

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ  
Кафедра фундаментальної математики

**КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА**

на тему: «ЕНЕРГЕТИЧНИЙ ПІДХІД ДО  
ГОМОГЕНІЗАЦІЇ В'ЯЗКОПРУЖНИХ КОМПОЗИТІВ»

Виконав: студент 2 курсу, групи 8.1119  
спеціальності 111 математика  
(шифр і назва спеціальності)  
освітньої програми математика  
(назва освітньої програми)  
Є. А. Олексієнко  
(ініціали та прізвище)

Керівник доцент кафедри фундаментальної  
математики, доцент, к.ф.-м.н. Клименко М. І.  
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Рецензент доцент кафедри прикладної математики і  
механіки, доцент, к.ф.-м.н. Левчук С. А.  
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Запоріжжя  
2020

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

Факультет математичний

Кафедра фундаментальної математики

Рівень вищої освіти магістр

Спеціальність 111 математика

(шифр і назва)

Освітня програма математика

**ЗАТВЕРДЖУЮ**

Завідувач кафедри  
фундаментальної математики,  
д.т.н., доцент

\_\_\_\_\_ Гребенюк С. М.

(підпис)

« 25 » вересня 2020 р.

**З А В Д А Н Н Я**

**НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТОВІ(СТУДЕНТЦІ)**

Олексієнку Євгенію Андрійовичу

(прізвище, ім'я та по-батькові)

1. Тема роботи (проекту) Енергетичний підхід до гомогенізації  
в'язкопружних композитів

керівник роботи (проекту) Клименко Михайло Іванович, к.ф.-м.н., доцент

(прізвище, ім'я та по-батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від « 22 » вересня 2020 року № 1416-с

2. Строк подання студентом роботи 4 грудня 2020 року

3. Вихідні дані до роботи 1. Постановка задачі.  
2. Перелік літератури.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)

1. Постановка задачі.

2. Основні теоретичні відомості.

3. Розв'язання задачі гомогенізації в'язкопружного композиту.

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень) \_\_\_\_\_

Презентація

## 6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання 25.09.2020

## КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	25.09.2020	
2.	Збір вихідних даних.	28.09.2020	
3.	Обробка методичних та теоретичних джерел.	12.10.2020	
4.	Розробка першого та другого розділу.	26.10.2020	
5.	Розробка третього розділу.	16.11.2020	
6.	Оформлення та нормоконтроль кваліфікаційної роботи.	30.11.2020	
7.	Підготовка доповіді та презентації.	07.12.2020	
8.	Захист кваліфікаційної роботи.	18.12.2020	

Студент \_\_\_\_\_  
(підпис)

Є. А. Олексієнко \_\_\_\_\_  
(ініціали та прізвище)

Керівник роботи \_\_\_\_\_  
(підпис)

М. І. Клименко \_\_\_\_\_  
(ініціали та прізвище)

## Нормоконтроль пройдено

Нормоконтролер \_\_\_\_\_  
(підпис)

О. Г. Спиця \_\_\_\_\_  
(ініціали та прізвище)

## РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Енергетичний підхід до гомогенізації в'язкопружних композитів»: 58 с., 2 рис., 1 таблиця, 9 джерел.

**В'ЯЗКОПРУЖНІСТЬ, ГОМОГЕНІЗАЦІЯ, ЕФЕКТИВНІ СТАЛІ, КОМПОЗИТ, МОДУЛЬ ЗСУВУ.**

Об'єкт дослідження – методика застосування енергетичного критерію для визначення ефективного модуля зсуву в'язкопружного трансверсально-ізотропного композиту.

Мета роботи: визначення ефективного модуля зсуву для в'язкопружного трансверсально-ізотропного композитного матеріалу, що складається з в'язкопружної матриці та пружного волокна.

Предмет дослідження: фізико-механічні властивості в'язкопружного композитного матеріалу.

Методи дослідження – методи аналізу (аналіз інформації вітчизняних та зарубіжних науковців) і синтезу (систематизація інформації), діагностики (документальний та інструментальний методи збору інформації), математичного моделювання (моделі в'язкопружних композитів), операційний метод (розв'язання задачі гомогенізації).

У кваліфікаційній роботі розглянуті особливості застосування перетворення Лапласа до розв'язання задач в'язкопружності, основні принципи математичного моделювання властивостей в'язкопружних композитних матеріалів, розв'язано задачу визначення ефективного модуля зсуву в'язкопружного композита на основі застосування енергетичного критерію.

Результати роботи можуть бути використані при проектуванні конструкцій, що містять елементи, виготовлені з композиційних матеріалів.

## SUMMARY

Master's Qualification Thesis "Energy Approach to Homogenization of Viscoelastic Composites": 58 pages, 2 figures, 1 table, 9 sources.

VISCAPENSITY, HOMOGENIZATION, EFFICIENT STEEL, COMPOSITE, SHIFT MODULE.

The object of research is a method of applying the energy criterion to determine the effective shear modulus of a viscoelastic transverse isotropic composite.

Purpose: To determine the effective shear modulus for a viscoelastic transversely isotropic composite material consisting of a viscoelastic matrix and an elastic fiber.

Subject of research: physical and mechanical properties of viscoelastic composite material.

Research methods – methods of analysis (analysis of information of domestic and foreign scientists) and synthesis (systematization of information), diagnostics (documentary and instrumental methods of information collection), mathematical modeling (models of viscoelastic composites), operational method (solving the problem of homogenization).

The qualification thesis considers the peculiarities of the application of Laplace transform to solve viscoelastic problems, the basic principles of mathematical modeling of the properties of viscoelastic composite materials, the problem of determining the effective shear modulus of viscoelastic composite based on the energy criterion.

The results of the work can be used in the design of structures containing elements made of composite materials.

## ЗМІСТ

Завдання на кваліфікаційну роботу.....	2
Реферат.....	4
Summary.....	5
Вступ.....	7
1 Сутність операційного методу.....	9
1.1 Перетворення Лапласа та умови його існування.....	9
1.2 Властивості інтегрального перетворення Лапласа.....	12
1.3 Методи відтворення оригіналу за відомим зображенням при перетворенні Лапласа.....	18
1.4 Розв'язання інтегральних рівнянь типу згортки операційним методом.....	22
2 Основні підходи до математичного моделювання в'язкопружних композитів .....	25
2.1 Основні поняття теорії композитів .....	25
2.2 Основні математичні моделі в'язкопружних матеріалів.....	26
3 Розв'язання задачі гомогенізації в'язкопружного композиту на основі застосування енергетичного підходу.....	43
3.1 Сутність задачі гомогенізації та методика її розв'язання.....	43
3.2 Гомогенізація в'язкопружного композитного матеріалу при деформації поздовжнього зсуву.....	45
3.3 Знаходження оригіналу ядра релаксації для інтегрального оператора модуля зсуву.....	49
Висновки.....	55
Перелік посилань.....	57

## ВСТУП

Розвиток сучасних технологій створення нових матеріалів ґрунтується на дослідженні властивостей композитів, які можна використати в умовах дії складних навантажень. Це вимагає збільшення міцності конструкційного матеріалу за умови мінімізації його маси. Розв'язання цієї задачі дає змогу проектування та створення матеріалів з заданими фізико-механічними властивостями. Основним методом, що використовується при цьому, є математичне моделювання. У зв'язку з цим актуальною є розробка засобів математичного моделювання ефективних характеристик композиційних матеріалів, яка, зокрема, здійснюється у даній кваліфікаційній роботі магістра.

Метою даного магістерського дослідження є визначення ефективного модуля зсуву для в'язкопружного трансверсально-ізотропного композитного матеріалу, що складається з в'язкопружної матриці та пружного волокна.

Для досягнення цієї мети потрібно вирішити наступні завдання:

- дослідити можливості застосування перетворення Лапласа для розв'язання інтегральних рівнянь типу згортки;
- ознайомитися з основними принципами математичного моделювання властивостей в'язкопружних композитних матеріалів;
- дослідити особливості застосування інтегрального перетворення Лапласа до дослідження лінійної моделі спадковості для в'язкопружного середовища;
- ознайомитися з сучасними методиками визначення ефективних характеристик композитних матеріалів;
- застосувати енергетичний критерій визначення ефективного модуля зсуву в'язкопружного композита для знаходження характеристик відповідного інтегрального оператора при різних типах ядра релаксації.

Об'єктом дослідження у даній роботі є методика застосування енергетичного критерію для визначення ефективного модуля зсуву

в'язкопружного трансверсально-ізотропного композиту, предмет дослідження – фізико-механічні властивості композитного матеріалу.

Визначення фізико-механічних характеристик композитів як однорідних матеріалів (ефективних характеристик) за відомими властивостями їх складових є складною задачею сучасної механіки, далекою від остаточного розв'язання, незважаючи на велику кількість пропонованих аналітичних та експериментальних підходів. Ця задача ускладнюється тим, що напружено-деформований стан багатьох композитів при певних навантаженнях суттєво залежить від часу, що свідчить про наявність у складових композита в'язкопружних властивостей. Одним з шляхів розв'язання даної задачі є використання енергетичного критерію, що досліджується у даній магістерській роботі.



# 1 СУТНІСТЬ ОПЕРАЦІЙНОГО МЕТОДУ

## 1.1 Перетворення Лапласа та умови його існування

Перетворенням Лапласа [1] функції  $f(t)$ ,  $t \in R$  називають функцію  $F(p)$  комплексної змінної  $p$ , що подається наступною рівністю:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt. \quad (1.1)$$

Функцію, для якої існує перетворення Лапласа, називають оригіналом [1]. Щоб бути оригіналом, функція  $f(t)$  повинна задовольняти наступні умови:

- $f(t) = 0$  при  $t < 0$  ( $f(0) = f(+0)$ );
- функція  $f(t)$  може мати скінченне число точок розриву 1-го роду;
- існують числа  $\alpha$  і  $M > 0$ , такі, що  $|f(t)| < Me^{\alpha t}$ . При цьому найменше значення константи  $\alpha$  називають показником зростання функції  $f(t)$ .

Ці умови задовольняють майже всі функції, що описують реальні фізичні процеси.

Розглянемо умови існування зображення при перетворенні Лапласа [2]. Нехай  $f(t)$  є оригінал, що має показник зростання  $\alpha$ . Тоді інтеграл Лапласа

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

є абсолютно збіжним у півплощині  $\operatorname{Re} p > \alpha$ , при цьому функція  $F(p)$  є аналітичною у цій півплощині [3].

Для функції-оригіналу виконується нерівність  $|f(t)| < Me^{\alpha t}$ . Нехай  $p = \sigma + is$ , тоді отримуємо:

$$|e^{-pt}| = e^{-\sigma t}, \quad |f(t)e^{-pt}| \leq Me^{\alpha t} e^{-\sigma t} = Me^{(\alpha-\sigma)t}.$$

З останньої рівності знаходимо:

$$\int_0^{\infty} |f(t)e^{-pt}| dt \leq M \int_0^{\infty} e^{(\alpha-\sigma)t} dt = M \frac{e^{(\alpha-\sigma)t}}{\alpha-\sigma} \Big|_0^{\infty} = \frac{M}{\sigma-\alpha}, \quad (1.2)$$

оскільки  $\alpha - \sigma < 0$ , тому  $e^{(\alpha-\sigma)t} \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Таким чином, з нерівності (1.2) випливає, що інтеграл Лапласа є абсолютно збіжним у області  $\operatorname{Re} p > \alpha$ .

Встановимо аналітичність зображення  $F(p)$  [3]. У півплощині  $\operatorname{Re} p > \alpha$  отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{\Delta F}{\Delta p} &= \frac{F(p + \Delta p) - F(p)}{\Delta p} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) \frac{1}{\Delta p} (e^{-\Delta pt} - 1) dt = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) \frac{1}{\Delta p} \left( -\Delta pt + \frac{(\Delta pt)^2}{2!} - \frac{(\Delta pt)^3}{3!} + \dots \right) dt = - \int_0^{\infty} e^{-pt} t f(t) dt + \varepsilon, \end{aligned} \quad (1.3)$$

де

$$\varepsilon = \Delta p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} t^2 \left[ \frac{1}{2!} - \frac{\Delta pt}{3!} + \frac{(\Delta pt)^2}{4!} - \dots \right] dt.$$

З останньої рівності випливає оцінка [4]:

$$\begin{aligned}
|\varepsilon| &\leq |\Delta p| \int_0^{\infty} |f(t)| e^{-pt} t^2 \left[ \frac{1}{2!} - \frac{|\Delta p|t}{3!} + \frac{|\Delta p^2|t^2}{4!} - \dots \right] dt < \\
&< |\Delta p| \int_0^{\infty} M e^{\alpha t} e^{-\sigma t} t^2 \left[ 1 + \frac{|\Delta p|t}{1!} + \frac{|\Delta p^2|t^2}{2!} - \dots \right] dt <
\end{aligned} \tag{1.4}$$

або

$$|\varepsilon| < |\Delta p| M \int_0^{+\infty} e^{-(\sigma - \alpha - |\Delta p|)t} t^2 dt.$$

З цієї нерівності отримаємо:

$$|\varepsilon| < \frac{2M}{(\sigma - \alpha - |\Delta p|)^3} |\Delta p|.$$

Отже, при  $\Delta p \rightarrow 0$  маємо

$$|\varepsilon| \rightarrow 0 \quad \text{і} \quad F'(p) = - \int_0^{\infty} e^{-pt} t f(t) dt. \tag{1.5}$$

Останній інтеграл є збіжним. Тут  $|t f(t)| < M e^{(\alpha + \delta)t} e^{-\delta t}$ ,  $\delta > 0$  є малим. Оскільки  $M t e^{-\delta t}$  при  $t > 0$  досягає максимуму, то існує константа  $M_1 > 0$ , для якої  $M t e^{-\delta t} < M_1$ . Тоді  $|t f(t)| < M_1 e^{(\alpha + \delta)t}$ .

Ми показали, що похідна  $F(p)$  існує, отже,  $F(p)$  аналітична у області  $\operatorname{Re} p > \sigma + \delta$ . Зазначимо, що функція  $F(p)$  є визначеною та аналітичною здебільшого на всій площині, окрім ізольованих особливих точок [3].

Покажемо, що коли функція  $F(p)$  є зображенням функції  $f(t)$  з показником зростання  $\alpha$ , то для неї  $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0$ .

Дійсно, у цьому випадку  $|F(p)| = \left| \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \right| < \frac{M}{\sigma - \alpha}$ . Звідси випливає,

що  $\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} F(p) = 0$ . З аналітичності функції  $F(p)$  при  $\operatorname{Re} p > \alpha$  випливає, що  $F(p) \rightarrow 0$  при  $p \rightarrow \infty$  по будь-якому напрямку.

З формули (1.1) випливає, що кожному оригіналу ставиться у відповідність зображення  $F(p)$ , що є аналітичним у півплощині  $\operatorname{Re} p > \alpha$ . Цю відповідність між оригіналом  $f(t)$  і зображенням  $F(p)$  позначають  $f(t) \div F(p)$  або  $f(t) \leftrightarrow F(p)$ . Також використовують позначення  $f(t) \rightarrow F(p)$ .

## 1.2 Властивості інтегрального перетворення Лапласа

Однією з основних властивостей перетворення Лапласа є лінійність [1]. Якщо  $f(t) \div F(p)$ ,  $g(t) \div G(p)$ , то виконується рівність  $Af(t) + Bg(t) \div AF(p) + BG(p)$ , де  $A$  і  $B$  – числа.

Це випливає з лінійних властивостей невласних інтегралів:

$$\int_0^{\infty} (Af(t) + Bg(t))e^{-pt} dt = A \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt + B \int_0^{\infty} g(t)e^{-pt} dt = AF(p) + BG(p).$$

Для перетворення Лапласа виконується також властивість подібності [1]. Якщо  $f(t) \div F(p)$ , то для константи  $\lambda > 0$  виконується співвідношення

$$f(\lambda t) \div \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right).$$

Розглянемо властивість зміщення (затухання). Якщо  $f(t) \div F(p)$ , то  $e^{at} f(t) \div F(p - a)$ , де  $a$  – довільне число:

$$e^{at} f(t) \div \int_0^{\infty} e^{at} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(p-a)t} dt = F(p-a), \quad (1.6)$$

Перетворення Лапласа має властивість запізнення [2]. Вона полягає у наступному. Якщо  $f(t) \div F(p)$ , то  $f(t-\tau) \div e^{-p\tau} F(p)$ , де  $\tau > 0$  – довільна стала:

$$f(t-\tau) \div \int_0^{\infty} f(t-\tau) e^{-pt} dt = \int_{\tau}^{\infty} f(t-\tau) e^{-pt} dt.$$

Це випливає з того, що на проміжку  $(0, \tau)$  підінтегральна функція дорівнює нулю. Виконаємо заміну  $t - \tau = t_1$ , отримаємо

$$\int_{\tau}^{\infty} f(t-\tau) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(t_1) e^{-p(t_1+\tau)} dt_1 = e^{-p\tau} \int_0^{\infty} f(t_1) e^{-pt_1} dt_1.$$

З останньої рівності випливає, що

$$f(t-\tau) \div e^{-p\tau} F(p).$$

Функції  $f(t)$  і  $f(t-\tau)$  у цих рівностях описують один і той же процес, але процес, який описується функцією  $f(t-\tau)$ , починається з запізненням на час  $\tau$ .

Розглянемо властивість випередження [3]. Вона полягає у наступному. Якщо  $f(t) \div F(p)$ , то  $f(t+\tau) \div e^{p\tau} \left( F(p) - \int_0^{\tau} f(t) e^{-pt} dt \right)$ , де  $\tau > 0$  – довільна стала.

$$f(t + \tau) \doteq \int_0^{\infty} f(t + \tau) e^{-pt} dt.$$

Після заміни  $t + \tau = t_1$ , отримуємо

$$\begin{aligned} f(t + \tau) \doteq e^{p\tau} \int_{\tau}^{\infty} f(t_1) e^{-pt_1} dt_1 &= e^{p\tau} \left( \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt - \int_0^{\tau} f(t) e^{-pt} dt \right) = \\ &= e^{p\tau} \left( F(p) - \int_0^{\tau} f(t) e^{-pt} dt \right). \end{aligned}$$

Цю властивість використовують при розв'язанні різницевих рівнянь [2].

Нехай  $f(t, x) \doteq F(p, x)$  і функція  $f$  при кожному фіксованому значенні  $x$  є оригіналом, а функція  $F$  має похідну по  $x$ , тоді виконується співвідношення

$$\frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \doteq \frac{\partial F(p, x)}{\partial x}.$$

При розв'язуванні диференціальних рівнянь широко використовується властивість диференціювання оригіналу [3]. Вона полягає у наступному. Якщо  $f(t) \doteq F(p)$  і при цьому функції  $f'(t), f''(t), \dots, f^{(n)}(t)$  є оригіналами то

$$f'(t) \doteq pF(p) - f(0); \quad (1.7)$$

$$f''(t) \doteq p^2 F(p) - pf(0) - f'(0); \quad (1.8)$$

$$f'''(t) \doteq p^3 F(p) - p^2 f(0) - pf'(0) - f''(0); \quad (1.9)$$

.....

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0). \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned}
 f'(t) \div \int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt &= \left| \begin{array}{l} u = e^{-pt}, \quad du = -pe^{-pt} dt \\ dv = f'(t) dt, \quad v = f(t) \end{array} \right| = \\
 &= f(t) e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = -f(0) + pF(p).
 \end{aligned}$$

Отже,  $f'(t) \div pF(p) - f(0)$ .

Застосувавши цю рівність, знайдемо зображення  $f''(t)$ :

$$f''(t) = (f'(t))' \div p(pF(p) - f(0)) - f'(0) = p^2F(p) - pf(0) - f'(0).$$

Таким же чином можна визначити зображення  $f'''(t)$ . Для цього використаємо (1.7)  $(n-1)$  раз, отримаємо формулу (1.10).

Для нульових початкових умов:

$$\begin{aligned}
 f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0, \\
 f^{(n)}(t) \div p^n F(p).
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

З правила диференціювання оригіналу випливає [1]:

А. Якщо  $f'(t)$  є оригіналом, а  $F(p)$  – аналітична в нескінченності, то

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = f(0). \tag{1.12}$$

Б. Якщо  $f'(t)$  є оригіналом і існує границя функції  $f(t)$  при  $t \rightarrow \infty$ , то

$$\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty). \tag{1.13}$$

Покажемо, що коли  $f(t) \div F(p)$ , то

$$\begin{aligned} F'(p) &\div -tf(t), \\ F''(p) &\div t^2 f(t), \\ &\dots\dots\dots \\ F^{(n)}(p) &\div (-1)^n t^n f(t) \end{aligned}$$

Для функції  $F(p)$ , що є аналітичною у півплощині  $\operatorname{Re} p > \alpha$ , існує її похідна довільного порядку. Отже, диференціюючи інтеграл (1.1) за змінною  $p$ , отримаємо:

$$F'(p) = \int_0^{\infty} (f(t)e^{-pt})'_p dt = \int_0^{\infty} f(t)(-t)e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} (-tf(t))e^{-pt} dt \div -tf(t).$$

Для другої похідної виконується рівність:

$$F''(p) \div -t(-tf(t)) = t^2 f(t), \quad F'''(p) \div -t^3 f(t),$$

для похідної довільного порядку маємо

$$F^{(n)}(p) \div (-1)^n t^n f(t).$$

Для перетворення Лапласа існує властивість інтегрування оригіналу [1].

Вона полягає у тому, що коли  $f(t) \div F(p)$ , то  $\int_0^t f(\tau) d\tau \div \frac{F(p)}{p}$ .



Функція  $\varphi(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$  є оригіналом. Нехай  $\varphi(t) \div \Phi(p)$ . За властивістю диференціювання оригіналу  $\varphi'(t) \div p\Phi(p) - \varphi(0) = p\Phi(p)$ . При цьому, оскільки

$$\varphi'(t) = \left( \int_0^t f(\tau) d\tau \right)'_t = f(t),$$

то виконується рівність  $F(p) = p\Phi(p)$ . Звідси випливає, що  $\Phi(p) = \frac{F(p)}{p}$ .

Важливе значення для розв'язування інтегральних рівнянь типу згортки має перехід від згортки функцій до її зображення [2].

Якщо  $f(t) \div F(p)$ ,  $g(t) \div G(p)$ , то виконується співвідношення  $F(p) \cdot G(p) \div f(t) * g(t)$ , де  $f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau$  – це згортка функцій  $f(t)$  і  $g(t)$ .

Для функції  $f(t) * g(t)$  виконуються ознаки оригіналу. Тоді, використовуючи (1.1), отримаємо рівність:

$$\int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau \div \int_0^\infty \left( \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau \right) e^{-pt} dt = \int_0^\infty e^{-pt} dt \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau.$$

Область  $D$  інтегрування тут визначається умовами  $0 \leq t < \infty$ ,  $0 \leq \tau < t$ .

Після перетворень і заміни  $t_1 = t - \tau$  отримаємо:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-pt} dt \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau &= \int_0^\infty f(\tau) d\tau \int_\tau^\infty e^{-pt} g(t-\tau) dt = \\ &= \int_0^\infty f(\tau) e^{-p\tau} d\tau \int_0^\infty g(t_1) e^{-pt_1} dt_1 = F(p) \cdot G(p). \end{aligned}$$

Відзначимо комутативність згортки:  $f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$  [3].

Якщо  $f(t) * g(t) = F(p)G(p)$ , то виконується формула Дюамеля [3]:

$$pF(p)G(p) \div \int_0^t f'(\tau)g(t-\tau)d\tau + f(0)g(t), \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} pF(p)G(p) &= pF(p)G(p) - f(0)G(p) + f(0)G(p) = \\ &= (pF(p) - f(0)) \cdot G(p) + f(0)G(p). \end{aligned}$$

Розглянуті властивості перетворення Лапласа дозволяють застосувати його для розв'язання диференціальних та інтегральних рівнянь.

### 1.3 Методи відтворення оригіналу за відомим зображенням при перетворенні Лапласа

Розглянемо методи знаходження функції-оригіналу за відомим зображенням при перетворенні Лапласа [4]. У найпростіших випадках зображення можна звести до вигляду, коли його оригінал можна знайти, використовуючи розглянуті вище властивості перетворення Лапласа, а також таблицю оригіналів та зображень. Одним з таких перетворень є розклад дробово-раціональних зображень на елементарні дроби. Для обернення перетворення Лапласа у складніших випадках користуються теоремами розвинення.

Нехай функція  $F(p)$  є аналітичною у околі нескінченно віддаленої точки і при цьому її розвинення у ряд Лорана має вигляд:

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{p^{n+1}} = \frac{C_0}{p} + \frac{C_1}{p^2} + \frac{C_2}{p^3} + \dots$$

Тоді функція

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{t^n}{n!} = C_0 + C_1 t + \dots \quad (1.15)$$

є оригіналом для трансформанти Лапласа  $F(p)$ .

На практиці застосовують також другу теорему розкладу [2]: якщо функція  $F(p)$  однозначна і має скінченне число особливих точок  $p_1, p_2, \dots, p_k$ , що розташовані у скінченній частині площини. Тоді функція:

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \text{res}(e^{p_k t} F(p_k)) \quad (1.16)$$

є оригіналом, який має зображення  $F(p)$ .

З цієї теореми випливають наступні наслідки [2]:

1. Якщо  $F(p) = \frac{Q(p)}{R(p)}$  є правильним раціональним дробом, то

оригіналом для нього є функція:

$$f(t) = \sum_k \frac{1}{(n_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \left( (p - p_k)^{n_k} \frac{Q(p) e^{pt}}{R(p)} \right)^{(n_k - 1)}. \quad (1.17)$$

У (1.17)  $p_k$  є ізольованими особливими точками – полюсами функції  $F(p)$  кратності  $n_k$ .

2. Якщо  $F(p) = \frac{Q(p)}{R(p)}$  і при цьому всі нулі  $p_k$  знаменника є простими,

то оригіналом для зображення  $F(p)$  є функція

$$f(t) = \sum_k \frac{Q(p_k)}{R'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (1.18)$$

3. Якщо зображення має вигляд  $F(p) = \frac{Q(p)}{(p-p_1)(p-p_2)\dots(p-p_k)}$ , де  $p_k$  є простими нулями знаменника, то оригіналом для нього є функція:

$$\begin{aligned} f(t) = & \frac{Q(p_1)}{(p_1-p_2)(p_1-p_3)\dots(p_1-p_k)} e^{p_1 t} + \\ & + \frac{Q(p_2)}{(p_2-p_1)(p_2-p_3)\dots(p_2-p_k)} e^{p_2 t} + \dots + \\ & + \frac{Q(p_k)}{(p_k-p_1)(p_k-p_2)\dots(p_k-p_{k-1})} e^{p_k t}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Якщо  $f(t)$  є оригіналом і  $F(p)$  – його зображення, то у кожній точці неперервності функції  $f(t)$  виконується рівність [3]:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(p) e^{pt} dp. \quad (1.20)$$

Тут інтегрування здійснюється по довільній прямій  $\operatorname{Re} p = \gamma$ ,  $\gamma > \alpha$  – показник зростання функції  $f(t)$ , а і під інтегралом розуміють його головне значення [3].

Для абсолютно інтегровної і кусково-гладкої на проміжку функції  $f(t)$  виконується рівність [4]:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ist} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-isu} f(u) du \right) ds. \quad (1.21)$$

Для функції  $\varphi(t) = e^{\sigma t} f(t)$ ,  $\sigma > \alpha$ , виконується рівність

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ist} \Phi(s) ds,$$

де

$$\Phi(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ist} \varphi(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{ist} \varphi(t) dt, \quad \varphi(t) = 0, \quad t < 0.$$

Звідси отримуємо:

$$\int_0^{\infty} e^{ist} \varphi(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-ist} e^{-\sigma t} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(\sigma+is)t} f(t) dt.$$

Нехай  $p = \gamma + is$  і  $F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$ . Оскільки  $\Phi(s) = F(p)$ , то

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ist} F(\gamma + is) ds$$

і тому

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\gamma+is)t} F(\sigma + is) ds.$$

З останньої рівності випливає, що

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{pt} F(p) dp.$$

Безпосереднє застосування формули обернення (1.20) пов'язане зі значними труднощами, тому для знаходження оригіналу за його зображенням звичайно застосовують розглянуті раніше теореми розкладу. Вони впливають з цієї рівності, оскільки

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(p) e^{pt} dp = \sum_k \operatorname{res}(F(p_k) e^{p_k t}).$$

Нехай функція  $F(p)$  є зображенням оригіналів  $f_1(t)$  та  $f_2(t)$ , тоді ці оригінали збігаються у всіх точках, де вони диференційовані [4].

Розглянемо критерій, за якими можна було б визначити, чи є дана функція, аналітична у півплощині  $\operatorname{Re} z > \gamma$ , перетворенням Лапласа [4].

Для цього застосовують наступну теорему: функція комплексної змінної, що є аналітичною у околі нескінченно віддаленої точки та дорівнює в ній нулю, є зображенням деякої функції-оригіналу.

#### **1.4 Розв'язання інтегральних рівнянь типу згортки операційним методом**

Інтегральним рівнянням називають рівняння, що містить невідому функцію під знаком інтеграла [1].

Далі розглянемо розв'язання інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду операційним методом. До розв'язання таких рівнянь часто зводяться задачі лінійної в'язкопружності механіки композитів [5–9].

Інтегральне рівняння Вольтерра другого роду має вигляд:

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x-t)\varphi(t)dt.$$

У цьому рівнянні типу згортки ядро  $K(x,t)$  залежить від різниці аргументів  $x-t$ , тут  $f(x)$ ,  $K(x-t)$  – задані функції,  $\varphi(x)$  – невідома функція.

Розглянемо інтегральне рівняння Вольтерра другого роду типу згортки

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x-t)\varphi(t)dt. \quad (1.22)$$

Тут функції  $f(x)$ ,  $K(x)$ ,  $\varphi(x)$  такі, що для них існує перетворення Лапласа. Нехай функції  $f(x)$ ,  $K(x)$  задовольняють вимоги функції-оригіналу, зокрема, вони мають скінченний порядок зростання. Тоді функція  $\varphi(x)$  при додатних значеннях аргументу також має скінченний порядок зростання

$$\text{Нехай } \varphi(x) \leftrightarrow \Phi(p), f(x) \leftrightarrow F(p), K(x) \leftrightarrow L(p).$$

Оскільки інтеграл у (1.22) є згорткою оригіналів  $K(x)$  та  $\varphi(x)$ , то, використовуючи теорему про зображення згортки (теорему Бореля) [4], отримуємо:

$$K(x) \cdot \varphi(x) \leftrightarrow L(p) \cdot \Phi(p).$$

Таким чином, зображенням інтегрального рівняння (1.22) при перетворенні Лапласа є рівняння у зображеннях:

$$\Phi(p) = F(p) + L(p) \cdot \Phi(p).$$

З цього рівняння знаходимо зображення розв'язку рівняння (1.22):

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{1 - L(p)} \quad \text{та} \quad L(p) = 1. \quad (1.23)$$

За цим зображенням відтворюємо оригінал, що є розв'язком вихідного рівняння (1.22).

Операційний метод можна застосувати також до розв'язання інтегрального рівняння Вольтерра першого роду, ядро  $K(x, t)$  якого залежить від різниці аргументів  $x - t$  [2]. Це рівняння має вигляд:

$$f(x) = \int_0^x K(x-t)\varphi(t)dt. \quad (1.24)$$

Нехай при перетворенні Лапласа маємо відповідності  $\varphi(x) \leftrightarrow \Phi(p)$ ,  $f(x) \leftrightarrow F(p)$ ,  $K(x) \leftrightarrow L(p)$ .

Оскільки інтеграл у правій частині цього рівняння є згорткою оригіналів  $K(x)$ ,  $\varphi(x)$ , то, застосувавши теорему про зображення згортки, отримаємо:

$$K(x) \cdot \varphi(x) \leftrightarrow L(p) \cdot \Phi(p).$$

Таким чином, зображенням інтегрального рівняння (1.24) є алгебраїчне рівняння відносно зображення:

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{L(p)}, \quad L(p) \neq 0.$$

Знайшовши оригінал для зображення  $\Phi(p)$ , отримаємо розв'язок рівняння (1.24).



## 2 ОСНОВНІ ПІДХОДИ ДО МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ В'ЯЗКОПРУЖНИХ КОМПОЗИТИВ

### 2.1 Основні поняття теорії композитів

Під композиційними матеріалами або композитами розуміють матеріали, що мають наступні ознаки: вони не зустрічаються у природі; складаються з кількох компонентів, що відрізняються за хімічним складом і при цьому розділені певною межею; мають нові властивості порівняно з властивостями їх елементів, що входять до їх складу; є неоднорідними у мікромасштабі та однорідними у макромасштабі; склад, форма та розподіл їх компонентів визначені заздалегідь; властивості композитів визначаються властивостями їх компонентів [5].

Структурний елемент композиту, неперервний у всьому його об'ємі, називають матрицею; компонент, що є роз'єднаним у структурі матеріалу – волокном, армуючим елементом або включенням. Для включень у вигляді волокон розмір у одному напрямі суттєво перевищує розміри у інших напрямках. Структурні елементи у вигляді волокон є прямолінійними, неперервними, а також розташованими у одному напрямі [5].

При розрахунку конструктивних елементів, виготовлених з композиційних матеріалів, композит подається у вигляді однорідного середовища. Його фізико-механічні властивості називають ефективними властивостями або характеристиками, а технічні сталі, що характеризують ці властивості (модулі пружності та зсуву, а також коефіцієнти Пуассона) – його ефективними сталими. Ефективні характеристики композиту залежать від властивостей його компонентів, геометричної структури, а також типу зв'язку між його компонентами.

Для композитів характерною є велика кількість структурних елементів, розміри яких є малими у порівнянні з відповідними розмірами всього тіла.

Тому композити є структурно неоднорідними матеріалами. Розміри окремих структурних елементів композиту суттєво перевищують молекулярні розміри. Це створює можливості для математичного моделювання композитів з використанням апарату механіки суцільного середовища [6].

Розрізняють три основні підходи до розв'язання задач механіки композитів [5]. Перший підхід ґрунтується на застосуванні спрощених моделей геометричних характеристик та взаємодії окремих компонентів композиту. Це дозволяє знаходити наближені значення переміщень, напружень та деформацій для них, а також досліджувати властивості композиту у цілому. Такий підхід широко застосовується у прикладних розрахунках конструкційних елементів, виготовлених з композиційних матеріалів. У межах другого підходу повністю враховуються основні особливості композиційного матеріалу, що дає змогу застосовувати апарат механіки деформованого твердого тіла. Тут припускається, що структура композиту є регулярною. Це надає можливість застосування математичного апарату, розробленого для знаходження періодичних розв'язків диференціальних та інтегральних рівнянь. Такий підхід є характерним для моделювання односпрямованих волокнистих композитів, що мають регулярну структуру. Третій підхід ґрунтується на застосуванні стохастичних методів, зокрема, використанні апарату теорії ймовірностей, математичної статистики та випадкових процесів. При цьому розподіл компонентів композиту вважається стохастичним. У даній магістерській роботі застосовується другий підхід.

## **2.2 Основні математичні моделі в'язкопружних матеріалів**

Деякі матеріали, знаходячись під дією сталого напруження, можуть поступово деформуватися на протязі певного часу, тобто при сталих

напруженнях їх деформації можуть бути функціями часу. Цю їх властивість називають в'язкопружністю або повзучістю [5].

Розглянемо основні механіко-математичні моделі в'язкопружного середовища. Розрізняють механічні моделі тіл та їх узагальнення – спадкові теорії. Останні найчастіше використовуються в розрахунках елементів конструкцій, виготовлених з полімерів та бетонів, а також у процесі моделювання в'язкопружності ґрунту та гірських порід.

Розглянемо спочатку два основних елементи механічних моделей тіл: пружний і в'язкий. Пружний елемент подається у вигляді пружини. Її розтяг  $\delta_y$  є пропорційним прикладеній силі  $P$

$$\delta_y = k_1 P, \quad (2.1)$$

де  $k_1$  – коефіцієнт пропорційності [5].

В'язкий елемент моделюється циліндром, заповненим рідиною, усередині якого переміщається поршень так, що рідина витікає через щілину між циліндром та поршнем. Швидкість переміщення  $\delta_e$  поршня щодо циліндра пропорційна прикладеній силі  $P$ :

$$\frac{\partial \delta_e}{\partial t} = k_2 P, \quad (2.2)$$

де  $k_2$  – коефіцієнт пропорційності.

Якщо з'єднати пружний і в'язкий елементи послідовно, то зміна відстані між точками прикладення сил  $P$  дорівнюватиме сумі подовження пружини  $\delta_y$  і переміщення поршня щодо циліндра  $\delta_e$ :

$$\delta = \delta_y + \delta_e.$$

Диференціюючи це співвідношення за часом і використовуючи вирази (2.1) та (2.2), маємо:

$$\frac{d\delta}{dt} = k_1 \frac{dP}{dt} + k_2 P.$$

Переходячи від переміщення  $\delta$  і сили  $P$  до деформації  $\varepsilon$  і напруження  $\sigma$  й замінюючи коефіцієнти  $k_1$  і  $k_2$  на  $\frac{1}{E}$  і  $\frac{1}{\eta}$  відповідно, де  $E$  – модуль пружності,  $\eta$  – коефіцієнт в'язкості, отримуємо

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta} \quad (2.3).$$

Рівняння (2.3) описує так зване в'язкопружне тіло Максвелла [5].

Розглянемо деякі властивості цього тіла. Як випливає з рівняння (2.3), при сталому у часі напруженні деформація зростає зі сталою швидкістю, пропорційною напруженню, тобто матеріал поводить себе як в'язка рідина, що не підтверджується експериментальними дослідженнями конструкційних матеріалів.

При сталій деформації з рівняння (2.3) випливає, що

$$\frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta} = 0.$$

Інтегруючи це рівняння і використовуючи початкову умову при  $t = 0$  та  $\sigma = \sigma(0)$ , отримаємо

$$\sigma = \sigma(0) \exp\left(-\frac{t}{t_0}\right),$$

де величина

$$t_0 = \frac{\eta}{\sigma} \quad (2.4)$$

являє собою час, за який початкове напруження  $\sigma(0)$  зменшується в  $e$  разів. Цю величину називають часом релаксації. Згідно з отриманою залежністю напруження зменшується в часі за експоненціальним законом, прагнучі до нуля.

З'єднаємо тепер пружний і в'язкий елементи паралельно [6]. Тоді очевидно, що сила  $P$  дорівнює сумі сил  $P_1$  та  $P_2$ , що діють на пружний і в'язкий елементи [5]:

$$P = P_1 + P_2 .$$

Використовуючи вирази (2.1) і (2.2), отримуємо

$$P = \frac{\delta}{k_1} + \frac{1}{k_2} \frac{d\delta}{dt} .$$

Переходячи від сили  $P$  і переміщення  $\delta$  до напруження  $\sigma$  й деформації  $\varepsilon$  і замінюючи так само, як і раніше, коефіцієнти  $k_1$  і  $k_2$  на  $\frac{1}{E}$  і  $\frac{1}{\eta}$  відповідно, отримуємо

$$\sigma = E_\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt} . \quad (2.5)$$

Це рівняння описує так зване в'язкопружне тіло Фойгта [5].

Інтегруючи рівняння (2.5) при сталому напруженні і враховуючи, що в початковий момент часу деформація дорівнює нулю, отримуємо

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{E}{\eta} t\right) \right]. \quad (2.6)$$

З рівняння (2.6) робимо висновок, що деформація зростає по експотенціальному закону, прагнучі до величини  $\frac{\sigma}{E}$ .

Як впливає з рівняння (2.5), при сталій деформації напруження теж є сталим, тобто це рівняння не відображає релаксації напружень, що є його недоліком.

Як впливає з викладеного, моделі Максвелла і Фойгта тільки якісно відображають деякі сторони складних процесів деформування матеріалів в часі [5].

Розглянемо більш складну модель, що складається з пружного елемента, послідовно з'єданого з двома паралельно з'єднаними пружним елементом і в'язким елементом.

У цьому випадку зміна відстані між точками докладання сил  $P$  буде дорівнювати сумі подовження пружини –  $\delta_1$  і подовження пружини –  $\delta_2$ , який дорівнює переміщенню поршня відносно циліндра у в'язкому елементі

$$\delta = \delta_1 + \delta_2.$$

Диференціюючи це співвідношення за часом, отримуємо

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{d\delta_1}{dt} + \frac{d\delta_2}{dt}. \quad (2.7)$$

Залежність між переміщеннями  $\delta_1$  і  $\delta_2$  і силами, діючими на модель, –  $P$ , на пружину –  $P_y$  і поршень –  $P_\epsilon$

$$\delta_1 = k_1 P; \quad \delta_2 = k_2 P_y; \quad \frac{d\delta_2}{dt} = k_3 P_\epsilon, \quad (2.8)$$

причому

$$P = P_y + P_\epsilon. \quad (2.9)$$

Підставимо співвідношення (2.8) в вираз (2.7), використовуючи при цьому рівність (2.9). тоді отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{dt} &= k_1 \frac{dP}{dt} + k_3 P_\epsilon = k_1 \frac{dP}{dt} + k_3 (P - P_y) = k_1 \frac{dP}{dt} + k_3 P - \frac{k_3}{k_2} \delta_2 = \\ &= k_1 \frac{dP}{dt} + k_3 P - \frac{k_3}{k_2} (\delta - \delta_1) = k_1 \frac{dP}{dt} + k_3 P - \frac{k_3}{k_2} \delta + \frac{k_3 k_1}{k_2} P, \end{aligned}$$

звідки

$$\frac{dP}{dt} + \frac{k_3(k_1 + k_2)}{k_1 k_2} P = \frac{1}{k_1} \frac{d\delta}{dt} + \frac{k_3}{k_1 k_2} \delta.$$

Переходячи від переміщення  $\delta$  і сили  $P$  до деформації  $\varepsilon$  і напруження  $\sigma$  й заміняючи коефіцієнти  $k_1$  і  $k_2$  відповідно на  $\frac{1}{E_1}$  і  $\frac{1}{E_2}$ , а  $k_3$  на  $\frac{1}{\eta}$ , отримуємо

$$\frac{d\sigma}{dt} + \alpha\sigma = E \left( \frac{d\varepsilon}{dt} + \beta\varepsilon \right), \quad (2.10)$$

де

$$\alpha = \frac{E_1 + E_2}{\eta}; \quad \beta = \frac{E_2}{\eta}; \quad E = E_1. \quad (2.11)$$

Рівняння (2.10) описує в'язкопружне тіло Кельвіна [5].

В окремому випадку дуже швидкого прикладання навантаження, коли похідні за часом від напружень і деформацій досить великі і другими доданками в правій і лівій частинах рівності (2.10) в порівнянні з першими можна знехтувати, отримуємо

$$\frac{d\sigma}{dt} = E \frac{d\varepsilon}{dt}$$

і, отже,

$$\sigma = E\varepsilon.$$

Величину  $\frac{E\beta}{\alpha}$  називають тривалим модулем пружності.

Зі співвідношень (2.11) робимо висновок, що  $\frac{\beta}{\alpha} < 1$  і тому тривалий модуль пружності менше миттєвого.

Спочатку розв'яжемо рівняння (2.10) відносно деформації. При цьому припустимо, що в початковий момент часу  $t=0$  деформації є пружними, а модуль пружності дорівнює миттєвому модулю  $E$ . Тоді після перетворень отримаємо

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \left\{ \sigma + (\alpha - \beta) \int_0^t \sigma(\xi) \exp[-\beta(t - \xi)] d\xi \right\}. \quad (2.12)$$



У разі сталого напруження  $\sigma = const$  отримуємо рівняння кривої повзучості

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \left\{ 1 + \frac{\alpha - \beta}{\beta} [1 - \exp(-\beta t)] \right\}. \quad (2.13)$$

З цієї формули випливає, що ордината асимптоти кривої повзучості в обраному масштабі дорівнює деформації, розрахованої за напруженням  $\sigma$  за допомогою тривалого модуля пружності  $\frac{\alpha \sigma}{\beta E}$ .

Якщо процес повзучості при сталому напруженні  $\sigma$  відбувається протягом часу  $t_1$ , а потім напруження миттєво зменшується до нуля, то деформація миттєво зменшиться на величину пружної деформації  $\frac{\sigma}{E}$ , а наступний процес зміни деформації (зворотна повзучість або зворотна післядія) буде визначатися формулою:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{(\alpha - \beta)}{E} \int_0^{t_1} \sigma \exp[-\beta(t - \xi)] d\xi = \\ &= \frac{(\alpha - \beta)}{\beta} \frac{\sigma}{E} \{ \exp[-\beta(t - t_1)] - \exp(-\beta t) \}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

З отриманого рівняння випливає, що при необмеженому збільшенні часу деформація  $\varepsilon$  прагне до нуля, тобто вся деформація повзучості є оборотною і післядія в тілі Кельвіна пружна.

Розв'яжемо тепер рівняння (2.10) відносно  $\sigma$ . Припустимо, що в початковий момент часу деформації є пружними, а модуль пружності дорівнює миттєвому модулю. Після перетворень отримаємо

$$\sigma = E \left\{ \varepsilon - (\alpha - \beta) \int_0^t \varepsilon(\xi) \exp[-\alpha(t - \xi)] d\xi \right\}. \quad (2.15)$$

У разі сталої деформації  $\varepsilon = const$  (процес релаксації) з цього рівняння одержуємо рівняння кривої релаксації

$$\sigma = E\varepsilon \left\{ 1 - \frac{\alpha - \beta}{\alpha} [1 - \exp(-\alpha t)] \right\}. \quad (2.16)$$

Як впливає з викладеного, модель тіла Кельвіна на відміну від моделей тіл Максвелла і Фойгта відображає обидві сторони явища в'язкопружності – власне повзучість або післядію і релаксацію напружень, а також явище зворотної повзучості. Проте експериментальні дослідження повзучості більшості матеріалів не узгоджуються кількісно з результатами, отриманими на основі моделі тіла Кельвіна.

Існують математичні моделі в'язкопружного середовища, що складаються з великої кількості елементів. Проте використання таких моделей ускладнює необхідний математичний апарат, при цьому вони неадекватно відображають динаміку явища.

Багатоелементні моделі у більшості випадків подаються рівняннями виду:

$$a_0 \sigma + a_1 \frac{d\sigma}{dt} + \dots + a_n \frac{d^n \sigma}{dt^n} = b_0 \varepsilon + b_1 \frac{d\varepsilon}{dt} + \dots + b_n \frac{d^n \varepsilon}{dt^n}. \quad (2.17)$$

Розглянемо лінійну теорію, що ґрунтується на застосуванні принципу суперпозиції деформацій – лінійну теорію спадковості Больцмана–Вольтерра [5].

Нехай у момент часу  $\xi$  протягом малого проміжку  $d\xi$  напруження в розтягнутому стержні дорівнює  $\sigma(\xi)$ . Це напруження викликало деяку

деформацію, яка згодом змінюється в часі. Покладемо, що в момент часу  $t > \xi$  ця деформація пропорційна напруженню  $\sigma(\xi)$ , тривалості впливу  $d\xi$  і деякій спадній функції відрізка часу  $t - \xi$ , яку позначимо  $H(t - \xi)$ ; при цьому деформація є обернено пропорційною модулю пружності  $E$ . Функція  $H(t - \xi)$  повинна бути спадною функцією часу  $t$ , оскільки з плином часу матеріал «забуває» про вплив напруження  $\sigma$ . Залежність функції  $H$  від різниці двох аргументів  $t - \xi$  свідчить про те, що ця функція не змінюється при зміні початку відліку часу, тобто вона є інваріантною відносно початку відліку часу.

Для опису деформування старіючих матеріалів, механічні властивості яких змінюються в часі, як наприклад, бетонів, функція  $H$  повинна бути функцією аргументів  $t$  і  $\xi$  окремо.

Згідно з принципом суперпозиції величина деформації в момент часу  $t$ , що виникла за рахунок напружень, що діяли до моменту часу  $t$ , дорівнює [5]

$$\frac{1}{E} \int_0^t H(t - \xi) \sigma(\xi) d\xi.$$

Напруження в момент часу  $t$  викликає пружну деформацію  $\frac{\sigma}{E}$ . Отже, повна деформація в момент часу  $t$  складається з цієї деформації і деформації, що виникла за рахунок напружень, що діяли до моменту часу  $t$ ,

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \left[ \sigma + \int_0^t H(t - \xi) \sigma(\xi) d\xi \right]. \quad (2.18)$$

Рівняння (2.18) дозволяє за даним законом зміни напружень в часі визначити закон зміни деформації і, зокрема, описати явище повзучості (післядії) при сталому напруженні. У цьому випадку  $\sigma = \sigma(0) = \text{const}$  і з рівняння (2.18) отримуємо

$$\varepsilon = \frac{\sigma(0)}{E} \left[ 1 + \int_0^t H(t-\xi) d\xi \right]. \quad (2.19)$$

За допомогою останнього рівняння може бути побудована крива повзучості при сталому напруженні, якщо відоме ядро  $H(t)$  інтегрального рівняння (2.18). Останнє можна знайти з відомої кривої повзучості [5]. Для цього продиференціюємо вираз (2.19). Тоді отримаємо

$$\zeta = \frac{\sigma(0)}{E} \frac{d}{dt} \int_0^t H(\chi) d\chi = \frac{\sigma(0)}{E} H(t), \quad (2.20)$$

де  $\chi = t - \xi$ .

Отже,

$$H(t) = \frac{E\zeta}{\sigma(0)}.$$

Таким чином, ядро інтегрального рівняння (2.18) визначається законом зміни швидкості деформації у часі.

Найпростішим ядром інтегрального рівняння (2.18) є спадна показникова функція

$$f(t) = e^{-at}. \quad (2.21)$$

Підставляючи її в вираз (2.18), отримаємо

$$E\varepsilon = \sigma + \int_0^t C e^{-a(t-\xi)} \sigma(\xi) d\xi. \quad (2.22)$$

Диференціюючи це рівняння за  $t$ , маємо:

$$E \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} + C\sigma - a \int_0^t C e^{-a(t-\xi)} \sigma(\xi) d\xi. \quad (2.23)$$

Виключаючи з рівнянь (2.22) і (2.23) інтеграл, встановлюємо [5]:

$$\frac{d\sigma}{dt} + (C + a)\sigma = E \left( \frac{d\varepsilon}{dt} + a\varepsilon \right).$$

Порівнявши отриманий результат з рівнянням (2.10), бачимо, що вони збігаються, причому  $\alpha = C + a$ ,  $\beta = a$ .

Таким чином, вибір ядра у вигляді функції (2.21) рівносильний використанню моделі в'язкопружного тіла Кельвіна [5].

Якщо  $a = 0$  і ядро обираємо у вигляді сталої величини, отримуємо тіло Максвелла (рівняння (2.3)).

Ядро інтегрального рівняння (2.18) можна вибрати у вигляді суми спадних показникових функцій

$$H(t - \xi) = \sum_{i=1}^n C_i e^{-a_i(t-\xi)}. \quad (2.24)$$

Можна показати, що в такому випадку інтегральне рівняння (2.18) еквівалентне лінійному диференціальному рівнянню  $n$ -го порядку (2.17).

Больцманом було запропоновано ядро інтегрального рівняння у вигляді [5]:

$$H(t - \xi) = \frac{C}{t - \xi}. \quad (2.25)$$

Ядро Больцмана (2.25) має сильну особливість в тому сенсі, що в початковий момент часу швидкість деформації нескінченно велика і інтеграл від нього є розбіжним. Цей недолік може бути усунений вибором ядра у вигляді, запропонованому Дюффіном:

$$H(t - \xi) = \frac{C}{(t - \xi)^a}, \quad (2.26)$$

де  $0 < a < 1$ .

В такому випадку з виразу (2.18) отримуємо рівняння кривої повзучості при сталому напруженні:

$$\varepsilon = \frac{\sigma(0)}{E} \left( 1 + \frac{C}{1-a} t^{1-a} \right).$$

У дослідженні [5] наведені інші типи ядер, зокрема, ядро Работнова

$$H(t - \xi) = \frac{(t - \xi)^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)}, \quad (2.27)$$

де  $\Gamma(1 + \alpha)$  – гамма-функція.

З формули (2.19) випливає, що границя деформації при прагненні часу до нескінченності має вигляд:

$$\varepsilon(\infty) = \frac{\sigma(0)}{E} \left[ 1 + \int_0^\infty H(\chi) d\chi \right].$$

Таким чином, величина

$$\frac{E}{1 + \int_0^{\infty} H(\chi) d\chi}$$

може бути названа тривалим модулем пружності [5].

Розглянемо явище зворотної повзучості [5]. Припустимо, що після повзучості стержня при сталому напруженні  $\sigma(0)$  протягом часу  $t_1$  стержень розвантажується. Миттєве зменшення деформації при розвантаженні за законом розвантаження (законом Гука) дорівнює  $\frac{\sigma(0)}{E}$ . Подальше зменшення деформації встановлюємо згідно з формулою (2.19)

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\sigma(0)}{E} \int_0^{t_1} H(t - \xi) d\xi = -\frac{\sigma(0)}{E} \int_t^{t-t_1} H(\chi) d\chi = \\ &= \frac{\sigma(0)}{E} \int_{t-t_1}^t H(\chi) d\chi = \frac{\sigma(0)}{E} \left[ \int_0^t H(\chi) d\chi - \int_0^{t-t_1} H(\chi) d\chi \right]. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Різниця інтегралів в квадратних дужках, очевидно, зменшується зі збільшенням часу  $t$  і прагне до нуля при прагненні часу  $t$  до нескінченності. Таким чином, як і у випадку тіла Кельвіна, післядія є пружною.

Рівняння (2.18) відносно функції  $\sigma$  є лінійним інтегральним рівнянням Вольтерра другого роду [5]. Функція  $H(t - \xi)$  є ядром цього рівняння ( $\xi$  – змінна інтегрування, змінюється від 0 до  $t$ ).

При моделюванні в'язкопружності бетону використовується співвідношення [5]

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} - \int_{\xi_1}^t \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{1}{E(\xi)} + C(t, \xi) \right] d\xi, \quad (2.29)$$

де  $\xi_1$  – вік матеріалу,  $C(t, \xi)$  – міра повзучості.

Співвідношення (2.29) є лінійним інтегральним рівнянням Вольтерра для функції  $\sigma(\xi)$  з ядром

$$K(t, \xi) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{1}{E(\xi)} + C(t, \xi) \right].$$

Для знаходження характеристик інтегрального оператора, що описує в'язкопружні властивості матеріалу, використовують операційний метод, що дає змогу розв'язувати інтегральні рівняння типу згортки.

Застосуємо перетворення Лапласа до рівняння (2.18). Тоді отримаємо

$$\varepsilon^* = \frac{1}{E} (\sigma^* + \Phi^*), \quad (2.32)$$

де  $\Phi^* = \Phi^*(\lambda)$  – зображення функції

$$\Phi(t) = \int_0^t H(t - \xi) \sigma(\xi) d\xi.$$

У розділі 1 показано, що

$$\Phi^* = H^* \sigma^*. \quad (2.33)$$

Підставляючи це співвідношення в формулу (2.32), отримаємо

$$\varepsilon^* = \frac{\sigma^*}{E} (1 + H^*).$$



Звідки

$$\sigma^* = \frac{E\varepsilon^*}{1+H^*}. \quad (2.34)$$

Покладемо

$$\frac{1}{1+H^*} = 1-R^*$$

та, отже,

$$R^* = \frac{H^*}{1+H^*}. \quad (2.35)$$

З врахуванням цих співвідношень вираз (2.34) набуває вигляду

$$\sigma^* = E(\sigma^* - \Psi^*), \quad (2.36)$$

де

$$\Psi^* = R^* \varepsilon^*. \quad (2.37)$$

Отримали зображення згортки

$$\Psi = \int_0^t R(t-\xi)\varepsilon(\xi)d\xi$$

функцій  $R(t)$  та  $\varepsilon(t)$  [5].

З формул (2.33), (2.35), (2.35) та (2.37) випливає, що

$$\Phi^* = E\Psi^*. \quad (2.38)$$

Переходячи у виразі (2.36) від зображень до оригіналів, отримуємо

$$\sigma = E \left[ \varepsilon - \int_0^t R(t-\xi) \varepsilon(\xi) d\xi \right], \quad (2.39)$$

де функція різниці двох змінних  $R(t-\xi)$  є резольвентою інтегрального рівняння (2.18).

Отримане рівняння (2.39) дозволяє за заданим законом зміни деформацій визначати закон зміни напружень, у тому числі побудувати модель релаксації за умов сталої деформації. Тут  $\varepsilon(t) = \varepsilon(0) = const$ , тому з рівняння (2.39) знаходимо:

$$\sigma = E\varepsilon \left[ 1 - \int_0^t R(t-\xi) d\xi \right]. \quad (2.40)$$

Це рівняння надає можливість побудови кривої релаксації напружень за умов сталої деформації, коли відома резольвента інтегрального рівняння (2.18). Цю резольвенту можна визначити за зображенням  $R^*$ , використовуючи співвідношення (2.31).

## 3 РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ГОМОГЕНІЗАЦІЇ В'ЯЗКОПРУЖНОГО КОМПОЗИТУ НА ОСНОВІ ЗАСТОСУВАННЯ ЕНЕРГЕТИЧНОГО ПІДХОДУ

### 3.1 Сутність задачі гомогенізації та методика її розв'язання

Задача гомогенізації композитного матеріалу полягає у визначенні його характеристик за відомими характеристиками складових елементів [5–8].

У даній магістерській роботі досліджується волокнистий в'язкопружний трансверсально-ізотропний композит. Він складається з в'язкопружної матриці та пружного волокна, причому обидві ці складові мають трансверсально-ізотропні (транстропні) властивості.

Для дослідження композиту виділимо елементарну комірку, до складу якої входять два коаксіальні циліндри. Моделлю матриці є порожній циліндр  $a \leq r \leq b$ , для моделювання волокна застосуємо суцільний циліндр  $0 \leq r \leq a$ . Для матриці будемо використовувати символ  $*$ , для волокна –  $^{\circ}$ .

Далі використаємо циліндричну систему координат  $(r, \theta, z)$ . Для описання механічних характеристик трансверсально-ізотропного матеріалу потрібно знати п'ять технічних сталих. Серед них поздовжній модуль пружності першого роду  $\bar{E}_1$ , а також модуль зсуву  $\bar{G}_{12}$  виражаються з допомогою інтегралів і є функціями часу:

$$\bar{E}_1[\varepsilon(t)] = E_1 \left( \varepsilon(t) - \int_0^t R_E(t-\tau) \varepsilon(\tau) d\tau \right),$$

$$\bar{G}_{12}[\varepsilon(t)] = G_{12} \left( \varepsilon(t) - \int_0^t R_G(t-\tau) \varepsilon(\tau) d\tau \right).$$

Решта характеристик (коефіцієнти Пуассона  $\nu_{12}$ ,  $\nu_{21}$ ,  $\nu_{23}$ ) вважаються сталими. Далі у позначеннях, які будемо використовувати, індекс 1 відповідає осі  $z$ , направленій паралельно осі волокна, індекс 2 – координаті  $r$ , індекс 3 –  $\theta$ . Константи  $E_1$  та  $G_{12}$ , що присутні у поздовжньому модулі пружності першого роду та модулі зсуву, називають миттєвими модулями пружності та зсуву. Вони дорівнюють значенням цих функцій у початковий момент часу  $t = 0$ . Для знаходження цих сталих, а також коефіцієнтів Пуассона, потрібно розв'язати задачу гомогенізації пружного композиту. Для повного визначення вказаних інтегральних характеристик потрібно знайти невідомі функції часу – ядра релаксації  $R_E(t)$  та  $R_G(t)$ . У даному магістерському дослідженні визначаються ці характеристики.

Розв'язання вказаної задачі ґрунтується на використанні операційного методу, тобто застосуванні перетворення Лапласа. Такий підхід дозволяє перейти від задачі розв'язання системи інтегральних рівнянь до задачі знаходження розв'язків системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Підхід до гомогенізації в'язкопружного композиту, що використовується у магістерській роботі, заснований на застосуванні енергетичного критерію узгодження до гомогенізації пружного композиту та подальшому використанні отриманих результатів до в'язкопружного випадку.

Його сутність у тому, що механічні характеристики пружного композитного матеріалу знаходять з умови рівності енергії пружного деформування системи «матриця-волокно», та аналогічної енергії деформування елементарної комірки однорідного матеріалу. Для знаходження розв'язку відповідної в'язкопружної задачі використаємо отриманий пружний розв'язок задачі та перейдемо до простору лапласових зображень.

### 3.2 Гомогенізація в'язкопружного композитного матеріалу при деформації поздовжнього зсуву

Використаємо енергетичний критерій узгодження для розв'язання задачі про гомогенізацію в'язкопружного трансропного композиту в умовах чистого поздовжнього зсуву [7]. Для цього знайдемо розв'язок задачі про сумісний чистий поздовжній зсув ідеально пружних матриці та волокна. Відповідний деформований стан отримаємо, приклавши до зовнішньої циліндричної поверхні елементарної комірки навантаження, що створює на ній дотичне напруження

$$\tau_{zr}(b, \theta) = \sigma_0 \cos \theta.$$

Тут  $\sigma_0$  – стала величина.

При цьому переміщення і напруження на межі контакту матриці та волокна  $r = a$  мають вигляд [6]:

$$\sigma_{zr}^{\circ}(t, \theta) = \sigma_{zr}^*(t, a, \theta), \quad u_z^{\circ}(t, a, \theta) = u_z^*(t, a, \theta).$$

Розв'язками цієї задачі є переміщення та напруження [6]:

$$u_z^*(r, \theta) = \frac{\sigma_0}{G_{12}^* (G_{12}^* (f-1) - G_{12}^{\circ} (f+1))} \times \left( -(G_{12}^* + G_{12}^{\circ})r + \frac{a^2 (G_{12}^{\circ} - G_{12}^*)}{r} \right) \cos \theta,$$

$$\gamma_{\theta z}^*(r, \theta) = \frac{\sigma_0}{G_{12}^* (G_{12}^* (f-1) - G_{12}^{\circ} (f+1))} \times \left( G_{12}^* + G_{12}^{\circ} - \frac{a^2 (G_{12}^{\circ} - G_{12}^*)}{r^2} \right) \sin \theta,$$

$$\gamma_{zr}^*(r, \theta) = -\frac{\sigma_0}{G_{12}^* (\tilde{G}_{12}^* (f-1) - G_{12}^{\circ} (f+1))} \times \left( G_{12}^* + G_{12}^{\circ} + \frac{a^2 (G_{12}^{\circ} - G_{12}^*)}{r^2} \right) \cos \theta,$$

$$\tau_{zr}^*(r, \theta) = -\frac{\sigma_0}{G_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1)} \times \left( G_{12}^* + G_{12}^\circ + \frac{a^2(G_{12}^\circ - G_{12}^*)}{r^2} \right) \cos \theta,$$

$$\tau_{z\theta}^*(r, \theta) = \frac{\sigma_0}{G_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1)} \times \left( G_{12}^* + G_{12}^\circ - \frac{a^2(G_{12}^\circ - G_{12}^*)}{r^2} \right) \sin \theta.$$

У цих співвідношеннях  $f = \frac{a^2}{b^2}$  – частка волокна у матеріалі композиту.

Вирази для зображень переміщень, деформацій та напружень точок волокна мають вигляд [6]:

$$u_z^\circ(r, \theta) = \frac{-2\sigma_0 r \cos \theta}{G_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1)},$$

$$\gamma_{\theta z}^\circ(\theta) = \frac{2\sigma_0 \sin \theta}{G_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1)},$$

$$\gamma_{zr}^\circ(\theta) = \frac{-2\sigma_0 \cos \theta}{G_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1)},$$

$$\tau_{zr}^\circ(\theta) = \frac{-2\sigma_0 G_{12}^\circ \cos \theta}{G_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1)},$$

$$\tau_{z\theta}^\circ(\theta) = \frac{2\sigma_0 G_{12}^\circ \sin \theta}{G_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1)}.$$

Розв'язки аналогічної задачі про чистий поздовжній зсув для транстропного композиту мають вигляд [6]:

$$u_z(r, \theta) = \frac{\sigma_0}{G_{12}} r \cos \theta, \quad \gamma_{zr}(r, \theta) = \frac{\sigma_0}{G_{12}} \cos \theta,$$

$$\gamma_{z\theta}(r, \theta) = -\frac{\sigma_0}{G_{12}} \sin \theta, \quad \tau_{zr}(r, \theta) = \sigma_0 \cos \theta,$$

$$\tau_{z\theta}(r, \theta) = -\sigma_0 \sin \theta.$$

Для розв'язання задачі гомогенізації застосуємо енергетичний критерій [7]. У цьому випадку умова узгодження полягає у рівності енергії деформації транслопного однорідного циліндра – комірки гомогенізованого композиту, та енергії деформації системи «матриця – волокно»:

$$U^* + U^\circ = U. \quad (3.1)$$

Енергію деформації однорідного композиту можна подати у вигляді:

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_r \varepsilon_r + \sigma_\theta \varepsilon_\theta + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{r\theta} \gamma_{r\theta} + \tau_{\theta z} \gamma_{\theta z} + \tau_{zr} \gamma_{zr}) r dr d\theta dz. \quad (3.2)$$

Згідно з енергетичним критерієм, сума величин енергії пружного деформування при сумісному поздовжньому зсуві матриці та волокна дорівнює енергії пружного деформування елементарної комірки однорідного композиту [7]. Отримуємо:

$$\begin{aligned} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^a (\tau_{z\theta}^* \gamma_{\theta z}^* + \tau_{zr}^* \gamma_{zr}^*) r dr d\theta dz + \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^a (\tau_{zr}^\circ \gamma_{zr}^\circ + \tau_{z\theta}^\circ \gamma_{\theta z}^\circ) r dr d\theta dz = \\ = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^b (\tau_{z\theta} \gamma_{\theta z} + \tau_{zr} \gamma_{zr}) r dr d\theta dz. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Підставимо у це співвідношення формули для напружень та деформацій матриці, волокна та однорідного композиту. При цьому отримуємо рівність:

$$\begin{aligned} \frac{b^2 (\sigma_0)^2}{G_{12}^* (G_{12}^* (f-1) - G_{12}^\circ (f+1))^2} \times \left( (G_{12}^* + G_{12}^\circ)^2 (1-f) + f (G_{12}^\circ - G_{12}^*)^2 (1-f) \right) + \\ + \frac{4a^2 G_{12}^\circ (\tilde{\sigma}_0)^2}{(G_{12}^* (f-1) - G_{12}^\circ (f+1))^2} = \frac{b^2 (\sigma_0)^2}{G_{12}}. \end{aligned}$$

З останнього співвідношення знаходимо:

$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{(G_{12}^*)^2 + 2G_{12}^*G_{12}^\circ + (G_{12}^\circ)^2 - f^2(G_{12}^*)^2}{G_{12}^*(G_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1))^2} + \frac{2f^2G_{12}^*G_{12}^\circ - f^2(G_{12}^\circ)^2}{G_{12}^*(G_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1))^2}.$$

Для отримання розв'язку в'язкопружної задачі гомогенізації замінимо пружні константи  $G_{12}$  та  $G_{12}^*$  на зображення відповідних інтегральних операторів. Маємо:

$$\frac{1}{\tilde{G}_{12}} = \frac{(\tilde{G}_{12}^*)^2 + 2\tilde{G}_{12}^*\tilde{G}_{12}^\circ + (\tilde{G}_{12}^\circ)^2 - f^2(\tilde{G}_{12}^*)^2}{\tilde{G}_{12}^*(\tilde{G}_{12}^*(f-1) - \tilde{G}_{12}^\circ(f+1))^2} + \frac{2f^2\tilde{G}_{12}^*\tilde{G}_{12}^\circ - f^2(\tilde{G}_{12}^\circ)^2}{\tilde{G}_{12}^*(\tilde{G}_{12}^*(f-1) - \tilde{G}_{12}^\circ(f+1))^2}.$$

З цієї рівності після перетворень знайдемо вираз для зображення інтегрального оператора модуля зсуву:

$$\tilde{G}_{12} = \frac{\tilde{G}_{12}^*(\tilde{G}_{12}^\circ(1+f) + \tilde{G}_{12}^*(1-f))}{(1-f)\tilde{G}_{12}^\circ + (1+f)\tilde{G}_{12}^*}. \quad (3.4)$$

Визначимо ядро релаксації  $R(t)$  для даного оператора. З останньої рівності, враховуючи, що  $\tilde{G}_{12} = G_{12}(1 - \tilde{R}(p))$ , знайдемо зображення  $\tilde{R}(p)$ :

$$\tilde{R}(p) = \frac{C_1(x^*)^2 + C_2x^* + C_3}{C_4(x^* + C_5)}, \quad (3.5)$$

Тут  $x^* = 1 - \tilde{R}^*(p)$ , коефіцієнти  $C_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , знаходять за формулами:

$$C_1 = (f-1)(G_{12}^*)^2, \quad C_2 = G_{12}^*(G_{12} - G_{12}^\circ)(1+f),$$



$$C_3 = G_{12} \cdot G_{12}^\circ (1 - f), \quad C_4 = G_{12} \cdot G_{12}^* (1 + f),$$

$$C_5 = \frac{G_{12}^\circ (1 - f)}{G_{12}^* (1 + f)}.$$

Знайдене зображення ядра релаксації однорідного композиту залежить від зображення ядра релаксації в'язкопружної матриці. У найпростішому випадку експоненціального ядра задача відтворення оригіналу ядра релаксації гомогенізованого композиту розв'язується досить просто. У випадку більш складних ядер тут доводиться застосовувати методи наближеного обернення перетворення Лапласа.

### 3.3 Знаходження оригіналу ядра релаксації для інтегрального оператора модуля зсуву

Розглянемо випадок, коли ядро релаксації для в'язкопружної матриці подається експоненціальною залежністю  $R^*(t) = s_1 e^{s_0 t}$ . Зображення цього ядра подається співвідношенням:

$$\tilde{R}^*(p) = \frac{s_1}{p - s_0}.$$

Отже,  $x^*$  можна записати у вигляді рівності:

$$x^* = 1 - \tilde{R}^*(p) = \frac{p - s_0 - s_1}{p - s_0}.$$

Позначимо  $s = p - s_0$ . У випадку ядра експоненціального типу його зображення має вигляд:

$$\tilde{R}(p) = \frac{C_1(s-s_1)^2 + C_2(s-s_1)s + C_3s^2}{C_4s((C_5+1)s-s_1)}. \quad (3.6)$$

Зображення  $\tilde{R}(p)$  має дві ізольовані особливі точки. Це прості полюси  $p_1 = s_0$  та  $p_2 = s_0 + \frac{s_1}{C_5+1}$ . Знайдемо оригінал  $R(t)$  цього зображення. Для розв'язання цієї задачі використаємо теорему розвинення.

Спочатку знайдемо лишки раціонального дробу  $\tilde{R}(p)$ .

$$q_1 = \text{Res } \tilde{R}_1(p) \Big|_{p=s_0} = -\frac{C_1s_1}{C_4}, \quad q_2 = \text{Res } \tilde{R}_1(p) \Big|_{p=p_2} = \frac{s_1(C_1C_5^2 - C_2C_5 + C_3)}{C_4(C_5+1)}.$$

З їх допомогою знаходимо оригінал ядра релаксації у вигляді:

$$R(t) = q_1 e^{s_0 t} + q_2 e^{p_2 t}.$$

Дослідимо залежність

$$\tilde{h}(t) = \bar{G}_{12}[1] = G_{12} \left( 1 - \int_0^t R_1(t-\tau) d\tau \right).$$

Для експоненціального ядра вона набуває вигляду:

$$\tilde{h}(t) = G_{12} (\alpha_1 + \alpha_2 e^{s_0 t} + \alpha_3 e^{p_2 t}),$$

$$\text{де } \alpha_1 = 1 + \frac{q_1}{s_0} + \frac{q_2}{p_2}, \quad \alpha_2 = -\frac{q_1}{s_0}, \quad \alpha_3 = -\frac{q_2}{p_2}.$$

Використовуючи дану схему, визначимо ефективний модуль зсуву  $\bar{G}_{12}$  транстропного композиту, у якому матеріал матриці – це гума марки 67Л, матеріал волокна – поліетилен VHDPE Tenfor SNIA. Для такої матриці маємо [6]:  $G_0 = 1,5$  МПа,  $G_\infty = 0,78$  МПа,  $G_{12}^* = G_0$ ,  $s_0 = -1$ ,  $s_1 = \frac{G_0 - G_\infty}{G_0}$ , для волокна  $G_{12}^\circ = 1,65$  ГПа. Розраховані значення характеристик інтегрального оператора  $\bar{G}_{12}$  та функції  $h(t)$  при різних значеннях частоти армування  $f$  наведені у таблиці 3.1.

Таблиця 3.1. – Значення характеристик оператора  $\bar{G}_{12}$  при різних значеннях  $f$

$f$	$G_{12}$	$q_1$	$q_2$	$p_2$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$
0,0	1,500	0,480	0,000	-0,771	0,520	0,480	0,000
0,2	1,529	0,314	0,122	-0,723	0,518	0,314	0,168
0,4	1,558	0,198	0,133	-0,674	0,605	0,198	0,197
0,6	1,588	0,113	0,101	-0,624	0,725	0,113	0,162
0,8	1,619	0,049	0,053	-0,572	0,859	0,049	0,092
1,0	1,650	0,000	0,000	-0,520	1,000	0,000	0,000

Криві  $h(t) = \frac{\tilde{h}(t)}{G_{12}}$  для різних значень параметру  $f$  наведені на рис. 3.1.

Розглянемо випадок, коли в'язкопружні властивості матриці композиту описуються інтегральним оператором з ядром Абеля  $R^*(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$ . Тоді

$$\tilde{R}^*(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}, \quad x = \frac{\sqrt{p}-1}{\sqrt{p}}.$$

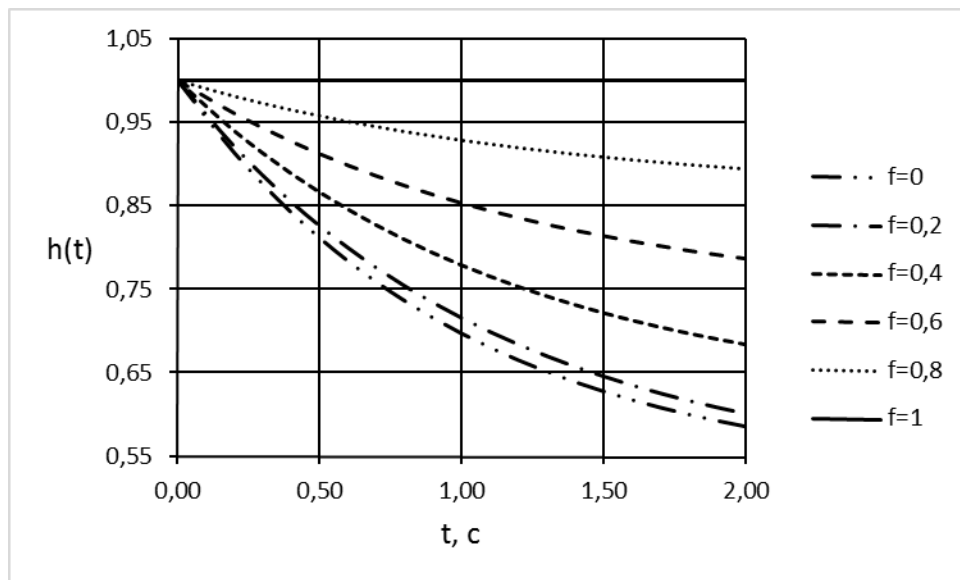


Рисунок 3.1 – Залежність зсувних реологічних характеристик композиту від часу

Зображення ядра набуває вигляду:

$$\tilde{R}(p) = \frac{k_1 k_3 - k_1 - k_2}{1 + k_3} \cdot \frac{1}{\sqrt{p} - \frac{1}{1 + k_3}} - \frac{k_1}{\sqrt{p}}. \quad (3.7)$$

Оригінал  $R(t)$  знаходимо з допомогою таблиць перетворення Лапласа та властивостей цього перетворення.

Повертаючись до вихідних параметрів задачі, знайдений оригінал ядра запишемо у вигляді:

$$R(t) = \frac{4f(1-f)}{1+f} \cdot \frac{(G_{12}^\circ)^2}{(1-f^2)((G_{12}^\circ)^2 + (G_{12}^*)^2) + 2(1+f^2)G_{12}^*G_{12}^\circ} \times \\ \times \left( \frac{1}{\sqrt{\pi t}} + \alpha e^{\alpha^2 t} (1 - \operatorname{erf}(\alpha \sqrt{t})) \right) + \frac{1-f}{1+f} \times \\ \times \frac{(1-f)G_{12}^\circ + (1+f)G_{12}^*}{(1-f)G_{12}^* + (1+f)G_{12}^\circ} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}},$$

$$\alpha = \frac{(1+f)G_{12}^*}{(1+f)G_{12}^* + (1-f)G_{12}^{\circ}}, \quad \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

На рис. 3.2 наведено графіки ядра релаксації  $R(t)$  для значень частки волокна у композиті  $f=0,1$  (крива 1),  $f=0,3$  (крива 2),  $f=0,5$  (крива 3),  $f=0,7$  (крива 4). Зі зростанням значення  $f$ , тобто збільшенням частки пружного волокна у композиті в'язкопружні властивості композита зменшуються (значення  $R(t)$  при фіксованих  $t$  прямують до нуля).

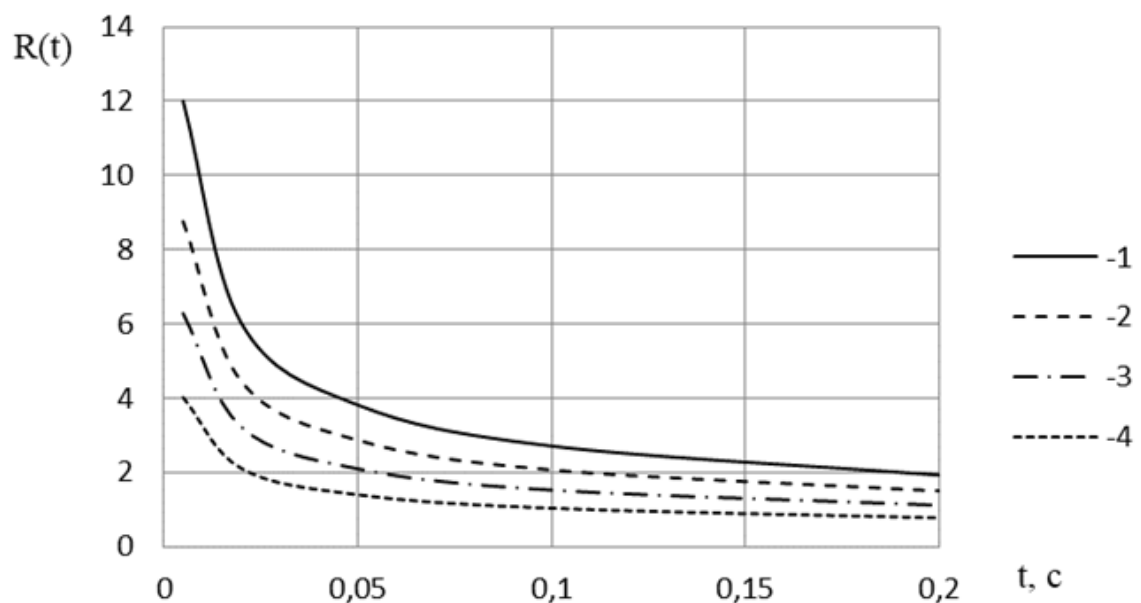


Рисунок 3.2 – Залежності ядра релаксації  $R(t)$  ефективного модуля поздовжнього зсуву в'язкопружного композита від часу  $t$  для різних значень частки  $f$  волокна у композиті ( $f=0,1$  – крива 1,  $f=0,3$  – крива 2,  $f=0,5$  – крива 3,  $f=0,7$  – крива 4)

Ядро релаксації при довільних значеннях  $f$  є монотонно спадною функцією, що набуває невід'ємних значень. Слабка (інтегровна) особливість у точці  $t=0$  пояснюється наявністю такої ж особливості у абелевому ядрі релаксації в'язкопружної матриці.

Отже, знайдено ядро релаксації для ефективного операторного модуля зсуву  $\bar{G}_{12}$  для в'язкопружного трансверсально-ізотропного композита. Запропоновану методику визначення ефективних операторних модулів, що ґрунтується на застосуванні енергетичного критерію, можна застосувати також для дослідження композитів, у яких в'язкопружні характеристики моделюються ядрами релаксації, відмінними від абелевих. Вибір ядра релаксації залежить від в'язкопружних властивостей матеріалу, що визначаються експериментальним шляхом.

## ВИСНОВКИ

У даній кваліфікаційній роботі магістра пропонується методика розв'язання задачі гомогенізації в'язкопружного трансверсально-ізотропного композиту на основі застосування енергетичного критерію узгодження. Сутність пропонованої методики полягає у тому, що спочатку розв'язується задача гомогенізації композиту з ідеально пружними складовими. Для цього використовується енергетичний критерій узгодження, згідно з пружна енергія представницької комірки однорідного композиту дорівнює сумі енергій матриці та волокна. Потім установлюється відповідність між отриманими компонентами напружено-деформованого стану пружної комірки та зображеннями відповідних компонент для в'язкопружного випадку. При цьому знаходимо зображення інтегральних характеристик в'язкопружних операторів при перетворенні Лапласа. На останньому етапі, використовуючи методи операційного числення, відновлюємо їх оригінали.

У першому розділі роботи розглянуто основні теоретичні аспекти використання інтегрального перетворення Лапласа для розв'язання інтегральних рівнянь типу згортки. Необхідність у такому дослідженні пояснюється використанням спадкової теорії Больцмана–Вольтерра для моделювання в'язкопружних властивостей композита. При цьому застосовуються лінійні інтегральні оператори з різницевиими ядрами.

Другий розділ магістерського дослідження містить стислий виклад основних принципів математичного моделювання в'язкопружних композитів. Тут надається означення композиційного матеріалу, розглянуто поняття його ефективних механічних характеристик, а також основні механіко-математичні моделі в'язкопружного середовища.

У третьому розділі кваліфікаційної роботи магістра розглянута методика визначення ефективного модуля зсуву в'язкопружного трансверсально-ізотропного композиту з в'язкопружною матрицею та пружним волокном. При

цьому обидві компоненти композита вважаються трансверсально-ізотропними. Розглянуто ядра релаксації в'язкопружної матриці експоненціального та абелевого типів. Для обернення зображення ядра релаксації використовувались аналітичні методи операційного числення, що є можливим для розглянутих типів ядер.

Розглянута у роботі методика може бути застосованою для визначення інтегральних операторів, що моделюють інші основні механічні характеристики в'язкопружних композитів: модуль пружності першого роду, модуль поперечного зсуву тощо. При цьому матриця та волокно можуть розглядатися як в'язкопружні матеріали з різними типами ядер релаксації.

Перспективи подальших досліджень у цьому напрямі пов'язані з вдосконаленням переходу від пружного до в'язкопружного розв'язку задачі.



## ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Волков И. К., Канатников А. Н. Интегральные преобразования и операционное исчисление. Москва : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. 228 с.
2. Гребенюк С. М., Тітова О. О., Клименко М. І., Полюга С. І. Операційне числення : навчально-методичний посібник для студентів математичного факультету. Запоріжжя : ЗНУ, 2010. 71 с.
3. Краснов М. Л., Макаренко Г. И. Операционное исчисление. Устойчивость движения. Москва : Высшая школа, 2002. 207 с.
4. Мартиненко М. А., Юрик І. І. Теорія функцій комплексної змінної. Операційне числення. Київ : Слово, 2007. 296 с.
5. Клименко М. І., Гребенюк С. М., Гоменюк С. І. Эффективні механічні характеристики в'язкопружних композитів: монографія. Херсон : Видавничий дім «Гельветика», 2019. 300 с.
6. Гребенюк С. М., Гоменюк С. І., Клименко М. І. Напружено-деформований стан просторових конструкцій на основі гомогенізації волокнистих композитів: монографія. Херсон : Видавничий дім «Гельветика», 2019. 300 с.
7. Гребенюк С. Н. Определение упругих постоянных резинокордного материала при помощи энергетического критерия согласования. *Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: збірник наукових праць*. 2010. Вип. 11. Дніпропетровськ : Наука і освіта. С. 79–86.
8. Куимова Е. В., Труфанов И. А. Численное прогнозирование эффективных термовязкоупругих характеристик однонаправленного волокнистого композита с вязкоупругими компонентами. *Вестник Самарского государственного университета*. 2009. № 4(70). С.129–148.

9. Каминский А. А., Селиванов М. Ф. Об одном методе определения характеристик вязкоупругого деформирования композитов. *Прикладная механика*. 2005. Т. 41? № 5. С. 9–21.