

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра фундаментальної математики

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА

на тему: «НАБЛИЖЕНО АНАЛІТИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК
СИСТЕМИ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ОДНІЄЇ
ПЛОСКОЇ КОНТАКТНОЇ ЗАДАЧІ ПРО НЕЛІНІЙНЕ
ЗНОШУВАННЯ»

Виконала: студентка 2 курсу, групи 8.1119
спеціальності 111 математика
(шифр і назва напрямку підготовки)
освітньої програми математика
К. М. Дмитрова
(ініціали та прізвище)
доцент кафедри фундаментальної
Керівник математики, доцент к.ф.-м.н. Д'яченко Н. М.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)
завідувач кафедри загальної математики,
Рецензент доцент, к.ф.-м.н. Зіновєєв І. В.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Запоріжжя

2020

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет математичний

Кафедра фундаментальної математики

Рівень вищої освіти магістр

Спеціальність 111 математика

(шифр і назва)

Освітня програма математика

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри
фундаментальної математики,
д.т.н., доцент

Гребенюк С.М.

_____ 2020 р.

ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТЦІ

Дмитровій Кароліні Миколаївні

(прізвище, ім'я та по батькові)

1. Тема роботи Наближено аналітичний розв'язок системи інтегральних рівнянь однієї плоскої задачі про нелінійне зношування

керівник роботи Д'яченко Наталія Миколаївна, к.ф.-м.н., доцент

(прізвище, ім'я та по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від « 20 » травня 2020 року № 576-с

2. Строк подання студентом роботи 01.12.2020

3. Вихідні дані до роботи 1. Постановка задачі.

2. Перелік літератури.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)

Знайти аналітичний та чисельний розв'язки інтегральних рівнянь задачі про

нелінійне зношування тонкої пружної смуги, довести існування і єдиність такого

розв'язку.

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень) _____

Презентація

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання 22.05.2020**КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН**

№ з/п	Назва етапів дипломної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	вересень 2020	
	Збір вихідних даних.		
2.	Обробка методичних та теоретичних джерел.	вересень 2020	
3.	Розробка першого розділу.	жовтень 2020	
4.	Розробка другого і третього розділів.	жовтень 2020	
5.	Оформлення та нормоконтроль кваліфікаційної роботи.	листопад 2020	
6.	Розробка презентації для захисту	листопад 2020	
7.	Попередній захист кваліфікаційної роботи	27 листопада 2020	
8.	Захист кваліфікаційної роботи.	18.12.2020	

Студент

(підпис)

К.М. Дмитрова

_____ (ініціали та прізвище)

Керівник роботи

(підпис)

Н. М. Д'яченко

_____ (ініціали та прізвище)

Нормоконтроль пройдено

Нормоконтролер

(підпис)

О. Г. Спиця

_____ (ініціали та прізвище)

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Наближено аналітичний розв'язок системи інтегральних рівнянь однієї плоскої контактної задачі про нелінійне зношування»: 40 с., 3 рис., 17 джерел, 1 додаток.

ЗНОС, ІНТЕГРАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ФРЕДГОЛЬМА ДРУГОГО РОДУ, КОНТАКТ, МЕТОД ПОСЛІДОВНИХ НАБЛИЖЕНЬ, МЕТОД РЕДУКЦІЇ, НЕЛІНІЙНЕ ЗНОШУВАННЯ, НОРМАЛЬНИЙ ТИСК, ОПЕРАТОРНЕ РІВНЯННЯ ФРЕДГОЛЬМА ДРУГОГО РОДУ, ПЛОСКА КОНТАКТНА ЗАДАЧА, ПРИНЦИП СТИСКУЮЧИХ ВІДОБРАЖЕНЬ, РЯД НЕЙМАНА, ТОНКА ПРУЖНА СМУГА, ШТАМП З ПЛОСКОЮ ОСНОВОЮ.

Об'єкт дослідження – система інтегральних рівнянь задачі про нелінійне зношування пружного шару при контакті.

Мета дослідження – знайти аналітичний і наближений розв'язки задачі про нелінійне зношування пружного шару при контакті за допомогою покрокового за часом методу, довести існування і єдиність такого розв'язку на кожному часовому кроці.

Метод дослідження – аналітичний: вивчення та аналіз системи інтегральних рівнянь даної задачі, практичний: розв'язання конкретної контактної задачі; порівняльний: порівняння отриманих розв'язків з результатами І.Г. Горячевої.

У кваліфікаційній роботі розглянуто задачу про нелінійне зношування пружної тонкої смуги при ковзанні по ній штампа з плоскою основою, що зводиться до розв'язання системи інтегральних рівнянь на кожному часовому кроці. Досліджено питання існування і єдиності розв'язку даної системи. Проведено аналіз розподілу тиску і товщини зношеної смуги в різні моменти часу, зокрема на стадії припрацювання та на стадії сталого зносу.

SUMMARY

Master's Qualification Thesis «The Approximate Analytical Solution to the System of Integral Equations for One Contact Problem about Nonlinear Attrition»: 40 pages, 3 figures, 17 references, 1 supplement.

WEAR, THE FREDHOLM INTEGRAL EQUATION OF THE SECOND KIND, CONTACT, ITERATION METHOD, REDUCTION METHOD, NONLINEAR ATTRITION, NORMAL PRESSURE, THE FREDHOLM OPERATOR EQUATION OF THE SECOND KIND, THE FLAT CONTACT PROBLEM, PRINCIPLE OF THE CONTRACTION MAPPING, NEUMANN SERIES, THIN ELASTIC STRIP, STAMP WITH THE FLAT BASIS.

The object of the study is a system of integral equations of the problem of nonlinear attrition of an elastic strip at contact.

The aim of the study is to analyze the problem of nonlinear attrition of an elastic layer given contact, to prove the existence of the unique decision of the system of the integral equation, which this problem is reduced to, at each step to time, and to find an analytic and approximate solution in these steps.

The methods of research are analytical: to learn and to analyze the system of the integral equation, practical: to solve the specific flat contact problem, and comparative: to compare the gotten solution to I.H. Goryacheva's result.

In the qualifying paper, the problem of the nonlinear attrition of a thin elastic strip is considered at sliding on it a stamp with a flat basis. The problem is reduced to solving the system of integral equations in each step to time. The existence of the unique decision of the system is proved. The analysis of the distribution of pressure and thickness of a worn outstrip in different time intervals is carried out: at a stage of the run-in and at a stage of the steady-state wear.

ЗМІСТ

Завдання на кваліфікаційну роботу.....	2
Реферат	4
Summary	5
Вступ.....	8
1 Постановка задачі та її інтегральні рівняння	10
1.1 Огляд літератури	10
1.2 Постановка задачі	12
2 Покроковий за часом метод розв'язання системи інтегральних рівнянь даної задачі.....	16
2.1 Сутність покрокового за часом методу	16
2.2 Розв'язання системи інтегральних рівнянь на нульовому за часом кроці.....	17
2.2.1 Зведення системи інтегральних рівнянь даної задачі до операторного рівняння Фредгольма другого роду	17
2.2.2 Властивості лінійних операторів на нульовому за часом кроці.....	19
2.2.3 Аналітичний розв'язок операторного рівняння на нульовому за часом кроці.....	22
2.2.4 Наближений розв'язок операторного рівняння на нульовому за часом кроці.....	27
2.3 Розв'язання системи інтегральних рівнянь даної задачі на k -му за часом кроці.....	28
2.3.1 Зведення системи інтегральних рівнянь до операторного рівняння Фредгольма другого роду.....	28
2.3.2 Властивості лінійних операторів на k -му за часом кроці....	30
2.3.3 Наближено аналітичний розв'язок задачі на k -му за часом кроці.....	31

3 Аналіз числових результатів.....	35
Висновки	39
Перелік посилань.....	40
Додаток А Фрагмент програми для знаходження числових результатів.....	42

ВСТУП

Одним з актуальних питань сучасного машинобудування є збільшення терміну служби машин, обладнання, приладів та підвищення їх надійності. Успішному вирішенню даної проблеми сприяють ґрунтовні наукові дослідження не тільки у галузі машинобудування, але і розвиток трибології та її інженерних додатків.

Методи механіки деформованого тіла, зокрема механіки контактної взаємодії та механіки руйнування є потужним засобом аналітичного дослідження проблем трибології.

На довговічність машин впливає їх міцність, зносостійкість, і жорсткість. При цьому, зношування є одним з основних видів руйнування та найбільш розповсюдженою причиною виходу деталей та механізмів машин з ладу.

У даній роботі розглянемо задачу про нелінійне зношування пружної тонкої смуги, що лежить на плоскій основі, в результаті ковзання по ній штампа з плоскою основою. Під зношуванням розуміють часткове або повне видалення матеріалу з поверхні тертя внаслідок її руйнування. Це призводить до поступової зміни форми, маси, стану поверхні і розмірів тіл, що взаємодіють [6, 7].

Контактні задачі, зокрема і задачі про штампи, знайшли своє розповсюдження в роботах таких вчених, як Л.О. Галін, І.Я. Штаєрман, І.Г. Горячева, В.М. Александров, М.Н. Добичін тощо [7]. Слід зауважити, що саме І.Г. Горячева запропонувала покроковий за часом метод розв'язання даної задачі.

У кваліфікаційній роботі на кожному кроці систему інтегральних рівнянь, що моделює дану задачу, зведено до операторного рівняння Фредгольма другого роду. Доведено, що оператор цього рівняння є стискуючим на множині, якій належить розв'язок. Аналітичний розв'язок

подано степеневим рядом з невизначеними коефіцієнтами, які можна знайти з нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Доведено можливість застосування до вказаної системи метода редукції і метода послідовних наближень. Знайдено числові результати за допомогою аналітичного прикладного пакету Maple. Проведено аналіз одержаних результатів по розподілу тиску на області контакту і товщини тонкої смуги в різні часові проміжки.

1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТА ЇЇ ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ

1.1 Огляд літератури

Трибологія займається дослідженням та описом контактної взаємодії твердих тіл, що деформуються, при їх відносному переміщенні. Її основною задачею є обчислення зносу і тиску, що виникає у процесі зношування пари тертя. У кожен момент часу дані величини знаходять з розв'язку деякої контактної задачі. Слід зазначити, що в перших методиках розрахунків зносу із залученням тиску не було враховано деформації тіл, що зношуються, і розв'язання контактних задач в них не застосовувалось.

Для формулювання математичних моделей процесу зношування можуть використовуватись рівняння, що характеризують контактну або загальну деформацію пари тертя, чи всього вузла тертя, теплові процеси: утворення і поширення тепла, а також явища, пов'язані з фізичними, хімічними і механічними факторами, що визначають процес поверхневого руйнування деталей при терті.

Плоскі контактні задачі теорії пружності для неklasичних областей (зокрема, для смуги), вперше почали вивчатися в 30-х роках. Перші дослідження контактних задач для смуги виконані в роботах І.Г. Альперіна та О.Я Шехтер. Наступні роботи М. Я. Беленького та С.Е. Бірмана відносяться до 50-х років. З початку 60-х років почався швидкий розвиток теорії неklasичних контактних задач, зумовлене появою нових математичних можливостей [5].

Вперше задачу розрахунку зносу абсолютно жорстких тіл, що контактують, поставив О.С. Пронніков [15]. Його задача допускала знос обох тіл пари тертя при нелінійному законі зношування. Саме він побудував загальну модель зношування жорстких тіл.

Істотний вклад в розв'язання контактних задач вніс Л.О. Галін [4]. Він дослідив чимало різних постановок задач трибології, використовуючи методи математичного аналізу, розглянув ряд задач для смуги, балки, півпростору. Методи, запропоновані вченим, виявились достатньо ефективними для розв'язання даних задач.

Ця проблема отримала подальший розвиток в роботах [1-3, 7, 8, 16]. Зокрема, посібник [7] містить детальний огляд досліджень в області трибології. В його п'ятому розділі розглянуто контактні задачі в різних постановках, він містить широко відомі формулювання задач та методи їх розв'язання.

Однією з поширених постановок контактних задач є розрахунок зносу поверхні за наявності тонкого покриття. Зазвичай, механічні характеристики таких шарів описують моделлю Вінклера. Зокрема, цей підхід використано і в роботі В.М. Александрова [2].

У монографії [3] досліджено контактні задачі для пружних і в'язкопружних тіл з тонкими покриттями. Тут проаналізовано задачі теорії пружності на основі асимптотичних методів і показано, що лінійна вінклерівська модель є найпростішою моделлю пружного покриття.

Проте, модель нелінійного вінклерівського шару теж отримала широке застосування у трибології. Зокрема, у роботі [1] наведено результати розв'язування даних контактних задач класичними методами інтегральних рівнянь.

При розрахунках контактних задач з врахуванням зношування важливе значення грає величина зносу. Закон зношування являє собою залежність швидкості зношування від тиску, температури, швидкості ковзання тощо. У роботі [14] запропоновано степеневу залежність, яка має місце для багатьох видів зношування.

Теоретичні дослідження у монографії [8] дали змогу вивести рівняння зношування. Тут розглянуто залежність швидкості зношування від тиску

степеневого і лінійного видів. Однак, в даній роботі досліджено тільки лінійну залежність.

У монографії [6] виведено інтегральні рівняння плоскої контактної задачі з фіксованою областю контакту, що враховує зношування тонкого шару. Запропонований тут покроковий за часом метод передбачає розв'язання на кожному кроці системи інтегральних рівнянь, зводячи її до системи лінійних алгебраїчних рівнянь, де невідомою є функція нормального тиску. Проте, в даній роботі не досліджено питання існування і єдиності розв'язку вказаної вище системи на кожному кроці.

Чимало підходів до обчислення зносу пружних тіл, що контактують при постійній області контакту та постійному зовнішньому навантаженні, засновано на наявності стадії сталого зносу, коли нормальний тиск стає рівномірним на всій області контакту. Цю властивість досліджено в роботах [6-8]. Слід зазначити, що існування стадії сталого зносу виявлено в статті [17] дослідним шляхом. На це вказував незмінний в часі профіль поверхні, що зношується.

Отже, проблеми контактних взаємодій є важливим питанням в механіці твердих тіл, оскільки контакт є одним з основних способів роботи механізмів машин. При цьому на довговічність і міцність конструкцій суттєво впливає величина контактних тисків і зносу.

1.2 Постановка задачі та її інтегральні рівняння

Розглянемо задачу про взаємодію штампу з двошаровою пружною основою в наступній постановці [6-8]. Нехай пружна смуга початкової товщини h_0 лежить на пружній основі (рис. 1.1). Форма поверхні, що перебуває в контакті описується парною функцією $z = f(x)$. Смуга може бути закріпленою двома способами ($y = h_0$):

- а) смуга лежить на пружній основі без тертя (задача 1);

б) смуга жорстко закріплена на основі (задача 2).

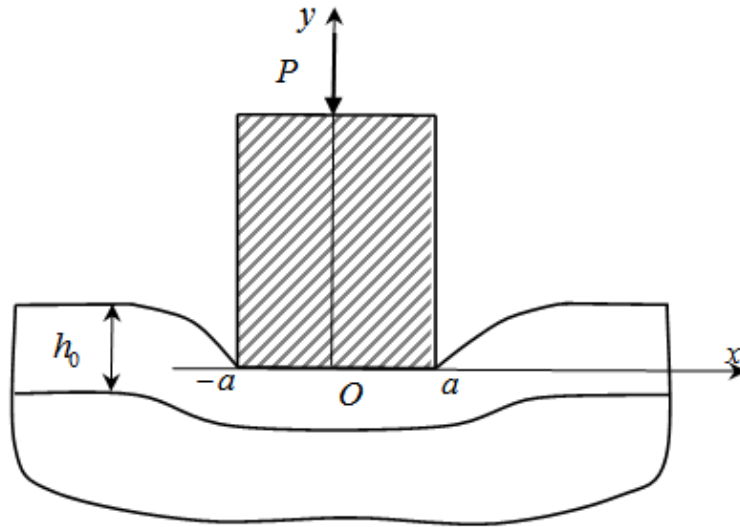


Рисунок 1.1 – Схема контакту штампа з пружним шаром

На штамп з плоскою основою півширини a (рис. 1.1) діє постійна вертикальна сила P . Смуго вважаємо такою, що $h_0/a \ll 1$. Смуго товщиною $h(x,t)$ зношується штампом, що ковзає в напрямі осі Oz . Припустимо, що швидкість зносу смуги $\partial h(x,t)/\partial t$ нелінійно залежить від контактного тиску $p(x,t)$:

$$\frac{\partial h(x,t)}{\partial t} = -K_w \left(\frac{p(x,t)}{p^*} \right)^\omega, \quad (1.1)$$

де K_w – коефіцієнт зносу, що залежить від швидкості, температури і умов взаємодії; p^* – деякий характерний тиск [6, 8].

Як зазначено в монографії [8], дотичні напруження на площадці контакту діють тільки у напрямі руху штампа і відсутні у напрямі осі Ox , тобто $\tau_{xy} = 0$. Крім того, компонента τ_{zy} тангенціальних напружень не впливає на розподіл контактних тисків, які знаходять з розв'язку плоскої

контактної задачі. Проте, компонента τ_{zy} впливає на швидкість процесу зношування, що може бути враховано за допомогою коефіцієнта K_w в (1.1).

Нехай зміщення пружної смуги задовольняє умову $\partial h(x,t)/\partial x < 1$. Тоді отримаємо рівняння для визначення тиску $p(x,t)$ у довільний момент часу t [6-8]:

$$\begin{aligned} [h(x,t) - h(0,t)] - \frac{A}{E_1^*} [h(x,t)p(x,t) - h(0,t)p(0,t)] + \\ + \frac{1}{\pi E_2^*} \int_{-a}^a p(x',t) \ln \left| \frac{x' - x}{x'} \right| dx' = 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

де $E_i^* = \frac{E_i}{2(1-\nu_i^2)}$, E_i, ν_i – модуль пружності та коефіцієнт Пуассона смуги

($i=1$) і основи ($i=2$); $n = \frac{E_1^*}{E_2^*}$; $\kappa_i = 3 - 4\nu_i$; припустивши, що $\nu_1 = \nu_2 = \nu$,

$\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$, знайдемо значення A для першої задачі – $A = 0,5$, та для другої

задачі – $A = \frac{2(1-n)(\kappa-1)(2-n+n\kappa)}{(\kappa+1)^2}$.

У початковий момент часу товщина смуги $h(x,0) = h_0$ для будь-яких $x \in [-a; a]$. У рівнянні (1.2) другий доданок лівої частини можна розглядати як переміщення поверхні завдяки наявності тонкої смуги, що поводить як покриття вінклерівського типу з коефіцієнтом пропорційності $k = \frac{Ah_0}{E_1^*}$, а

третій доданок характеризує переміщення пружної основи [6-8].

Товщину смуги у довільний момент часу t можна визначити з рівняння зносу (1.1):

$$h(x, t) = h_0 - K_w \int_0^t \left(\frac{p(x, t')}{p^*} \right)^\omega dt'. \quad (1.3)$$

До того ж, має місце умова рівноваги:

$$\int_{-a}^a p(x', t) dx' = P. \quad (1.4)$$

Таким чином, отримали систему інтегральних рівнянь (1.2)-(1.4). В ній невідомими є функція товщини смуги $h(x, t)$ та функція контактного тиску $p(x, t)$.

2 ПОКРОКОВИЙ ЗА ЧАСОМ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМИ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДАНОЇ ЗАДАЧІ

2.1 Сутність покрокового за часом методу

У монографії [6] запропоновано покроковий метод розв'язання рівнянь (1.2)-(1.4). Крок за часом $\Delta\tau$ варто обирати таким чином, щоб в межах будь-якого інтервалу $[\tau_k, \tau_{k+1}]$, де $\tau_{k+1} = \tau_k + \Delta\tau$, $\tau_0 = 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$, можна було знехтувати величиною зносу поверхні і перерозподілом тиску на площадці контакту.

Якщо ввести наступні безрозмірні координати і функції:

$$\tau = t \frac{K_w}{a}, \quad \xi = \frac{x}{a}, \quad \tilde{P} = \frac{P}{aE_2^*}, \quad \tilde{h}_0 = \frac{h_0}{a}, \quad \tilde{h}(\xi, \tau) = \frac{1}{a} h\left(\xi a, \tau \frac{a}{K_w}\right),$$

$$\tilde{A} = \frac{A}{n}, \quad \tilde{p}(\xi, \tau) = \frac{1}{E_2^*} p\left(\xi a, \tau \frac{a}{K_w}\right), \quad \tilde{f}(\xi) = \frac{1}{a} f(\xi a),$$

то система інтегральних рівнянь (1.2)-(1.4) апроксимується наступними співвідношеннями, представленими в безрозмірному вигляді:

$$\tilde{h}_{k+1}(\xi) = \tilde{h}_k(\xi) - \left(\frac{\tilde{p}_k(\xi)}{\tilde{p}^*} \right)^\omega \Delta\tau, \quad \tilde{h}_0(\xi) = \tilde{h}_0, \quad (2.1)$$

$$\tilde{h}_k(\xi) - \tilde{h}_k(0) - \tilde{A} [\tilde{h}_k(\xi) \tilde{p}_k(\xi) - \tilde{h}_k(0) \tilde{p}_k(0)] +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \tilde{p}_k(\xi') \ln \left| \frac{\xi' - \xi}{\xi' + \xi} \right| d\xi' = 0, \quad (2.2)$$

$$\int_{-1}^1 \tilde{p}_k(\xi') d\xi' = \tilde{P}. \quad (2.3)$$

Отже, на кожному кроці за часом необхідно:

- а) з рівнянь (2.2) та (2.3) знайти функцію нормального тиску $\tilde{p}_k(\xi)$;
- б) з рівняння (2.1) знайти функцію товщини смуги $\tilde{h}_{k+1}(\xi)$ для наступного кроку за часом.

У результаті отримуємо товщину смуги та розподіл тиску у різні моменти дискретного часу при зношуванні поверхневого шару.

2.2 Розв'язання системи інтегральних рівнянь на нульовому за часом кроці

2.2.1 Зведення системи інтегральних рівнянь даної задачі до операторного рівняння Фредгольма другого роду

Враховуючи рівняння (2.2) і (2.3), у момент часу $\tau_0 = 0$ розподіл нормального тиску задовольняє наступній системі:

$$\tilde{A}\tilde{h}_0\tilde{p}_0(\xi) = \tilde{A}\tilde{h}_0\tilde{p}_0(0) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \tilde{p}_0(\xi') \ln \left| \frac{\xi' - \xi}{\xi'} \right| d\xi', \quad (2.4)$$

$$\int_{-1}^1 \tilde{p}_0(\xi') d\xi' = \tilde{P}. \quad (2.5)$$

Введемо наступні позначення:

$$\alpha_0 = 1 - \tilde{A}\tilde{h}_0, \quad P_0(\xi) = \tilde{p}_0(\xi) - \tilde{p}_0(0), \quad w(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \left| \frac{\xi' - \xi}{\xi'} \right| d\xi'. \quad (2.6)$$

З рівняння (2.5) виразимо значення $\tilde{p}_0(0)$:

$$\tilde{P}_0(0) = \frac{\tilde{P}}{2} - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_0(\xi') d\xi'. \quad (2.7)$$

Вирази (2.6) і (2.7) можна підставити в інтегральне рівняння (2.4):

$$(1 - \alpha_0)P_0(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left(P_0(\xi') + \frac{\tilde{P}}{2} - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_0(\xi'') d\xi'' \right) \ln \left| \frac{\xi' - \xi}{\xi} \right| d\xi'.$$

В результаті, систему інтегральних рівнянь (2.4)-(2.5) зведено до одного рівняння:

$$P_0(\xi) = \alpha_0 P_0(\xi) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \left| \frac{\xi' - \xi}{\xi'} \right| P_0(\xi') d\xi' - \frac{w(\xi)}{2} \int_{-1}^1 P_0(\xi') d\xi' + \frac{\tilde{P}}{2} w(\xi). \quad (2.8)$$

Введемо оператори:

$$\begin{aligned} [Bf](\xi) &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \left| \frac{\xi' - \xi}{\xi'} \right| f(\xi') d\xi', \quad [Af](\xi) = \frac{w(\xi)}{2} \int_{-1}^1 f(\xi') d\xi', \\ [Lf](\xi) &= [(B - A)f](\xi). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Таким чином, зведемо інтегральне рівняння (2.8) до операторного рівняння Фредгольма другого роду:

$$P_0(\xi) = [(\alpha_0 I + L)P_0](\xi) + \frac{\tilde{P}}{2} w(\xi). \quad (2.10)$$

Переконаємося, що розв'язком рівняння (2.10) буде тільки неперервна функція. Припустимо протилежне, нехай на кінцях відрізка $[-1; 1]$ у функції $P_0(\xi)$ є інтегровна степенева особливість вигляду $(1 \pm \xi)^{-\lambda}$, $0 < \lambda < 1$. Проте, в

такому випадку у функції $[AP_0](\xi)$ не буде особливостей в точках $\xi = \pm 1$. Ядро інтегрального оператора B має особливість виду $\ln|1 \pm \xi|$ в точках кінця

відрезка, проте значення самого інтегралу $\int_{-1}^1 \ln|1 \pm \xi'| (1 \pm \xi')^{-\lambda} d\xi'$, і разом з ним

і функція $[BP_0](\xi)$, не будуть мати особливостей. У такому разі, рівняння

$(1 - \alpha_0)P_0(\xi) = [LP_0](\xi) + \frac{\tilde{P}}{2} w(\xi)$, еквівалентне рівнянню (2.10), буде містити

особливість вказаного типу в точках $\xi = \pm 1$ у лівій частині, однак особливості не буде в правій частині рівняння. Звідси можна зробити висновок про хибність зробленого припущення, що доводить необхідне.

З доведеного вище випливає, що лінійні оператори (2.9) можна розглядати на просторі $C[-1;1]$ функцій, неперервних на відрізку $[-1;1]$. Для дослідження питання існування і єдиності розв'язку рівняння (2.10) та рівнянь, аналогічних до нього на наступних часових кроках, необхідно вивчити властивості операторів (2.9).

2.2.2 Властивості лінійних операторів на нульовому за часом кроці

У роботі [9] було доведено, що $B : C[-1;1] \rightarrow C[-1;1]$. З цього факту випливає, що і функція $w(\xi) = [Be](\xi)$, $e(\xi) \equiv 1$ – неперервна на відрізку $[-1;1]$. Звідси робимо висновок, що $A : C[-1;1] \rightarrow C[-1;1]$. Тому, для оператора

$$\begin{aligned} [Lf](\xi) &= [(A - B)f](\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \left| \frac{\xi' - \xi}{\xi'} \right| f(\xi') d\xi' - \frac{w(\xi)}{2} \int_{-1}^1 f(\xi') d\xi' = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\ln \left| \frac{\xi' - \xi}{\xi'} \right| - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \ln \left| \frac{\xi'' - \xi}{\xi''} \right| d\xi'' \right] f(\xi') d\xi' \end{aligned}$$

отримаємо $L : C[-1;1] \rightarrow C[-1;1]$.

Оцінимо норму оператора L . Для цього в просторі $C[-1;1]$ розглянемо норму функції:

$$\begin{aligned} \|Lf\| &= \max_{\xi \in [-1;1]} \left| \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\ln \left| \frac{\xi' - \xi}{\xi'} \right| - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \ln \left| \frac{\xi'' - \xi}{\xi''} \right| d\xi'' \right] f(\xi') d\xi' \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi} \|f\| \cdot \max_{\xi \in [-1;1]} \left| \int_{-1}^1 \ln \left| \frac{\xi' - \xi}{\xi'} \right| - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \ln \left| \frac{\xi'' - \xi}{\xi''} \right| d\xi'' \right| d\xi'. \end{aligned}$$

Скориставшись прикладним аналітичним пакетом Maple, одержимо, що значення максимуму даної функції не перевищує 2,6, тобто:

$$\|Lf\| \leq \frac{2,6}{\pi} \|f\|, \quad (2.11)$$

а значить $\|L\| \leq \frac{2,6}{\pi}$.

Розглянемо оператор $\alpha_0 I + L$, де $[If](\xi) = f(\xi)$ для всіх $f(\xi) \in C[-1;1]$. Очевидно, що $I : C[-1;1] \rightarrow C[-1;1]$, тому $\alpha_0 I + L : C[-1;1] \rightarrow C[-1;1]$.

З постановки задачі видно, що функція нормального тиску є невід'ємною та парною на відрізку $[-1;1]$ в будь-який момент часу. До того ж, в кожен момент часу дана задача аналогічна до плоскої контактної задачі про вдавлювання штампу з плоскою основою в пружну жорстку смугу без врахування її зносу. Останню задачу детально вивчено в [8, 10]. Аналізуючи її розв'язання, приходимо до висновку, що функції тиску зростає на площадці контакту, окрім, можливо, невеликих околів кінців площадки, тобто маємо зростання на відрізку $[0;0,9]$. Крім того, найменше значення дана функція набуває в точці $\xi = 0$, звідки отримаємо, що значення функції $P_0(\xi) = \tilde{p}_0(\xi) - \tilde{p}_0(0)$ ($k = 0,1,2,\dots$) в точці $\xi = 0$ дорівнює 0.

Отже, розв'язок операторного рівняння (2.10) будемо шукати на множині M невід'ємних, парних на відрізку $[-1;1]$ та зростаючих на відрізку $[0;0,9]$ функцій $f(x)$ з простору $C[-1;1]$, для яких $f(0) = 0$.

Крім того, у [9] доведено, що відображення $\alpha_0 I + L$ – стискує на множині M . Враховуючи теорему Вейерштрасса про рівномірне наближення неперервної функції многочленами [11], спочатку проведено оцінку на множині многочленів $M_1 \subset M$. Очевидно, що такі многочлени будуть мати

вигляд $S(\xi) = \sum_{k=1}^n C_k \xi^{2k}$. Звідки отримано:

$$\|(\alpha_0 I + L)S\| \leq \alpha_0 \|S\|. \quad (2.12)$$

Далі проведено оцінку на множині функцій $f \in M$ простору $C[-1,1]$. За теоремою Вейерштрасса [11] для $\varepsilon = \frac{1 - \alpha_0}{4\alpha_0\pi + 5,2}$ можна знайти такий многочлен $R \in M_1$, що $\|f - S\| < \varepsilon \|f\|$, тоді, враховуючи (2.11) і (2.12), отримаємо:

$$\begin{aligned} \|(\alpha_0 I + L)f\| &\leq \|(\alpha_0 I + L)S\| + \|(\alpha_0 I + L)(f - S)\| \leq \alpha_0 \|S\| + (\alpha_0 + \|L\|)\|f - S\| \leq \\ &\leq \alpha_0 \|f\| + \left(2\alpha_0 + \frac{2,6}{\pi}\right)\|f - S\| \leq \frac{1 + \alpha_0}{2} \|f\|, \end{aligned}$$

тобто

$$\|(\alpha_0 I + L)f\| \leq q_0 \|f\|, \quad q_0 = \frac{1 + \alpha_0}{2}. \quad (2.13)$$

З огляду на те, що за умовою смуга є тонкою, $\tilde{A}\tilde{h}_0 < 1$, тому $0 < \alpha_0 < 1$. Звідси отримаємо, що і $0 < q_0 < 1$. Отже, оператор $\alpha_0 I + L$ є стискующим на множині M .

2.2.3 Аналітичний розв'язок операторного рівняння на нульовому за часом кроці

Беручи до уваги властивості оператора $\alpha_0 I + L$ і принципу стискуючих відображень [13], можна зробити висновок про єдиність розв'язку рівняння (2.10) на множині M . Його можна знайти за допомогою методу послідовних наближень і представити у вигляді ряду Неймана:

$$P_0(\xi) = \frac{\tilde{P}}{2} \sum_{s=0}^{\infty} [(\alpha_0 I + L)^s w](\xi) = \frac{\tilde{P}}{2} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=0}^s C_s^k (\alpha_0)^{s-k} [L^k w](\xi). \quad (2.14)$$

Ряд (2.14) є абсолютно збіжним за нормою простору $C[-1;1]$.

Розклад образу степеневі функції $\psi(\xi) = \xi^{2N}$ ($N = 0, 1, 2, 3, \dots$) під дією оператора B знайдено у роботі [9]. Він має вигляд:

$$[B\psi](\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_{N,i} \xi^{2i}, \quad (2.15)$$

$$\text{де } \beta_{N,i} = -\frac{1}{\pi \cdot i \cdot (2N - 2i + 1)}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{Враховуючи, що } w(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \left| \frac{\xi' - \xi}{\xi'} \right| d\xi' = [Be](\xi), \text{ маємо}$$

$$w(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_{0,i} \xi^{2i}. \quad (2.16)$$

Тоді розклад образу функції $\psi(\xi) = \xi^{2N}$ під дією оператора A :

$$[Af](\xi) = \frac{w(\xi)}{2} \int_{-1}^1 (\xi')^{2N} d\xi' = \frac{1}{2N+1} \sum_{i=1}^{\infty} \beta_{0,i} \xi^{2i}. \quad (2.17)$$

Таким чином, розклад образу $\psi(\xi)$ під дією оператора L має вигляд:

$$[L\phi](\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} b_{N,i} \xi^{2i}, \quad (2.18)$$

$$\text{де } b_{N,i} = \beta_{N,i} - \frac{1}{2N+1} \beta_{0,i}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Розклади (2.16) і (2.18) підставимо в ряд Неймана (2.14):

$$P_0(\xi) = \frac{\bar{P}}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k=0}^r C_r^k(\alpha_0)^{r-k} \sum_{n_0=1}^{\infty} \beta_{0,n_0} \sum_{n_1=1}^{\infty} b_{n_0,n_1} \dots \sum_{n_k=1}^{\infty} b_{n_{k-1},n_k} \xi^{2n_k}. \quad (2.19)$$

Остання формула виражає аналітичний розв'язок рівняння (2.10).

Функцію нормального тиску у момент часу $\tau=0$ отримаємо із співвідношень (2.19) і (2.7) отримаємо:

$$\tilde{p}_0(\xi) = \frac{\tilde{P}}{2} + \frac{\tilde{P}}{2} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=0}^s C_s^k(\alpha_0)^{s-k} \sum_{n_0=1}^{\infty} \beta_{0,n_0} \sum_{n_1=1}^{\infty} b_{n_0,n_1} \dots \sum_{n_k=1}^{\infty} b_{n_{k-1},n_k} \left(\xi^{2n_k} - \frac{1}{2n_k+1} \right).$$

При цьому, рекурентна формула (2.1) дозволяє знайти товщину смуги по закінченню часу $\Delta\tau$, підставивши останній розклад в формулу:

$$\bar{h}_1(\xi) = \bar{h}_0 - \Delta\tau \left(\frac{\tilde{p}_0(\xi)}{\tilde{p}^*} \right)^\omega. \quad (2.20)$$

Внаслідок представлення (2.19) що розв'язок рівняння (2.10) будемо шукати у вигляді:

$$P_0(\xi) = \frac{\tilde{P}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^{(0)} \xi^{2n}. \quad (2.21)$$

Підставимо розклади (2.16), (2.18) і (2.21) в рівняння (2.10) та одержимо:

$$\frac{\tilde{P}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^{(0)} \xi^{2n} = \alpha_0 \frac{\tilde{P}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^{(0)} \xi^{2n} + \frac{\tilde{P}}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \delta_j^{(0)} b_{j,n} \xi^{2n} + \frac{\tilde{P}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{0,n} \xi^{2n}. \quad (2.22)$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях ξ в рівності (2.22), та отримаємо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь. У ній невідомими є коефіцієнти степеневого ряду (2.21):

$$\delta_n^{(0)} = \alpha_0 \delta_n^{(0)} + \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j^{(0)} b_{j,n} + \beta_{0,n} \quad (n=1,2,3,\dots). \quad (2.23)$$

Після розв'язання системи (2.23), із співвідношення (2.7) можна знайти $\tilde{p}_0(0)$. Звідси та з представлення (2.21), одержимо розклад шуканої функції нормального тиску на нульовому за часом кроці:

$$\tilde{p}_0(\xi) = \tilde{p}_0(0) + P_0(\xi) = \frac{\tilde{P}}{2} \left(1 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\delta_j^{(0)}}{2j+1} + \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j^{(0)} \xi^{2j} \right).$$

Знайдемо товщину смуги по закінченню часу $\Delta\tau$, підставивши останній розклад в формулу (2.20):

$$\tilde{h}_1(\xi) = \tilde{h}_0 - \Delta\tau \left(\frac{\tilde{P}}{2\tilde{p}^*} \right)^\omega \left(1 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\delta_j^{(0)}}{2^{j+1}} + \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j^{(0)} \xi^{2j} \right)^\omega,$$

або в еквівалентному вигляді:

$$\tilde{h}_1(\xi) = \tilde{h}_0 - \Delta\tau \left(\frac{\tilde{P}}{2\tilde{p}^*} \right)^\omega \left(1 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\delta_j^{(0)}}{2^{j+1}} \right)^\omega \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^{(0)} \xi^{2j} \right)^\omega, \quad (2.24)$$

$$\text{де } \sigma_j^{(0)} = \frac{\delta_j^{(0)}}{1 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\delta_j^{(0)}}{2^{j+1}}}.$$

Розглянемо окремо $\left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^{(0)} \xi^{2j} \right)^\omega$ та розкладемо дану функцію в

ряд Маклорена, використавши відомий розклад для функції $(1+u)^\omega$:

$$\begin{aligned} \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^{(0)} \xi^{2j} \right)^\omega &= 1 + \omega \left(\sigma_1^{(0)} \xi^2 + \sigma_2^{(0)} \xi^4 + \sigma_3^{(0)} \xi^6 + \sigma_4^{(0)} \xi^8 + \dots \right) + \\ &+ \frac{\omega(\omega-1)}{2!} \left(\sigma_1^{(0)} \xi^2 + \sigma_2^{(0)} \xi^4 + \sigma_3^{(0)} \xi^6 + \sigma_4^{(0)} \xi^8 + \dots \right)^2 + \\ &+ \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{3!} \left(\sigma_1^{(0)} \xi^2 + \sigma_2^{(0)} \xi^4 + \sigma_3^{(0)} \xi^6 + \sigma_4^{(0)} \xi^8 + \dots \right)^3 + \\ &+ \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)(\omega-3)}{4!} \left(\sigma_1^{(0)} \xi^2 + \sigma_2^{(0)} \xi^4 + \sigma_3^{(0)} \xi^6 + \sigma_4^{(0)} \xi^8 + \dots \right)^4 + \dots \end{aligned}$$

Далі приведемо подібні доданки при однакових степенях:

$$\begin{aligned}
\left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^{(0)} \xi^{2j}\right)^{\omega} &= 1 + \xi^2 \omega \sigma_1^{(0)} + \xi^4 \left(\omega \sigma_2^{(0)} + \frac{\omega(\omega-1)}{2!} (\sigma_1^{(0)})^2 \right) + \\
&+ \xi^8 \left(\omega \sigma_3^{(0)} + \frac{\omega(\omega-1)}{2!} \cdot 2\sigma_1^{(0)} \sigma_2^{(0)} + \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{3!} \cdot (\sigma_1^{(0)})^3 \right) + \\
&+ \xi^8 \left(\omega \sigma_4^{(0)} + \frac{\omega(\omega-1)}{2!} \left((\sigma_2^{(0)})^2 + 2\sigma_1^{(0)} \sigma_3^{(0)} \right) + \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{3!} \cdot 3(\sigma_1^{(0)})^2 \sigma_2^{(0)} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)(\omega-3)}{4!} (\sigma_1^{(0)})^4 \right) + \dots
\end{aligned}$$

Виведемо закономірності, яким підпорядковуються коефіцієнти в отриманому виразі. Введемо позначення:

$$\begin{aligned}
p_{m,k} &= \prod_{i=1}^{k-m+1} \frac{\omega-i+1}{i}, \quad a_{k,m} = \sum_{i=1}^m a_{k-i,m-i+1} \sigma_i^{(0)}, \quad a_{k,k} = \sigma_k^{(0)}, \\
\gamma_k^{(0)} &= \sum_{m=1}^k p_{m,k} \cdot a_{k,m}, \\
(m &= 1, \dots, k-1, \quad k \in N)
\end{aligned}$$

Тоді шуканий розклад функції:

$$\left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^{(0)} \xi^{2j}\right)^{\omega} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j^{(0)} \xi^{2j}. \quad (2.25)$$

Підставимо (2.25) в (2.24) та визначимо функцію товщини смуги по закінченню часу $\Delta\tau$:

$$\tilde{h}_1(\xi) = \tilde{h}_0 - \Delta\tau \left(\frac{\tilde{P}}{2\tilde{p}^*} \right)^\omega \left(1 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\delta_j^{(0)}}{2^{j+1}} \right)^\omega \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j^{(0)} \xi^{2j} \right).$$

2.2.4 Наближений розв'язок операторного рівняння на нульовому за часом кроці

Нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь (2.23) будемо розв'язувати наближено за допомогою методу редукції, таким чином зводячи її до кінцевої системи з N рівнянь. Оскільки отримана система (2.23) еквівалентна рівнянню (2.10), а невідомі змінні в системі (2.23) є коефіцієнтами степеневого ряду (2.21), то можливість застосування методу редукції до системи (2.23) рівносильна можливості застосування цього метода до операторного рівняння (2.10).

Тобто всі ряди в (2.22) і (2.14) можна замінити частковими сумами до номеру N . Тоді і степеневий ряд (2.21) перетвориться в многочлен

$$\tilde{\tilde{P}}_0(\xi) = \frac{\tilde{P}}{2} \sum_{n=1}^N \delta_n^{(0)} \xi^{2n} \text{ степені } N, \text{ а операторне рівняння (2.10) заміниться}$$

наближенням:

$$\tilde{\tilde{P}}_0(\xi) = \alpha_0 \tilde{\tilde{P}}_0(\xi) + \left[\tilde{\tilde{L}} \tilde{\tilde{P}}_0 \right](\xi) + \frac{\tilde{P}}{2} \tilde{\tilde{w}}(\xi), \quad (2.26)$$

де

$$\left[\tilde{\tilde{L}} \tilde{\tilde{P}}_0 \right](\xi) = \frac{\tilde{P}}{2} \sum_{k=1}^N \delta_k^{(0)} \sum_{n=1}^N b_{k,n} \xi^{2n} = [\Pi_N L P_0](\xi).$$

тут проектор $\Pi_N : C[-1;1] \rightarrow \Gamma_N[-1;1]$ відображає простір неперервних

функцій $C[-1;1]$ в простір $T_N[-1;1]$ многочленів степені $2N$, при цьому $[\Pi_N P_0](\xi) = \tilde{P}_0(\xi)$.

Доведення можливості застосування методу редукції аналогічне приведену у посібнику [12]. Зазначені там умови виконуються і для операторних рівнянь, що виражені через стискуючий оператор. Вони мають місце для операторного рівняння (2.10) на множині M . Таким чином, можна зробити висновок [12], що, якщо кількість рівнянь і змінних N достатньо велика, то у наближене рівняння (2.26) є розв'язок $(\tilde{P}_0)_N^*(\xi) \in M_1$ і послідовність наближених розв'язків $\left\{ (\tilde{P}_0)_N^*(\xi) \right\} \subset M_1$ збігається до точного $P_0^*(\xi) \in M$, тобто

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| P_0^* - (\tilde{P}_0)_N^* \right\| = 0.$$

При цьому, наближене рівняння (2.26) можна розв'язувати методом послідовних наближень [12].

2.3 Розв'язання системи інтегральних рівнянь даної задачі на k -му за часом кроці

2.3.1 Зведення системи інтегральних рівнянь до операторного рівняння Фредгольма другого роду

Нехай розв'язок на попередньому кроці $\tilde{p}_{k-1}(\xi)$ уже знайдено. В тому числі відома і функція товщини смуги

$$\tilde{h}_k(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i^{(k)} \xi^{2i}. \quad (2.27)$$

Щоб знайти функцію нормального тиску на k -му за часом кроці треба розв'язати систему інтегральних рівнянь (2.2)-(2.3).

Введемо позначення:

$$\alpha_k = 1 - \tilde{A}\tilde{h}_k(0), \quad P_k(\xi) = \tilde{p}_k(\xi) - \tilde{p}_k(0), \quad H_k(\xi) = \tilde{h}_k(\xi) - \tilde{h}_k(0), \quad (2.28)$$

З умови рівноваги (2.3) можна виразити $\tilde{p}_k(0)$:

$$\tilde{p}_k(0) = \frac{\tilde{P}}{2} - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_k(\xi') d\xi'. \quad (2.29)$$

Підставимо (2.28) і (2.29) в інтегральне рівняння (2.1):

$$\begin{aligned} H_k(\xi) - \tilde{A}H_k(\xi) \left(P_k(\xi) + \frac{\tilde{P}}{2} - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_k(\xi') d\xi' \right) + (1 - \alpha_k) P_k(\xi) + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left(P_k(\xi') + \frac{\tilde{P}}{2} - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_k(\xi'') d\xi'' \right) \ln \left| \frac{\xi' - \xi}{\xi'} \right| d\xi' = 0. \end{aligned}$$

Тоді отримаємо еквівалентне рівняння у вигляді:

$$\begin{aligned} P_k(\xi) = \alpha_k P_k(\xi) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \left| \frac{\xi' - \xi}{\xi'} \right| P_k(\xi') d\xi' - \frac{w(\xi)}{2} \int_{-1}^1 P_k(\xi') d\xi' - \\ - \tilde{A}H_k(\xi) \left[P_k(\xi) - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_k(\xi') d\xi' \right] + \frac{\tilde{P}}{2} w(\xi) - \frac{\tilde{P}}{2} \tilde{A}H_k(\xi) + H_k(\xi). \quad (2.30) \end{aligned}$$

Введемо наступні лінійні оператори:

$$[R_k f](\xi) = \tilde{A}H_k(\xi) \left[f(\xi) - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(\xi') d\xi' \right], \quad [L_k f](\xi) = [(L - R_k)f](\xi). \quad (2.31)$$

При цьому функцію

$$v_k(\xi) = \frac{\tilde{P}}{2} w(\xi) - \frac{\tilde{P}}{2} \tilde{A}H_k(\xi) + H_k(\xi) \quad (2.32)$$

можна знайти через раніше знайдені функції. Таким чином, інтегральне рівняння (2.30) перетворюється в операторне рівняння Фредгольма другого роду, де функція $v_k(\xi)$ буде вільним членом:

$$P_k(\xi) = [(\alpha_k I + L_k)P_k](\xi) + v_k(\xi). \quad (2.33)$$

2.3.2 Властивості лінійних операторів на k -му за часом кроці

У попередньому розділі було доведено, що розв'язок інтегрального рівняння на нульовому кроці належить простору $C[-1,1]$. Аналогічно можна показати, що це виконується і для k -го за часом кроку. Тому будемо розглядати оператори (2.31) на цьому просторі.

Очевидно, що $R_k : C[-1;1] \rightarrow C[-1;1]$ причому

$$\|R_k f\| \leq \tilde{A}\|H_k\| \cdot \left\| f(\xi) - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(\xi') d\xi' \right\| \leq \tilde{A}\|H_k\| \cdot \|f\|.$$

Причому, на множині M простору $C[-1;1]$ має місце така ж оцінка, як і в (2.13), тому маємо:

$$\|(\alpha_k I + L_k)f\| \leq \|(\alpha_k I + L)f\| + \|R_k\| \cdot \|f\| \leq \left(\frac{1 + \alpha_k}{2} + \tilde{A} \|H_k\| \right) \cdot \|f\|.$$

Враховуючи фізичний зміст функції $h_k(\xi)$ в даній задачі, можна зробити висновок, що вона є парною на відрізку $[-1;1]$ і, крім того, спадною на відрізку $[0;1]$. Це дозволяє обчислити норму функції $H_k(\xi)$:

$$\|H_k\| = \max_{\xi \in [-1;1]} |\tilde{h}_k(\xi) - \tilde{h}_k(0)| = \tilde{h}_k(0) - \tilde{h}_k(1).$$

Звідси отримаємо:

$$\|(\alpha_k I + L_k)f\| \leq \left(1 + \frac{\tilde{A}\tilde{h}_k(0)}{2} - \tilde{A}\tilde{h}_k(1) \right) \cdot \|f\|,$$

або в іншому вигляді:

$$\|(\alpha_k I + L_k)f\| \leq q_k \cdot \|f\|, \quad q_k = 1 + \frac{\tilde{A}\tilde{h}_k(0)}{2} - \tilde{A}\tilde{h}_k(1). \quad (2.34)$$

Таким чином, отримаємо, що оператор $\alpha_k I + L_k$ є стискуючим на множині M , оскільки $0 < q_k < 1$.

2.3.3 Наближено аналітичний розв'язок задачі на k -му за часом кроці

Зважаючи на принцип стискуючих відображень [13], рівняння (2.33) має єдиний розв'язок. Представимо його рядом Неймана:

$$P_k(\xi) = \frac{\tilde{P}}{2} \sum_{i=0}^{\infty} [(\alpha_k I + L)^i v_k](\xi). \quad (2.35)$$

Функція $v_k(\xi)$ виду (2.32) залежить від функцій $H_k(\xi)$ та $w(\xi)$, тому враховуючи розклади (2.16) і (2.27) можна зробити висновок, що її можна представити степеневим рядом за парними степенями ξ . За тими ж степенями ξ можна розкласти функцію $P_k(\xi)$, якщо перетворити ряд Неймана (2.35), використавши розклад образу $\psi(\xi)$ під дією оператора L (2.18). У функції нормального тиску $\tilde{p}_k(\xi)$ буде аналогічна властивість.

Тому, розв'язок рівняння (2.33) можна представити у наступному вигляді:

$$P_k(\xi) = \frac{\tilde{P}}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i^{(k)} \xi^{2i}. \quad (2.36)$$

Підставивши (2.36) в (2.33), отримаємо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} \delta_n^{(k)} = & \alpha_k \delta_n^{(k)} + \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j^{(k)} b_{j,n} - \tilde{A} \left[-\varphi_n \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\delta_j^{(k)}}{2^{j+1}} + \sum_{s=1}^{n-1} \varphi_{n-s} \delta_s^{(k)} \right] + \\ & + \beta_{0,n} - \tilde{A} \varphi_n + \frac{2}{\tilde{P}} \varphi_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Аналогічно нульовому кроку можна обґрунтувати можливість застосування методу редукції до нескінченної системи (2.37), замінивши її на скінченну. Її розв'язок знайдемо за допомогою методу послідовних наближень.

Шукану функцію нормального тиску в момент часу τ_k знайдемо з умови рівноваги (2.29) і розкладу (2.36):

$$\tilde{p}_k(\xi) = \tilde{p}_k(0) + P_k(\xi) = \frac{\tilde{P}}{2} \left(1 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\delta_j^{(k)}}{2j+1} + \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j^{(k)} \xi^{2j} \right).$$

З останнього співвідношення та рекурентної формули (2.1) знайдемо функцію товщини смуги $\tilde{h}_{k+1}(\xi)$:

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{k+1}(\xi) = \tilde{h}_k(\xi) - \left(\frac{\tilde{p}_k(\xi)}{\tilde{p}^*} \right)^\omega \Delta\tau = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i^{(k)} \xi^{2i} - \\ - \Delta\tau \left(\frac{\bar{P}}{2\bar{p}^*} \right)^\omega \left[1 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\delta_j^{(k)}}{2j+1} + \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j^{(k)} \xi^{2j} \right]^\omega. \end{aligned}$$

Аналогічно до нульового кроку можна звести дану функцію до вигляду (2.24)

та розкласти отриману функцію $\left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^{(k)} \xi^{2j} \right)^\omega$ в ряд Маклорена. Тоді

функція товщини смуги в момент часу τ_{k+1} запишеться у наступному вигляді:

$$\tilde{h}_{k+1}(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i^{(k)} \xi^{2i} - \Delta\tau \left(\frac{\tilde{P}}{2\tilde{p}^*} \right)^\omega \left(1 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\delta_j^{(k)}}{2j+1} \right)^\omega \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j^{(k)} \xi^{2j} \right).$$

Слід зазначити, що наближений розв'язок нескінченної системи (2.37) знайдемо, застосувавши метод редукції. Таким чином, зведемо систему до скінченної. Далі методом послідовних наближень розв'яжемо отриману скінченну систему. Можливість застосування цих методів можна довести аналогічно нульовому кроку.

3 АНАЛІЗ ЧИСЛОВИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

Описаний вище алгоритм розв'язання даної задачі реалізовано за допомогою прикладного аналітичного пакета Maple (додаток А). Числові результати отримуємо для обох випадків закріплення: коли смуга лежить на жорсткій основі без тертя (задача 1) та для жорстко закріпленої смуги на основі (задача 2). Зауважимо, що другий випадок є більш цікавим для практики, оскільки його можна використовувати для аналізу зносу твердих мастильних покриттів.

Розрахунки будемо проводити у припущенні, що модуль пружності смуги менше модуля пружності основи так, що $n = 0,1$. Значення безрозмірних величин оберемо такі ж, як в монографії [8]. Нехай $\omega = 1,4$, $\tilde{h}_0 = 3 \cdot 10^{-2}$, $\tilde{P} = 9 \cdot 10^{-3}$, $\tilde{p}^* = 0,26$.

Для покрокового за часом методу обрано крок $\Delta\tau = 0,1$. За допомогою методу редукції нескінченну систему алгебраїчних рівнянь зведено до скінченної, вибравши кількість рівнянь і невідомих коефіцієнтів рівним 50. Розрахунки було проведено для 100 кроків, таким чином отримавши значення нормального тиску і товщини смуги для дискретних моментів часу від $\tau = 0$ до моменту $\tau = 1$.

Після проведення обчислень на основі отриманих результатів було побудовано графіки знайдених функцій. На рисунку 3.1 наведено графік розподілу нормального тиску під штампом в різні моменти часу: $\tau = 0$ (крива 1), $\tau = 0,15$ (крива 2), $\tau = 0,64$ (крива 3), $\tau = 1$ (крива 4). А на рисунку 3.2 проілюстровано графік профілю зношеної поверхні в ті ж моменти часу відповідно. Оскільки обидві функції є симетричними, то на відрізку $[-1,0]$ зображено графіки для задачі 1, а на відрізку $[0,1]$ – для задачі 2.

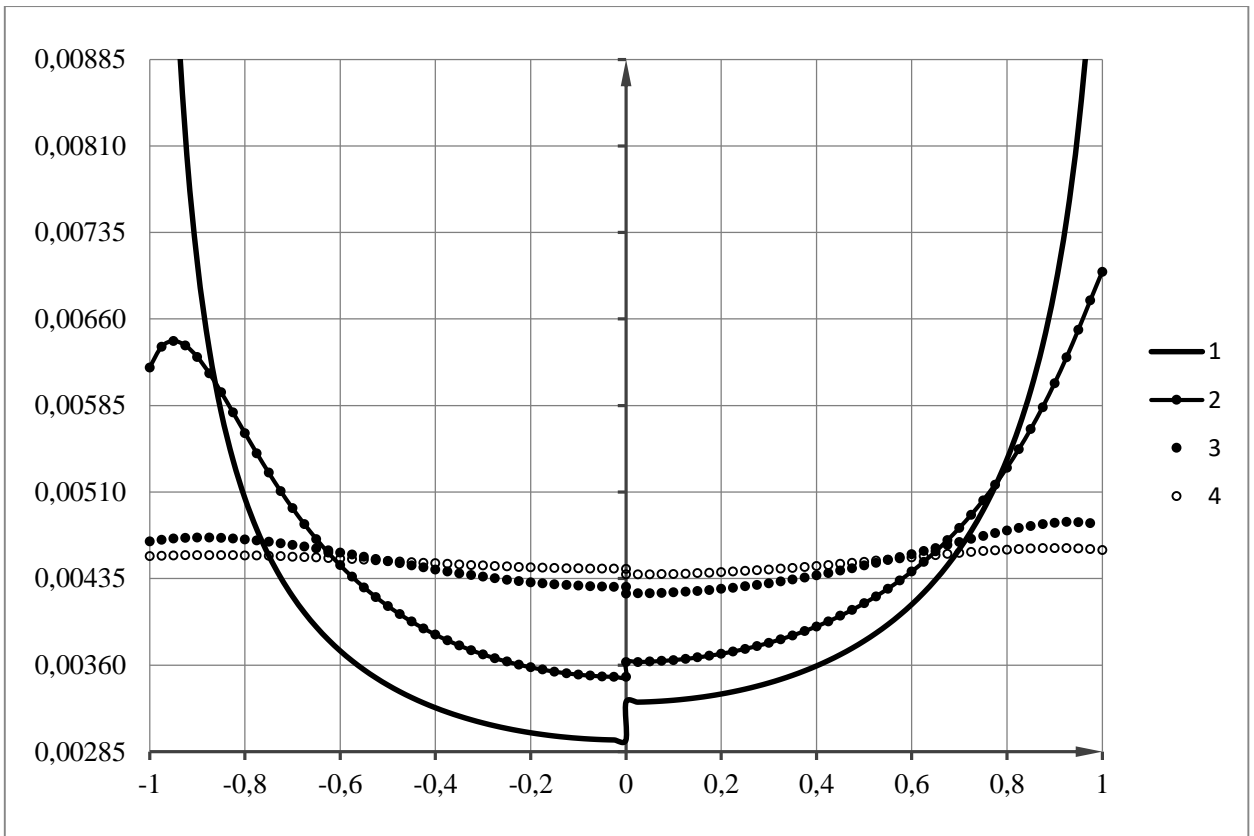


Рисунок 3.1 – Функції розподілу нормального тиску $\tilde{p}(\xi, \tau)$
в різні моменти часу

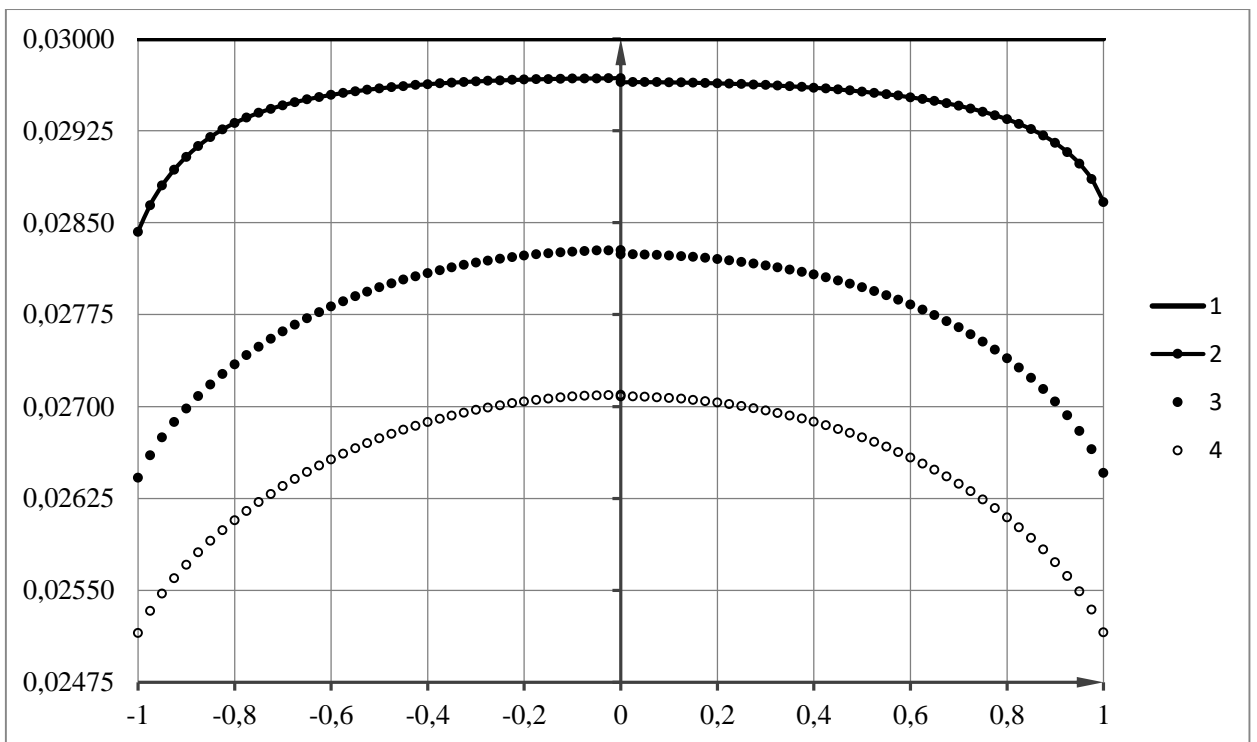


Рисунок 3.2 – Функції профілів зношеної поверхні тонкої смуги $\tilde{h}(\xi, \tau)$
в різні моменти часу

Як видно з рисунків, в розглянутому прикладі процес зношування умовно ділиться на дві стадії [8]:

1. На початковій стадії (стадії припрацювання) як нормальний тиск, так і форма зношеної поверхні стрімко змінюються.

2. На другій стадії (стадії сталого зносу) тиск перерозподіляється і наближається до рівномірного, а форма зношеної поверхні стає незмінною.

Розглянемо детальніше першу стадію процесу зношування даної задачі. Тут тиск перерозподіляється: на межі області контакту він стрімко зменшується, в той час як в центрі площадки дещо збільшується, що призводить до вирівнювання функції тиску. Крім того, на стадії припрацювання можна спостерігати інтенсивний знос смуги в кутових точках межі, де найвищий тиск і, відповідно, швидкість зносу.

Порівнявши графіки функцій двох задач в момент часу $\tau = 0,15$, можна зробити висновок, що коли смуга лежить на жорсткій основі без тертя (задача 1), вона зношується стрімкіше, ніж, коли її жорстко закріплено на основі (задача 2). Це явище можна пояснити різними способами закріплення смуги.

На другій же стадії тиск вирівнюється і наближається до рівномірного для обох задач, а форма зношеної поверхні стає незмінною. З рисунків 3.1 та 3.2 видно, що графіки функцій для обох задач в моменти часу $\tau = 0,64$ та $\tau = 1$ майже збігаються.

Слід зазначити, що середня швидкість зношування на стадії сталого зносу є мінімальною, а робота пари тертя в встановленому режимі є найбільш сприятливою. Рівномірність тиску забезпечує зменшення його величини у місцях найбільшої концентрації, що призводить до більш м'яких умов праці. У деяких випадках це може призвести до зміни механізмів зношування, запобігти катастрофічному зносу або макроруйнуванню. Проте, при зношуванні достатньо тонкої смуги сталий знос може не наступити, якщо смуга повністю зноситься на стадії припрацювання. Тому важливо знати

товщину покриття, щоб забезпечити його довговічність. Це детально проаналізовано в монографії [6].

Зауважимо, що аналогічну задачу у монографії [6] розв'язано за допомогою зведення інтегральних рівнянь до скінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь на кожному часовому кроці. Знайдені таким чином функція тиску і функція товщини смуги є їх поточною апроксимацією. Порівнюючи отримані нами результати з викладеними у монографії [6], можна зробити висновок, що результати, отримані різними методами, узгоджуються.

ВИСНОВКИ

У даній роботі розглянуто плоску контактну задачу про нелінійне зношування тонкої пружної смуги при ковзанні по ній штампа з плоскою основою. При цьому, область контакту є фіксованою. Дана задача моделюється системою інтегральних рівнянь, яку розв'язано покроковим за часом методом, запропонованим І.Г. Горячевою [6].

У роботі одержано як аналітичний, так і чисельний розв'язки на кожному кроці за часом, доведено єдиність отриманого розв'язку.

Проаналізувавши числові результати, можна зробити наступні висновки:

- 1) функція розподілу нормального тиску є обмеженою у будь-який момент часу;
- 2) найменший тиск спостерігається в центрі області контакту, а найбільший – в точках, близьких до межі цієї області;
- 3) з часом нормальний тиск вирівнюється, тобто збільшується в центрі області контакту і зменшується на межі;
- 4) найбільший знос тонкої смуги спостерігаємо на межі області контакту.

Результати даної роботи підтверджують, що процес зношування можна умовно поділити на 2 стадії: стадію припрацювання та стадію сталого зносу, що було зазначено в [8].

Отримані результати можуть бути використані для розв'язання деяких питань оптимізації процесів зношування в інженерній практиці.

Запропонований метод розв'язання може бути застосований до розв'язання задач лінійного зносу, а також для задач зі змінною областю контакту.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Александров В.М., Чебаков М.И. Введение в механику контактных взаимодействий. Ростов-на-Дону : ООО «ЦВВР», 2007. 114 с.
2. Александров В.М., Коваленко Е.В. Математические методы в контактных задачах с износом. *Нелинейные модели в задачах механики деформируемого твердого тела*. 1984. С. 77–89.
3. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и с прослойками. Москва : Наука, 1983. 488 с.
4. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. Москва : Наука, 1980. 304 с.
5. Галин Л.А. Развитие теории контактных задач в СССР. Москва : Наука, 1976. 493 с.
6. Горячева И.Г., Добычин М.Н. Контактные задачи в трибологии. Москва : Машиностроение, 1988. 254 с.
7. Горячева И.Г., Солдатенков И.А. Контактные задачи с учетом износа. *Механика контактных взаимодействий* / под ред. И.И. Воровича, В.М. Александрова. Москва, 2001. С. 438–458.
8. Горячева И.Г. Механика фрикционного взаимодействия. Москва : Наука, 2001. 478 с.
9. Дмитрова К.М. Реалізація покрокового за часом методу розв'язання системи інтегральних рівнянь задачі про зношування пружного шару при контакті : квал. робота... бакалавра математики: 111 / Запорізький національний університет. Запоріжжя, 2019.
10. Д'яченко Н.М., Жмур Т.О., Нікітенко А. М. Аналітичний і наближено аналітичний розв'язок плоскої контактної задачі про взаємодію штампа з шорсткою смугою. *Вісник Запорізького нац. ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки*. 2008. Вип. 1. С. 58–66.

11. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. Продолжение курса; под ред. А.Н. Тихонова. Москва : Изд-во МГУ, 1987. 358 с.
12. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. Москва : Наука, 1984. 752 с.
13. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва : Наука, 1989. 624 с.
14. Кравчук А. С. Контактные задачи с односторонними связями и учетом сил трения. *Механика контактных взаимодействий* / под ред. И.И. Воровича, В.М. Александрова. Москва, 2001. С. 491-498.
15. Пронников А.С. Надежность машин. Москва : Машиностроение, 1978. 592 с.
16. Савчук Ю., Максимук О. Контактна задача про зношування пружної півплощини штампами канонічної форми. *Вісник ТНТУ*. 2015. Вип. 2. С. 70–80.
17. Aiblas J.B., Kuipers M. Contact problems of a rectangular block on an elastic layer of finite thickness. *Acta mechanica*. 1969. В. 3. P.133–145.

ДОДАТОК А

Фрагмент програми для знаходження числових результатів

```

restart;
with(plots): with(LinearAlgebra):
kol := 50: step := 100:
Ps := 9·10-3: α := 1.4: A := 3.8: pzv := 0.26: h0 := 3·10-2: dtau := 0.01: eps := 0.000001:
B := array(1..kol, 1..kol, 0..step): C := array(1..kol, 0..step): X := array(1..kol, 0..step): XI := array(1..kol, (
..step): K := array(1..kol, 0..step): H := array(0..kol, 0..step + 1): P := array(0..kol, 0..step): Pf
:= vector(step + 1): Hf := vector(step + 1):
for n from 1 to kol do
H[0, 0] := h0: H[n, 0] := 0:
end do:
for l from 0 to step do
for n from 1 to kol do
for j from 1 to kol do
if j = n then B[n, j, l] := evalf( 1 - A·H[0, l] -  $\frac{4·j}{\text{Pi}·(2·j - 2·n + 1)·(2·j + 1)·(2·n - 1)} + A·\frac{H[n, l]}{2·j + 1}$  ):
else if n > j then B[n, j, l] := evalf(  $-\frac{4·j}{\text{Pi}·(2·j - 2·n + 1)·(2·j + 1)·(2·n - 1)} - A·\left(H[n - j, l] - \frac{H[n, l]}{2·j + 1}\right)$  ):
else B[n, j, l] := evalf(  $-\frac{4·j}{\text{Pi}·(2·j - 2·n + 1)·(2·j + 1)·(2·n - 1)} + A·\frac{H[n, l]}{2·j + 1}$  ):
end if: end if: end do: end do:
for n from 1 to kol do
C[n, l] := evalf(  $-\frac{1}{\text{Pi}·n·(1 - 2·n)} + H[n, l]·\left(\frac{2}{Ps} - A\right)$  ):
end do:
for n from 1 to kol do X[n, l] := C[n, l]: end do:
for n from 1 to kol do
XI[n, l] := evalm(  $\sum_{i=1}^{kol} B[n, i, l]·X[i, l] + C[n, l]$  ):
end do:
while evalf(  $\sqrt{\sum_{i=1}^{kol} (X[i, l] - XI[i, l])^2}$  ) > eps do
for n from 1 to kol do
X[n, l] := XI[n, l]:
K[n, l] := evalf(  $\sum_{i=1}^{kol} B[n, i, l]·X[i, l] + C[n, l]$  ):
XI[n, l] := K[n, l]:
end do: end do:
for n from 1 to kol do
P[0, l] := evalf(  $\frac{Ps}{2}·\left(1 - \sum_{i=1}^{kol} \frac{X[i, l]}{2·i + 1}\right)$  ): P[n, l] := evalf(  $\frac{Ps}{2}·X[n, l]$  ):
end do:
for n from 1 to kol do
φ[n, l] :=  $\frac{P[n, l]}{P[0, l]}$  :
for m from 1 to n do
Pr[m, n, l] :=  $\prod_{s=1}^{n-m+1} \frac{\alpha - s + 1}{s}$  : S[n, m, l] :=  $\sum_{s=1}^m S[n - s, m - s + 1, l]·\phi[s, l]$  :
end do:
S[n, n, l] := φ[n, l]: w[0, l] := 1: w[n, l] :=  $\sum_{i=1}^n Pr[i, n, l]·S[n, i, l]$  :
end do:
for n from 0 to kol do
H[n, l + 1] := evalf(  $H[n, l] - dtau·\left(\frac{P[0, l]}{pzv}\right)^\alpha·w[n, l]$  ):
end do:
Pf[l + 1] :=  $\sum_{i=0}^{kol} P[i, l]·x^{2·i}$  : Hf[l + 1] :=  $\sum_{i=0}^{kol} H[i, l + 1]·x^{2·i}$  :
end do:

```