.
5. Кадець В. М. Курс функціонального аналізу та теорії міри / В. М. Кадець ; пер. з рос. Я. С. Магола, І. Е. Чижиков ; за наук. ред. О. Б. Скаскіна. Львів : І. Е. Чижиков [вид.], 2012. Т. 1 : Серія "Університетська бібліотека". 589 с.
6. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. Москва : Наука, 1984. 752 с.
7. Колмогоров А. М., Фомін С. В. Елементи теорії функцій і функціонального аналізу : підручник для студ. математ. спец. ун-тів. Київ : Вища школа. Гол. вид-во, 1974. 456 с.
8. Красікова І. В. Функціональний аналіз: навчальний посібник для студентів освітнього рівня «бакалавр» напрямів підготовки «Прикладна математика», «Математика». Запоріжжя : ЗНУ, 2015. 104 с.
9. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Краткий курс функционального анализа. Москва : Высшая школа, 1982. 272 с.
10. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. Москва : Наука, 1974. 480 с.
11. Сторож О. Г. Збірник задач з теорії міри та функціонального аналізу. Львів : Видавець І. Чижиков, 2011. 152 с.
12. Треногин В. А. Функциональный анализ. Москва : Наука,1980. 496 с.


## ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ


1. Березанский Ю. М., Ус Г. М., Шефтель З. Г. Функциональный анализ. Киев : Выща школа, 1990. 600 с.
2. Городецкий В. В., Нагнибида Н. И., Настасиев П. П. Методы решения задач по функциональному анализу. Киев : Выща школа. 1990. 479 с.
3. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. Москва : Наука, 1979. 720 с.
4. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ 2. Москва : Изд-во Московского университета, 1987. 358 с.
5. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва : Наука,1989. 624 с.
6. Красікова І. В. Навчальний посібник до самостійної роботи та індивідуального завдання для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр» напряму підготовки «Прикладна математика». Запоріжжя : ЗНУ, 2014. 87с.
7. Сторож О. Г. Збірник задач з теорії міри та функціонального аналізу. Львів : Видавець І. Чижиков, 2011. 152с.

Навчальне видання
(українською мовою)

Красікова Ірина Володимирівна
Д'яченко Наталія Миколаївна

**ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ТА ТЕОРІЯ МІРИ Й ІНТЕГРАЛА**

Методичні рекомендації до самостійної роботи
для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра
спеціальності «Математика»
освітньо-професійної програми «Математика»

Рецензент *М.І. Клименко*
Відповідальний за випуск *С.М. Гребенюк*
Коректор *І.В. Красікова*