МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра фундаментальної математики

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА

на тему: **«ЗАСТОСУВАННЯ ОПЕРАЦІЙНОГО МЕТОДУ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ПРОЦЕСІВ»**

Виконав: студент 2 курсу, групи 8.1119

спеціальності 111 математика

(шифр і назва спеціальності)

освітньої програми математика

(назва освітньої програми)

В. А. Олексієнко

(ініціали та прізвище)

Керівник доцент кафедри фундаментальної математики, доцент, к.ф.-м.н. Клименко М. І.

(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Рецензент доцент кафедри прикладної математики і механіки, доцент, к.ф.-м.н. Левчук С. А.

(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Запоріжжя

2020

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет математичний

Кафедра фундаментальної математики

Рівень вищої освіти магістр

Спеціальність 111 математика
(шифр і назва)

Освітня програма математика

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри фундаментальної математики, д.т.н., доцент

__________ Гребенюк С. М.
(підпис)

« 25 » вересня 2020 р.

З А В Д А Н Н Я

НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТОВІ(СТУДЕНТЦІ)

Олексієнку Владиславу Андрійовичу
(прізвище, ім'я та по-батькові)

1. Тема роботи (проекту) Застосування операційного методу для дослідження нестаціонарних процесів

керівник роботи (проекту) Клименко Михайло Іванович, к.ф.-м.н., доцент
(прізвище, ім'я та по-батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від « 22 » вересня 2020 року № 1416-с

2. Строк подання студентом роботи 4 грудня 2020 року

3. Вихідні дані до роботи 1. Постановка задачі.
2. Перелік літератури.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)
   1. Постановка задачі.
   2. Основні теоретичні відомості.
   3. Розв'язання задач про різні типи коливальних процесів.

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень) __________
Презентація

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання 25.09.2020

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	24.09.2020	
2.	Збір вихідних даних.	28.09.2020	
3.	Обробка методичних та теоретичних		
	джерел.	12.10.2020	
4.	Розробка першого та другого розділу.	26.10.2020	
5.	Розробка третього розділу.	16.11.2020	
6.	Оформлення та нормоконтроль	30.11.2020	
	кваліфікаційної роботи.		
7.	Підготовка доповіді та презентаці.	07.12.2020	
8.	Захист кваліфікаційної роботи.	18.12.2020	

Студент ______________ В. А. Олексієнко
(підпис) (ініціали та прізвище)

Керівник роботи ______________ М. І. Клименко
(підпис) (ініціали та прізвище)

Нормоконтроль пройдено

Нормоконтролер ______________ О. Г. Спиця
(підпис) (ініціали та прізвище)

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Застосування операційного методу для дослідження нестаціонарних процесів»: 58 с., 12 джерел.

ДЕЛЬТА-ФУНКЦІЯ, ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ, КОЛИВАННЯ СТРУНИ, НЕСТАЦІОНАРНИЙ ПРОЦЕС, ОПЕРАЦІЙНИЙ МЕТОД, ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА.

Об'єкт дослідження – коливання струни під дією миттєвих поштовхів.

Мета роботи: визначення переміщень точок струни у коливальних процесах, що виникають під дією миттєвих поштовхів.

Предмет дослідження: коливальні процеси одновимірних об'єктів.

Методи дослідження – методи аналізу (аналіз інформації вітчизняних та зарубіжних науковців) і синтезу (систематизація інформації), операційний метод (застосування перетворення Лапласа).

У кваліфікаційній роботі магістра розглянуто особливості застосування інтегрального перетворення Лапласа для розв'язання диференціальних рівнянь у частинних похідних. Розв'язано задачі про коливання напівнескінченної струни під дією миттєвих поштовхів, а також аналогічні коливання скінченної струни для випадків наявності та відсутності тертя. Застосування інтегрального перетворення Лапласа дозволило звести розв'язання задач до інтегрування звичайних диференціальних рівнянь.

Результати роботи можуть бути використані при викладанні операційного числення, рівнянь математичної фізики, математичного моделювання.

SUMMARY

Master’s Qualification Thesis “Application of the Operating Method for the Study of Nonstationary Processes”: 58 pages, 12 sources.

DELTA FUNCTION, DIFFERENTIAL EQUATION, STRING OSCILLATIONS, NONSTATIONARY PROCESS, OPERATING METHOD, LAPLACE TRANSFORM.

The object of research is the oscillation of the string under the action of instantaneous shocks.

Purpose: to determine the displacements of string points in oscillatory processes that occur under the action of instantaneous shocks.

Subject of research: oscillatory processes of one-dimensional objects.

Research methods – methods of analysis (analysis of information of domestic and foreign scientists) and synthesis (systematization of information), operational method (application of Laplace transform).

The master’s thesis considers the peculiarities of the application of the Laplace integral transformation for solving differential equations in partial derivatives. The problems of oscillations of a semi-infinite string under the action of instantaneous shocks, as well as similar oscillations of a finite string for cases of presence and absence of friction are solved. The application of the Laplace integral transformation made it possible to reduce the solution of problems to the integration of ordinary differential equations.

The results of the work can be used in teaching operational calculus, equations of mathematical physics, mathematical modeling.

ЗМІСТ

ВСТУП

Побудова та дослідження математичних моделей різноманітних нестаціонарних процесів здебільшого зводяться до їх описання за допомогою диференціальних рівнянь у частинних похідних або їх систем відносно невідомих функцій, одним з аргументів яких є час. Виходячи з фізичних міркувань, можна припустити, що такі функції задовольняють вимогам до оригіналів перетворення Лапласа, що надає можливість застосування даного інтегрального перетворення до розв'язання відповідної крайової задачі або задачі Коші. Це обумовлює актуальність досліджень, пов'язаних з застосуванням перетворення Лапласа для визначення характеристик нестаціонарних процесів. До таких досліджень відноситься дана кваліфікаційна робота магістра. Прикладами нестаціонарних процесів, до дослідження якого можна застосувати інтегральне перетворення Лапласа, є коливальні процеси. Багато з них моделюються з допомогою рівнянь, аналогічних різноманітним модифікаціям рівняння коливань струни, що досліджені у цій роботі. Методи операційного числення дозволяють успішно розрахувати більшість характеристик нестаціонарних процесів.

Метою магістерської роботи є визначення переміщень точок струни у коливальних процесах, що виникають під дією миттєвих поштовхів. Об'єктом дослідження є коливання струни під дією миттєвих поштовхів. Предмет дослідження – коливальні процеси одновимірних об'єктів. У роботі розглянуто коливання напівнескінченної струни під дією миттєвих поштовхів, а також аналогічні коливання скінченної струни для випадків наявності та відсутності тертя. Для дослідження використано операційний метод, основою якого є застосування інтегрального перетворення Лапласа.

До розв'язання різних типів диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами зводиться велика кількість практичних задач електротехніки, електроніки, зв'язку, теорії автоматичного регулювання та управління. Такі розв'язки можна отримати з допомогою операційного методу.

З точки зору сучасної математики операційний метод, як і інші методи інтегральних перетворень, зводиться до перетворення лінійних диференціальних операторів шляхом застосування до них інтегрального перетворення Лапласа. При цьому лінійний диференціальний оператор можна представити у вигляді суперпозиції простіших операторів, для кожного з яких є відомим обернений оператор.

Інтегральне перетворення Лапласа дозволило інтерпретувати формальні правила перетворення операторних виразів як перетворення деяких алгебраїчних виразів, що пов'язують між собою зображення шуканих функцій. Використання операційного методу для розв'язання лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних здійснюється за схемою, типовою для всіх методів інтегральних перетворень. Для функцій – оригіналів, що входять у диференціальне рівняння, будуються їх зображення, при цьому задача розв'язання диференціального рівняння для функції двох змінних зводиться до задачі інтегрування звичайного диференціального рівняння, тобто до розв'язання простішої задачі. Розв'язавши отримане рівняння відносно зображення, за знайденим зображенням відновлюють оригінал. Блок – схема застосування операційного методу наведена у дипломній роботі, що є прикладом реалізації подібної схеми для дослідження нестаціонарних процесів розповсюдження струму у електромережах.

1 ІНТЕГРАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

1.1 Поняття перетворення Лапласа

Операційне числення є розділом математики, що вивчає інтегральне перетворення Лапласа та його застосування [1]. Методи операційного числення використовують при розв'язанні багатьох важливих прикладних задач, зокрема, у радіотехніці, електроніці, теорії автоматичного управління та регулювання, а також інших галузях науки та техніки, де виникає потреба у розв'язанні лінійних рівнянь різних типів: звичайних диференціальних рівнянь, рівнянь у частинних похідних, інтегральних та інтегро-диференціальних рівнянь, різницевих рівнянь. Використання операційного методу дозволяє звести розв'язання таких рівнянь до розв'язання лінійних алгебраїчних рівнянь. Перетворення Лапласа ставить у відповідність функції дійсної змінної її зображення – деяку функцію комплексної змінної. При цьому операції над зображеннями здебільшого виявляються простішими, ніж відповідні операції над вихідними функціями (оригіналами). Розв'язавши отримане рівняння відносно зображення, за знайденим зображенням відновлюють оригінал .

Елементи операційного числення зустрічаються у працях Г. В. Лейбніца (1646–1716 рр.), Л. Ейлера (1707–1783 рр.), П. Лапласа (1749–1827 рр.), О. Коші (1789 – 1857 рр.) [1]. Вперше для практичних досліджень у галузі електротехніки операційний метод застосував англійський інженер-електрик О. Хевісайд (1850–1925 рр.). Застосувавши операційне числення до розв'язання диференціальних рівнянь, він отримав важливі результати у теорії електромагнітних коливань в електричних мережах. Чітке математичне обґрунтування на основі теорії інтегральних перетворень операційне числення отримало у дослідженнях Карсона, Бромвіча, Леві, Ван дер Поля та інших математиків. Таке обґрунтування було отримано у межах сучасної теорії інтегральних перетворень. Інтегральне перетворення Лапласа дозволило інтерпретувати формальні правила перетворення операторних виразів як перетворення алгебраїчних виразів, що пов'язуть між собою зображення відомих та невідомих функцій.

Нехай функцію $f(t)$ дійсної змінної t задано на скінченному або нескінченному інтервалі $(a;b)$. Інтегральним перетворенням функції дійсної змінної $f(t)$ називають функцію

$$F(p)=\int_a^b K(t,p)\,f(t)\,dt,$$

де $K(t,p)$ – фіксована для даного перетворення функція, яку називають ядром перетворення, p – дійсний або комплексний параметр перетворення [1].

У залежності від вигляду ядра розрізняють різноманітні типи інтегральних перетворень. Ефективним засобом, що використовується при розв'язанні різноманітних задач математичного аналізу та у практичних науково-технічних дослідженнях, є інтегральне перетворення Лапласа.

Перетворенням Лапласа [1] функції $f(t)$, $t\in R$, називають функцію $F(p)$ комплексної змінної p, що визначається рівністю:

$$F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt. \qquad (1.1)$$

Функцію $F(p)$ називають зображенням функції $f(t)$ при перетворенні Лапласа, а інтеграл у правій частині рівності (1.1) називають інтегралом Лапласа [1].

Розділ математики, що вивчає перетворення Лапласа, його властивості та застосування, називають операційним численням, а метод розв'язання рівнянь різноманітних типів за допомогою перетворення Лапласа – операційним методом.

З'ясуємо, яким вимогам повинна задовольняти функція $f(t)$, щоб невласний інтеграл (1.1) був збіжним та визначав зображення $F(p)$. У цьому випадку функцію $f(t)$ називають оригіналом.

Для того, щоб бути оригіналом при перетворенні Лапласа, функція повинна задовольняти наступні вимоги:

а) $f(t)=0$ при $t<0$;

б) на довільному обмеженому інтервалі $f(t)$ може мати лише скінченну або зліченну кількість точок інтегровного розриву типу стрибка;

в) $|f(t)|$ зростає не швидше деякої експоненціальної функції, тобто існують такі числа $\alpha \geq 0$ та $M>0$, що $|f(t)|<M \cdot e^{\alpha t}$. При цьому точну нижню грань α_0 значень α, для яких виконано останню умову, називають показником зростання функції $f(t)$.

Найпростішим прикладом оригінала є функція Хевісайда або одинична функція [2]:

$$\eta(t)=\begin{cases} 1, & t \geq 0; \\ 0, & t<0. \end{cases}$$

Можна перевірити, що вона задовольняє всім умовам функції-оригінала. Її показником зростання є число $\alpha_0=0$.

Умови існування зображення, визначеного формулою (1.1), наводяться у теоремі про існування зображення.

Теорема 1.1 (теорема про існування зображення) [2]. Якщо функція $f(t)$ є оригіналом з показником зростання α_0, то інтеграл Лапласа

$$F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

є абсолютно збіжним у півплощині $\operatorname{Re} p>\alpha_0$ комплексної площини p і визначає зображення $F(p)$, яке є функцією, аналітичною у цій півплощині.

Наведемо доведення цієї теореми. Оскільки $f(t)$ є оригіналом з показником зростання α_0, то виконується умова $\left|f(t)\right|<M\cdot e^{\alpha_0 t}$. Нехай $p=\sigma+is$. Тоді $\left|e^{-pt}\right|=e^{-\sigma t}$ і $\left|f(t)e^{-pt}\right|\le Me^{(\alpha_0-\sigma)t}$. Звідси знаходимо:

$$\int_0^{+\infty}\left|f(t)e^{-pt}\right|dt\le M\int_0^{+\infty}e^{(\alpha_0-\sigma)t}dt=M\left.\frac{e^{(\alpha_0-\sigma)t}}{\alpha_0-\sigma}\right|_0^{+\infty}=\frac{M}{\sigma-\alpha_0}. \qquad (1.2)$$

Оскільки за умовою теореми $\alpha_0-\sigma<0$, то $e^{(\alpha_0-\sigma)t}\to 0$ при $t\to+\infty$.

Отже, з нерівності (1.2) випливає, що інтеграл Лапласа є абсолютно збіжним при $\operatorname{Re} p>\alpha_0$.

Можна довести також аналітичність $F(p)$. Зауважимо, що, хоча теорема 1.1 стверджує збіжність інтеграла лише при $\operatorname{Re} p>\alpha_0$, найчастіше функція $F(p)$ є визначеною та аналітичною на всій площині, за винятком ізольованих особливих точок.

Необхідна умова, за виконання якої функція $F(p)$ є зображенням деякого оригінала, розглянута у теоремі 1.2.

Теорема 1.2 (необхідна умова зображення) [3]. Якщо функція $F(p)$ є зображенням функції $f(t)$ з показником зростання α, то $\lim\limits_{p\to\infty}F(p)=0$.

Дійсно, оскільки $F(p)$ є зображенням функції $f(t)$ з показником зростання α_0, то при $p=\sigma+is$ $\left|F(p)\right|=\left|\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt\right|<\int_0^{+\infty} Me^{(\alpha-\sigma)t}dt=\dfrac{M}{\sigma-\alpha}$. З цієї нерівності випливає, що $\lim\limits_{\operatorname{Re} p\to\infty} F(p)=0$. Оскільки $F(p)$ є аналітичною при $\operatorname{Re} p>\alpha$, то $F(p)\to 0$ при $p\to\infty$ по довільному напрямку.

З цієї теореми випливає, що такі функції, як, наприклад, $F(p)=1$, $F(p)=p$ не можуть бути зображеннями при перетворенні Лапласа.

За формулою (1.1) кожному оригіналу ставиться у відповідність функція $F(p)$. Цю відповідність між оригіналом $f(t)$ та його зображенням $F(p)$ надалі будемо записувати у вигляді: $f(t)\div F(p)$.

Оскільки функція-оригінал дорівнює нулю при $t<0$, то у подальшому для спрощення записів будь-яку функцію – оригінал, яку можна представити у вигляді $f(t)\cdot\eta(t)$ ($\eta(t)$ – функція Хевісайда), будемо позначати $f(t)$.

Отримання зображення за допомогою співвідношення (1.1) не завжди є легким та зручним. Ефективно вирішити цю задачу допомагає використання властивостей перетворення Лапласа, які ми розглянемо далі.

1.2 Властивості перетворення Лапласа

Для перетворення Лапласа виконується властивість лінійності.

Теорема 1.3 (теорема лінійності) [1]. Якщо $f(t)\div F(p)$, $g(t)\div G(p)$, то

$$A\cdot f(t)+B\cdot g(t)\div A\cdot F(p)+B\cdot G(p),$$

де A та B – дійсні або комплексні сталі.

Доведення цієї теореми випливає з властивості лінійності для інтегралів.

Теорема 1.4 (теорема подібності) [1]. Якщо $f(t)\div F(p)$, то для довільної дійсної сталої $\alpha>0$

$$f(\alpha t) \div \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

Для доведення останньої рівності знайдемо зображення $f(\alpha t)$: $f(\alpha t) \div \int_0^{+\infty} f(\alpha t) e^{-pt} dt$. Виконаємо у цьому інтегралі заміну змінної $\alpha t = t_1$. Тоді $dt = \frac{dt_1}{\alpha}$. Маємо:

$$f(\alpha t) \div \int_0^{+\infty} f(\alpha t) e^{-pt} dt = \frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} f(t_1) e^{-\frac{pt_1}{\alpha}} dt_1 = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

Теорема 1.5 (теорема зміщення) [1]. Якщо $f(t) \div F(p)$, то

$$e^{at} f(t) \div F(p-a),$$

де a – довільна стала.

Для доведення цієї теореми знайдемо зображення функції $e^{at} f(t)$:

$$e^{at} f(t) \div \int_0^{+\infty} e^{at} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-(p-a)t} dt = F(p-a).$$

Теорема 1.6 (теорема запізнення) [4]. Якщо $f(t) \div F(p)$, то $f(t-\tau) \div e^{-p\tau} \cdot F(p)$, де $\tau > 0$ – довільна стала.

Доведемо цю теорему. Оскільки $f(t-\tau)$ є оригіналом, то $f(t-\tau) = 0$ при $t < \tau$, тому отримуємо:

$$f(t-\tau) \div \int_0^{+\infty} f(t-\tau) e^{-pt} dt = \int_\tau^{+\infty} f(t-\tau) e^{-pt} dt .$$

Виконаємо заміну $t-\tau=t_1$. Тоді знаходимо, що

$$\int_\tau^{+\infty} f(t-\tau) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} f(t_1) \cdot e^{-p(t_1+\tau)} dt_1 = e^{-p\tau} \int_0^{+\infty} f(t_1) e^{-pt_1} dt_1 .$$

Звідси випливає, що $f(t-\tau) \div e^{-p\tau} \cdot F(p)$.

Ця теорема дає можливість знаходити зображення кусково-неперервних функцій, зокрема, функцій, що описують імпульсні процеси [5].

Використовуючи теорему запізнення, знайдемо зображення періодичної функції – оригінала, тобто функції $f(t) \cdot \eta(t)$, де $f(t)$ є періодичною функцією.

Нехай функція $f(t)$ має період T. Розглянемо допоміжну функцію

$$f_1(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [0;T], \\ 0, & t \notin [0;T]. \end{cases}$$

З допомогою цієї функції оригінал $f(t) \cdot \eta(t)$ можна записати у вигляді:

$$f(t) \cdot \eta(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_1(t-nT) \cdot \eta(t-nT) .$$

Знайдемо зображення $f(t) \cdot \eta(t)$. Для цього використаємо теорему запізнення. Якщо $f_1(t) \div F_1(p)$, то отримуємо:

$$f(t)\cdot\eta(t)\div F(p)=F_1(p)\sum_{n=0}^{\infty}e^{-npT}=\frac{F_1(p)}{1-e^{-pT}}.$$

Остання рівність виконується при $\operatorname{Re} p>0$, коли $\sum\limits_{n=0}^{\infty}e^{-npT}$ є сумою членів нескінченно спадної геометричної прогресії. Враховуючи, що $F_1(p)=\int\limits_0^T f(t)e^{-pt}dt$, отримуємо формулу для зображення періодичного оригіналу з періодом T у вигляді:

$$f(t)\cdot\eta(t)\div F(p)=\frac{1}{1-e^{-pT}}\int\limits_0^T f(t)e^{-pt}dt.$$

Теорема 1.7 (теорема випередження) [4]. Якщо $f(t)\div F(p)$, то для довільної сталої величини $\tau>0$

$$f(t+\tau)\div e^{p\tau}\left(F(p)-\int\limits_0^{\tau} f(t)e^{-pt}dt\right).$$

Для доведення знайдемо зображення $f(t+\tau)$. Маємо:

$$f(t+\tau)\div\int\limits_0^{+\infty} f(t+\tau)e^{-pt}dt.$$

Виконавши заміну змінної $t+\tau=t_1$, отримуємо:

$$f(t+\tau)\div e^{p\tau}\int\limits_{\tau}^{+\infty} f(t_1)e^{-pt_1}dt_1=e^{p\tau}\left(\int\limits_0^{+\infty} f(t_1)e^{-pt_1}dt_1-\int\limits_0^{\tau} f(t_1)e^{-pt_1}dt_1\right)=$$

$$=e^{p\tau}\left(F(p)-\int\limits_0^{\tau} f(t_1)e^{-pt_1}dt_1\right).$$

Теорема 1.8 (теорема диференціювання по параметру) [4]. Якщо $f(t,x) \div F(p,x)$ і функція $f(t,x)$ при кожному фіксованому значенні x є оригіналом, а функція $F(p,x)$ має частинну похідну по x, то має місце співвідношення

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial x} \div \frac{\partial F(p,x)}{\partial x}.$$

Важливе значення для розв'язання операційним методом лінійних диференціальних рівнянь та їх систем має наступна теорема.

Теорема 1.9 (теорема про диференціювання оригінала) [4] . Якщо $f(t) \div F(p)$ і функції $f'(t),\ f''(t),\ldots, f^{(n)}(t)$ є оригіналами, то виконуються наступні співвідношення:

$$f'(t) \div pF(p) - f(0),$$

$$f''(t) \div p^2F(p) - pf(0) - f'(0),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$f^{(n)}(t) \div p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0).$$

Дійсно, знайдемо зображення похідних оригінала. Для першої похідної $f'(t)$ маємо:

$$f'(t) \div \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt = \left\| \begin{matrix} u = e^{-pt}, dv = f'(t)dt, \\ du = -pe^{-pt}dt, v = f(t) \end{matrix} \right\| = f(t)e^{-pt}\Big|_0^{+\infty} +$$
$$+p\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt = -f(0) + pF(p).$$

Отже, $f'(t) \div pF(p) - f(0)$. Користуючись цією формулою, знайдемо зображення другої похідної $f''(t) = \left(f'(t)\right)'$:

$$f''(t) \div p\left(pF(p) - f(0)\right) - f'(0) = p^2 F(p) - pf(0) - f'(0).$$

Аналогічно знаходимо зображення $f'''(t)$. Застосовуючи формулу для зображення першої похідної $(n-1)$ разів, отримуємо:

$$f^{(n)}(t) \div p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0).$$

Якщо для функції $f(t)$ $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$, то отримуємо: $f^{(n)}(t) \div p^n F(p)$.

З теореми про диференціювання оригінала випливають наступні наслідки.

Наслідок 1 Якщо $f'(t)$ є оригіналом, а функція $F(p)$ аналітична при $p \to \infty$, то $\lim\limits_{p \to \infty} pF(p) = f(0)$.

Наслідок 2 Якщо $f'(t)$ є оригіналом і існує границя функції $f(t)$ при $t \to \infty$, то $\lim\limits_{p \to 0} pF(p) = \lim\limits_{t \to \infty} f(t)$.

Теорема 1.10 (теорема про диференціювання зображення). Якщо $f(t) \div F(p)$, то $F'(p) \div -tf(t)$, $F''(p) \div t^2 f(t)$, …, $F^{(n)}(p) \div (-1)^n t^n f(t)$.

Оскільки функція $F(p)$ є аналітичною у півплощині $\operatorname{Re} p > \alpha_0$, то вона має похідні довільних порядків. Тому, диференціюючи зображення $F(p) = \int\limits_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$ по p, отримаємо:

$$F'(p)=\int_0^{+\infty}\left(f(t)e^{-pt}\right)'_p dt=\int_0^{+\infty} f(t)(-t)e^{-pt}dt \div -tf(t).$$

Тоді маємо:

$$F''(p)\div(-t)(-t)f(t)=t^2 f(t).$$

Отже, кожне диференціювання $F(p)$ по p відповідає множенню оригінала попередньої похідної на $(-t)$, тому отримуємо: $F^{(n)}(p)\div(-1)^n t^n f(t)$. Теорему доведено.

Теорема 1.11 (теорема про інтегрування оригінала) [5]. Якщо виконується співвідношення $f(t)\div F(p)$, то

$$\int_0^t f(\tau)d\tau \div \frac{F(p)}{p}.$$

Для доведення цієї теореми введемо допоміжну функцію $\varphi(t)=\int_0^t f(\tau)d\tau$ і $\varphi(t)\div\Phi(p)$.

За теоремою про диференціювання оригіналу маємо:

$$\varphi'(t)\div p\Phi(p)-\varphi(0)=p\Phi(p),$$

оскільки $\varphi(0)=0$. З співвідношень $\varphi'(t)=f(t)\div F(p)$ випливає, що $F(p)=p\Phi(p)$, звідки $\Phi(p)=\frac{F(p)}{p}$, тобто $\int_0^t f(\tau)d\tau\div\frac{F(p)}{p}$. Теорему доведено.

Теорема 1.12 (теорема про інтегрування зображення) [5]. Якщо $f(t) \div F(p)$ і інтеграл $\int_{p}^{\infty} F(q)dq$ збіжний, то

$$\int_{p}^{\infty} F(q)dq \div \frac{f(t)}{t}.$$

Доведемо теорему про інтегрування зображення. Враховуючи співвідношення $F(p) = \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$ і змінюючи порядок інтегрування по t та q, отримуємо:

$$\int_{p}^{\infty} F(q)dq = \int_{p}^{\infty}\left(\int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-qt}dt\right)dq = \int_{0}^{+\infty}\left(\int_{p}^{\infty} e^{-qt}dq\right)f(t)dt = \int_{0}^{+\infty}\left(-\frac{e^{-qt}}{t}\right)\Bigg|_{p}^{\infty} f(t)dt =$$
$$= \int_{0}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}e^{-pt}dt \div \frac{f(t)}{t}.$$

Знайдемо зображення згортки функцій, що є оригіналами.

Згорткою [6] неперервних функцій $f(t)$ та $g(t)$, $t \geq 0$, називають інтеграл

$$f * g = \int_{0}^{t} f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Зауважимо, що операція згортки є комутативною [6]: $f * g = g * f$. Крім того, згортка неперервних функцій також є неперервною.

Теорема 1.13 [6]. Якщо функції $f(t)$ та $g(t)$ є оригіналами, то їх згортка також є оригіналом.

Покажемо, що функція $f * g$ задовольняє всім трьом умовам оригінала. З неперервності $f(t)$ та $g(t)$ випливає неперервність згортки цих функцій.

Оскільки $f(t)$ та $g(t)$ є оригіналами, то вони тотожно дорівнюють нулю при $t<0$ і підінтегральний вираз у формулі згортки $f * g = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau$ тотожно дорівнює нулю при $t<0$, тому $f * g = 0$ при $t<0$.

Доведемо, що функція $\varphi(t) = f * g$ задовольняє третій умові оригінала, тобто $|\varphi(t)| \le K \cdot e^{\beta t}$. Оскільки $f(t)$ та $g(t)$ є оригіналами, то існують дійсні константи α_1 та α_2, такі, що

$$|f(t)| \le M_1 e^{\alpha_1 t}, \quad |g(t)| \le M_2 e^{\alpha_2 t}.$$

Нехай $\alpha = \max(\alpha_1, \alpha_2)$. Тоді

$$|f(\tau) \cdot g(t-\tau)| \le M_1 M_2 e^{\alpha\tau} e^{\alpha(t-\tau)} = M_1 M_2 e^{\alpha t} = K e^{\alpha t},$$

де $K = M_1 M_2$. Звідси випливає, що

$$|\varphi(t)| \le \int_0^t |f(\tau) \cdot g(t-\tau)| d\tau \le \int_0^t K e^{\alpha\tau} d\tau = K t e^{\alpha t}.$$

Оскільки $\forall t \ge 0 \quad t < e^t$, то $|\varphi(t)| \le K e^{(\alpha+1)t} = K e^{\beta t}$, де $\beta = \alpha + 1$. Таким чином, згортка $\varphi(t) = f * g$ є оригіналом.

Теорема 1.14 (теорема про множення зображень) [6]. Якщо $f(t) \div F(p)$, а $g(t) \div G(p)$, то

$$F(p)\cdot G(p) \div f(t) * g(t),$$

де $f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)\cdot g(t-\tau)d\tau$ – згортка функцій $f(t)$ і $g(t)$.

Вище було доведено, що функція $f * g$ є оригіналом. За означенням перетворення Лапласа маємо:

$$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \div \int_0^{+\infty}\left(\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right)e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt}dt\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau .$$

Змінимо порядок інтегрування у отриманому повторному інтегралі і виконаємо підстановку $t_1 = t-\tau$:

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt}dt\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^{+\infty} f(\tau)d\tau\int_\tau^{+\infty} e^{-pt}g(t-\tau)dt =$$
$$= \int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-p\tau}d\tau\int_0^{+\infty} g(t_1)e^{-pt_1}dt_1 = F(p)\cdot G(p).$$

З теореми 1.14 випливає, що, коли $f * g \div F(p)\cdot G(p)$ і $f'(t)$ є оригіналом, то виконується формула Дюамеля [7]:

$$pF(p)G(p) \div \int_0^t f'(\tau)g(t-\tau)d\tau + f(0)g(t). \tag{1.3}$$

Дійсно, вираз $pF(p)G(p)$ можна записати у вигляді:

$$pF(p)G(p) = \left(pF(p) - f(0)\right)G(p) + f(0)G(p) \div f'(t) * g(t) + f(0)g(t).$$

Зауважимо, що формулу Дюамеля (12.3) можна записати також у вигляді:

$$pF(p)G(p) \div \int_0^t g'(\tau) f(t-\tau) d\tau + g(0) f(t).$$

Формулу Дюамеля застосовують при розв'язанні лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь.

1.3 Методи знаходження оригіналу за заданим зображенням

У найпростіших випадках зображення можна подати у вигляді, коли його оригінал можна знайти, використовуючи властивості перетворення Лапласа та таблицю зображень основних елементарних функцій. У випадках, коли зображення $F(p)$ є раціональним дробом, то для знаходження оригіналу використовують метод розкладу зображення на елементарні дроби.

У загальному випадку розв'язання задачі знаходження оригінала за заданим зображенням ґрунтується на теоремі обернення (теоремі Рімана-Мелліна).

Теорема 1.15 (теорема Рімана-Мелліна) [8]. Якщо функція $f(t)$ є оригіналом, а $F(p)$ – її зображення, то у кожній точці неперервності функції $f(t)$ справедлива формула обернення Рімана-Мелліна:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(p) e^{pt} dp, \tag{1.4}$$

де інтегрування здійснюється по довільній прямій $\operatorname{Re} p = \gamma$, $\gamma > \alpha$ (α – показник зростання функції $f(t)$) і інтеграл розглядається у розумінні головного значення.

Безпосереднє застосування формули (1.4) часто пов’язане з технічними труднощами, тому на практиці для знаходження оригіналу користуються теоремами розвинення, що ґрунтуються на теоремі Рімана – Мелліна.

Теорема 1.16 (перша теорема розвинення) [9]. Якщо функція $F(p)$ є аналітичною у околі нескінченно віддаленої точки $p = \infty$ і її розвинення у ряд Лорана має вигляд $F(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}$, то функція $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ є оригіналом для зображення $F(p)$.

Теорема 1.17 (друга теорема розвинення) [9]. Якщо функція $F(p)$ є однозначною та має скінченне число особливих точок p_1, $p_2, \ldots,$ p_n, то функція

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res} \left(e^{p_k t} F(p_k) \right) \tag{1.5}$$

є оригіналом, що має зображення $F(p)$.

З першої теореми розвинення випливає, що у випадку, коли $F(p) = \frac{Q(p)}{R(p)}$ – правильний раціональний дріб, то оригіналом для нього буде функція

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n_k - 1)!} \lim_{p \to p_k} \left((p - p_k)^{n_k} \frac{Q(p)}{R(p)} e^{pt} \right)^{(n_k - 1)}. \tag{1.6}$$

У формулі (1.6) p_k – полюси порядку n_k функції $F\left(p\right)$. Якщо всі ці полюси (нулі знаменника $R\left(p\right)$) є простими, то оригіналом для $F\left(p\right)$ є функція

$$f\left(t\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{Q\left(p_k\right)}{R'\left(p_k\right)}e^{p_k t}\ . \tag{1.7}$$

Формулу (1.7) можна записати також у вигляді:

$$\begin{gathered} f\left(t\right)=\frac{Q\left(p_1\right)\cdot e^{p_1 t}}{\left(p_1-p_2\right)\left(p_1-p_3\right)...\left(p_1-p_n\right)}+\frac{Q\left(p_2\right)\cdot e^{p_2 t}}{\left(p_2-p_1\right)\left(p_2-p_3\right)...\left(p_2-p_n\right)}+ \\ +...+\frac{Q\left(p_n\right)\cdot e^{p_n t}}{\left(p_n-p_1\right)\left(p_n-p_2\right)...\left(p_n-p_{n-1}\right)}. \end{gathered} \tag{1.8}$$

Розглянуті у даному розділі методи знаходження оберненого перетворення Лапласа для відомих функцій – зображень дозволяють застосовувати операційний метод для розв’язання диференціальних рівнянь. Вони забезпечують можливість відтворення оригіналу для знайденого розв’язку алгебраїчного рівняння відносно його зображення.

2 МЕТОДИКА ЗАСТОСУВАННЯ ОПЕРАЦІЙНОГО МЕТОДУ ДО РОЗВ’ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

2.1 Операційний метод розв’язання лінійних диференціальних рівнянь

Застосування до диференціального рівняння перетворення Лапласа приводить до алгебраїчного рівняння відносно зображення. З отриманого рівняння можна знайти зображення шуканого оригіналу, а далі за зображенням можна відтворити оригінал [10].

Нехай маємо лінійне диференціальне рівняння n-го порядку з сталими коефіцієнтами відносно невідомої функції $x(t)$, що задовольняє вимогам оригіналу:

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+...+a_nx=f(t). \qquad (2.1)$$

Будемо шукати розв’язок цього рівняння, що задовольняє початкові умови:

$$x(0)=x_0,\ x'(0)=x_0',\ \ldots,\ x^{(n-1)}(0)=x_0^{(n-1)}. \qquad (2.2)$$

Нехай $x(t)\div X(p)$, $f(t)\div F(p)$. Застосовуючи до обох частин рівняння (2.1) перетворення Лапласа і використовуючи теорему лінійності та теорему про диференціювання оригіналу, від диференціального рівняння (2.1) з початковими умовами (2.2) переходимо до алгебраїчного рівняння виду

$$\left(p^n+a_1p^{n-1}+...+a_n\right)X(p)+Q(p)=F(p),$$

де $Q(p)$ – деякий многочлен, коефіцієнти якого визначаються початковими умовами (2.2).

Розв'язавши отримане рівняння відносно зображення $X(p)$, отримуємо:

$$X(p)=\frac{F(p)-Q(p)}{p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n}.$$

Знайшовши оригінал $x(t)$ для $X(p)$, ми одержимо шуканий розв'язок диференціального рівняння (2.1) з початковими умовами (2.2), тобто розв'язок задачі Коші.

Аналогічно розв'язують і системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами [11]. Різниця полягає лише у тому, що замість одного алгебраїчного рівняння отримуємо систему кількох рівнянь відносно зображень.

Операційне числення можна застосувати також до розв'язання деяких лінійних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами, зокрема, якщо ці коефіцієнти є многочленами. При переході від диференціального рівняння відносно оригіналу $x(t)$ до рівняння відносно зображення $X(p)$ використовують теорему про диференціювання зображень, згідно з якою похідна $\frac{dX}{dp}\div -t\cdot x(t)$. Тому внаслідок застосування перетворення Лапласа отримуємо диференціальне рівняння відносно зображення $X(p)$, порядок якого дорівнює максимальному степеню многочленів, що є коефіцієнтами для оригіналу, а степені коефіцієнтів отриманого рівняння не перевищують порядку рівняння відносно оригіналу.

Операційний метод для розв'язання рівнянь з коефіцієнтами-многочленами доцільно застосовувати, якщо старший степінь його коефіцієнтів менший ніж порядок диференціального рівняння.

Лінійне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами (3.1) можна записати у вигляді: $L(x)=f(t)$, де символ $L(x)$ означає лінійний диференціальний оператор n-го порядку:

$$L(x)=x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\ldots+a_nx\,.$$

З означення лінійного диференціального оператора випливає, що $L(c_1x_1+c_2x_2)=c_1L(x_1)+c_2L(x_2)$, де $x_1(t)$ та $x_2(t)$ – довільні n разів диференційовні функції, c_1 та c_2 – довільні константи.

Якщо $x_1(t)$ є розв’язком диференціального рівняння $L(x)=1$ при нульових початкових умовах, то розв’язком рівняння $L(x)=f(t)$ при таких самих початкових умовах є функція

$$x(t)=\int_0^t x_1'(\tau)\,f(t-\tau)\,d\tau=\int_0^t f(\tau)\,x_1'(t-\tau)\,d\tau\,. \tag{2.3}$$

Для доведення рівності (2.3) застосуємо перетворення Лапласа при нульових початкових умовах до рівняння $L(x)=1$. У результаті отримаємо алгебраїчне рівняння $\tilde{L}(p)X_1(p)=\dfrac{1}{p}$, де

$$\tilde{L}(p)=p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n\,,\ X_1(p)\div x_1(t).$$

Звідси знаходимо: $\tilde{L}(p)=\dfrac{1}{pX_1(p)}$.

Зображенням рівняння $L(x)=f(t)$ при нульових початкових умовах є рівняння

$$\tilde{L}(p)X(p)=F(p),$$

де $X(p)\div x(t)$, $F(p)\div f(t)$.

Для зображення $X(p)$ отримуємо:

$$X(p)=\frac{F(p)}{\tilde{L}(p)}=pX_1(p)F(p).$$

Тоді за формулою Дюамеля (1.3) маємо:

$$x(t)=x_1(0)\,f(t)+\int_0^t x_1'(\tau)\,f(t-\tau)\,d\tau=\int_0^t x_1'(\tau)\,f(t-\tau)\,d\tau,$$

оскільки $x_1(0)=0$. Другий вираз у правій частині рівності (2.3) випливає з комутативності згортки.

Рівність (2.3) дозволяє знаходити розв’язок диференціального рівняння (2.1) без використання зображення правої частини цього рівняння.

Знаючи розв’язок для одиничної правої частини рівняння, ми за допомогою інтегрування знаходимо розв’язок для довільної правої частини. Вимога нульових початкових умов є несуттєвою: заміною шуканої функції задачу з ненульовими початковими умовами можна звести до задачі з нульовими умовами.

2.2 Методика застосування перетворення Лапласа до дослідження нестаціонарних процесів

Під нестаціонарним процесом далі будемо розуміти процес, для якого однозначно визначене поняття його стану як сукупності значень деяких величин у певний момент часу та задано оператор, що визначає еволюцію початкового стану у часі [12]. Для описання такої еволюції у системах з неперервним часом використовують диференціальні рівняння з частинними похідними відносно функцій, одним з аргументів яких є час. Операційний метод можна використати для дослідження лінійних нестаціонарних систем. Такі системи моделюються лінійними диференціальними рівняннями з частинними похідними, що мають вигляд:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial u}{\partial x} + cu + a_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b_1\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \tag{2.4}$$

де a, b, c, a_1, b_1 є неперервними функціями, що залежать від змінної x, $x \in [0; l]$. Нехай $a > 0$. Розглянемо два випадки: 1) $a_1 < 0$ – гіперболічний випадок; 2) $a_1 \equiv 0$, $b_1 < 0$ – параболічний випадок.

Нехай потрібно знайти розв'язок $u(x,t)$ диференціального рівняння (2.4) для $t \ge 0$ та $0 \le x \le l$, що задовольняє початкові умови $u(x,0) = \varphi(x)$ для параболічного випадку або $u(x,0) = \varphi(x)$, $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x)$ для гіперболічного випадку, а також крайовим умовам $u(0,t) = f(t)$, $\alpha\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} + \beta\frac{\partial u(l,t)}{\partial t} = \gamma u(l,t)$, де α, β, γ – задані сталі величини [11].

Будемо вважати, що u, $\frac{\partial u}{\partial x}$ та $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ є функціями-оригіналами змінної t. Застосуємо до рівняння (2.4) перетворення Лапласа за цією змінною. Нехай

$$U(p,x) = \int_0^{+\infty} u(x,t)e^{-pt}dt.$$

Тоді отримуємо:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \div \int_0^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial x} e^{-pt} dt = \frac{dU}{dx}, \; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \div \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{-pt} dt = \frac{d^2 U}{dx^2}.$$

За теоремою про диференціювання оригіналу з урахуванням початкових умов маємо:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \div pU - u(x,0) = pU - \varphi(x),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \div p^2 U - pu(x,0) - \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = p^2 U - p\varphi(x) - \psi(x).$$

Будемо вважати, що $f(t)$ є функцією-оригіналом і при цьому $f(t) \div F(p)$. Тоді з крайових умов отримуємо:

$$U\big|_{x=0} = F(p), \; \left(\alpha \frac{dU}{dx} + \beta(pU - \varphi)\right)\Big|_{x=l} = \gamma U\big|_{x=l}. \tag{2.5}$$

Застосування операційного методу дозволяє звести розв'язання нестаціонарної задачі для рівняння (2.4) з частинними похідними до розв'язання звичайного диференціального рівняння

$$a\frac{d^2U}{dx^2} + b\frac{dU}{dx} + AU + B = 0, \tag{2.6}$$

де $A = c + a_1 p^2 + b_1 p$, $B = -a_1 p\varphi - a_1\psi - b_1\varphi$, при крайових умовах (2.5).

Розглянемо приклади дослідження найпростіших нестаціонарних фізичних процесів за допомогою перетворення Лапласа [9] .

Нехай температура $u(x,t)$ у тонкому стержні задовольняє рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ a^2 = \text{const}.$$

Потрібно знайти розподіл температур у півпросторі $x > 0$, якщо є відомим закон зміни температури його лівого кінця, а початкова температура стержня дорівнює нулю: $u\big|_{t=0} = 0$, $u\big|_{x=0} = f(t)$.

Застосуємо до заданого рівняння перетворення Лапласа за змінною t. Отримаємо звичайне диференціальне рівняння відносно зображення $U(x, p)$: $pU = a^2 \frac{d^2 U}{dx^2}$. Знайдемо його розв'язок з урахуванням умови $U\big|_{x=0} = F(p)$.

Загальний розв'язок отриманого лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами має вигляд:

$$U = C_1 e^{-\frac{\sqrt{p}x}{a}} + C_2 e^{\frac{\sqrt{p}x}{a}}.$$

Згідно з умовою задачі функції u та U повинні бути обмеженими при $x \to +\infty$, тому $C_2 = 0$, а загальний розв'язок U отриманого рівняння набуває вигляду: $U(x, p) = C_1 e^{-\frac{\sqrt{p}x}{a}}$.

Для знаходження сталої C_1 використаємо умову $U\big|_{x=0} = F(p)$. Звідси знаходимо, що $C_1 = F(p)$. Отже, зображення розв'язку вихідного рівняння має вигляд:

$$U(x, p) = F(p) e^{-\frac{\sqrt{p}x}{a}}.$$

Для знаходження оригіналу розв'язку розглянемо спочатку окремий випадок $f(t) = 1$. Тоді $F(p) = \frac{1}{p}$, $U_1(x, p) = \frac{e^{-\frac{\sqrt{p}x}{a}}}{p}$.

Оригіналом цієї функції є функція

$$u_1(x,t) = \mathrm{Erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\tau^2}\,d\tau .$$

Для довільної $f(t) \div F(p)$ використаємо формулу (2.3). Оскільки для нашого випадку у цій формулі

$$x_1 = \mathrm{Erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right), \quad x_1'(t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}t^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}, \quad x_1(0) = 0,$$

то, підставивши ці вирази у (2.3), отримуємо розв'язок задачі у вигляді:

$$u(x,t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}\,d\tau .$$

Розглянемо приклад застосування перетворення Лапласа до дослідження нестаціонарного коливального процесу [8].

Нехай один кінець стержня, довжина якого дорівнює l, закріплений, на інший кінець діє сила $f(t) = A\sin\omega t$, спрямована вздовж осі стержня. Потрібно визначити переміщення точок стержня $u(x,t)$ при його повздовжніх коливаннях.

Математичною моделлю даної задачі є гіперболічне рівняння відносно шуканої функції $u(x,t)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

де a – коефіцієнт, що залежить від матеріалу стержня.

Для цього рівняння маємо початкові умови:

$$u(x,0) = \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0.$$

Крайові умови для функції $u(x,t)$ мають вигляд:

$$u(0,t) = 0,\ \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = \frac{A}{E}\sin\omega t,$$

де E – модуль пружності стержня.

Застосуємо до диференціального рівняння, що описує коливання стержня, перетворення Лапласа. Нехай $u(x,t) \div U(x,p)$. Тоді

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \div p^2 U(x,p) - pu(x,0) - \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = p^2 U(x,p),$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \div \frac{d^2 U(x,p)}{d\,x^2}.$$

Отримуємо звичайне диференціальне рівняння відносно зображення $U(x,p)$:

$$\frac{d^2 U(x,p)}{dx^2} = \frac{p^2}{a^2} U(x,p),$$

крайові умови для якого мають вигляд:

$$U\left(0,p\right)=0,\quad \frac{dU\left(l,p\right)}{dx}=\frac{A}{E}\cdot\frac{\omega}{p^2+\omega^2}.$$

Інтегруючи це однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами, отримуємо:

$$U\left(x,p\right)=C_1\text{ch}\frac{px}{a}+C_2\text{sh}\frac{px}{a}.$$

Використовуючи крайові умови, знаходимо значення сталих інтегрування C_1 та C_2:

$$U\left(0,p\right)=C_1=0,\quad \frac{dU\left(l,p\right)}{dx}=\frac{p}{a}C_2\text{ch}\frac{pl}{a}=\frac{A}{E}\cdot\frac{\omega}{p^2+\omega^2},$$
$$C_2=\frac{Aa\omega}{E}\cdot\frac{1}{p\left(p^2+\omega^2\right)\text{ch}\frac{pl}{a}}.$$

Таким чином, отримали зображення шуканого розв’язку $u\left(x,t\right)$ у вигляді:

$$U\left(x,p\right)=\frac{Aa\omega}{E}\cdot\frac{\text{sh}\frac{px}{a}}{p\left(p^2+\omega^2\right)\text{ch}\frac{pl}{a}}.$$

Позначимо $A_1\left(p\right)=\text{sh}\frac{p}{a}x$, $A_2\left(p\right)=p\left(p^2+\omega^2\right)\text{ch}\frac{p}{a}l$. Тоді зображення $U\left(x,p\right)$ набуває вигляду:

$$U(x,p)=\frac{Aa\omega}{E}\cdot\frac{A_1(p)}{A_2(p)}.$$

Знайдемо особливі точки для $U(x,p)$. Для цього розв'яжемо рівняння $A_2(p)=0$ або $p\left(p^2+\omega^2\right)\operatorname{ch}\frac{p}{a}l=0$. Звідси $p=0$, $p=\pm i\omega$, $\operatorname{ch}\frac{pl}{a}=0$. Враховуючи, що $\operatorname{ch}\frac{pl}{a}=\cos\frac{ipl}{a}$, маємо:

$$\cos i\frac{pl}{a}=0\Rightarrow i\frac{pl}{a}=\frac{\pi}{2}+k\pi,\quad k\in Z,\quad \Rightarrow p_k=i\omega_k,$$

де $\omega_k=\frac{\pi a}{l}\left(k-\frac{1}{2}\right)$.

Функція $U(x,p)$ має прості полюси $p=0$, $p=\pm i\omega$, $p_k=i\omega_k$ (далі вважатимемо, що $\omega\neq\omega_k$. Оригінал $u(x,t)$ для знайденого зображення $U(x,p)$ знаходимо за другою теоремою розвинення:

$$u(x,t)=\frac{Aa\omega}{E}\left[\left.\left(\frac{A_1(p)}{A_2'(p)}e^{pt}\right)\right|_{p=0}+2\operatorname{Re}\left(\frac{A_1(i\omega)}{A_2'(i\omega)}e^{i\omega}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_1(i\omega_k)}{A_2'(i\omega_k)}e^{i\omega_k t}\right)\right].$$

Оскільки

$$A_2'(p)=\left(p^2+\omega^2\right)\operatorname{ch}\frac{lp}{a}+2p^2\operatorname{ch}\frac{lp}{a}+\frac{l}{a}p\left(p^2+\omega^2\right)\operatorname{sh}\frac{lp}{a},$$

то, підставляючи у вираз для $u(x,t)$ значення функцій $A_1(p)$ та $A_2'(p)$, отримуємо:

$$u(x,t) = \frac{Aa\omega}{E} \cdot 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{i\sin\frac{\omega x}{a}}{-2\omega^2\cos\frac{\omega l}{a}} e^{i\omega t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i\sin\frac{\omega_k}{a} x e^{i\omega_k t}}{\frac{l}{a} i\omega_k \left(\omega^2 - \omega_k{}^2\right) i\sin\frac{l}{a}\omega_k} \right].$$

Знайшовши дійсну частину виразу у дужках, остаточно отримуємо шуканий розв'язок даної задачі у вигляді:

$$u(x,t) = \frac{Aa\omega}{E}\left[\frac{\sin\frac{\omega x}{a}\sin\omega t^{\,i\omega t}}{\omega^2\cos\frac{\omega l}{a}} + \frac{2a}{l}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{\sin\frac{\omega_k}{a} x \sin\omega_k t}{\omega_k\left(\omega^2 - \omega_k{}^2\right)} \right].$$

Розглянуті приклади свідчать про широкі можливості для застосування інтегрального перетворення Лапласа для дослідження різноманітних нестаціонарних процесів. Це обумовлено тим, що використання перетворення Лапласа дозволяє зменшити кількість незалежних змінних, похідні за якими входять до складу диференціального рівняння, що є моделлю процесу.

3 ЗАСТОСУВАННЯ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА ДО АНАЛІЗУ КОЛИВАЛЬНИХ ПРОЦЕСІВ

3.1 Задача про коливання напівнескінченної струни

Визначимо переміщення точок однорідної струни у коливальному процесі. Вони задовольняють нестаціонарному хвильовому рівнянню

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}. \tag{3.1}$$

У рівнянні (3.1) $u(t, x)$ – відхилення струни від положення рівноваги в точці x в момент часу t, $a > 0$ – стала.

Розглянемо випадок коливань напівнескінченної струни $(0 < x < \infty)$, її лівий кінець $x = 0$ є вільним і у початковий момент часу струна знаходиться в стані спокою, тобто початкове переміщення та початкова швидкість точок струни дорівнюють нулю:

$$u\big|_{t=0} \equiv 0, \quad u_t\big|_{t=0} \equiv 0. \tag{3.2}$$

У деякий момент часу $T > 0$ по кінцю $x = 0$ струни здійснюється миттєвий удар, тобто маємо крайову умову

$$u_x(t, 0) = V\delta(t - T), \tag{3.3}$$

Тут під δ розуміємо δ-функцію Дірака, що використовується для моделювання миттєво прикладених навантажень, $V \neq 0$ є константою.

Отримуємо змішану задачу для диференціального рівняння коливань струни (3.1) з початковими умовами (3.2) та крайовими умовами (3.3), що розв’язується у області $0 < x < \infty$, $0 < t < \infty$. Обидві змінні у задачі змінюються у межах від нуля до нескінченності, тобто понизити її розмірність можна, застосувавши перетворення Лапласа за будь-якою зі змінних. Використаємо перетворення Лапласа за змінною часу

$$v(p, x) = \int_0^\infty u(t, x) e^{-pt} dt . \tag{3.4}$$

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t} \div p \cdot v(p,x) - u(0,x) = p \cdot v(p,x),$$

$$u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \div p^2 \cdot v(p,x) - p \cdot u(0,x) - u_t(0,x) = p^2 \cdot v(p,x),$$

оскільки $u(0,x) = u_t(0,x) = 0$ з початкових умов (3.2).

Зображення другої похідної за просторовою координатою має вигляд

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} \div \frac{d^2 v}{dx^2}$$

згідно з теоремою про диференціювання за параметром. Таким чином, отримуємо зображення рівняння (3.1). Це звичайне диференціальне рівняння для функції v. Воно має вигляд:

$$v''_{xx} - \frac{p^2}{a^2} v = 0, \quad 0 < x < \infty. \tag{3.5}$$

Крайова умова для цього рівняння має вигляд:

$$v'_x\big|_{x=0} = Ve^{-pT} . \tag{3.6}$$

При запису умови (3.6) ми використали те, що зображенням δ-функції є одинична функція Хевісайда (одиниця у операційному численні), крім того, ми використали теорему запізнення. Для отримання однозначного розв'язку диференціального рівняння другого порядку нам потрібно дві крайові умови. Крім крайової умови (3.6) використаємо ще крайову умову для зображення у нескінченно віддаленій точці $\operatorname{Re} p \to +\infty$:

$$v(p, x) \to 0,\ \operatorname{Re} p \to +\infty. \tag{3.7}$$

Ця умова виконується для будь-якої функції, що є зображенням при перетворенні Лапласа [7].

Рівняння (3.5) є звичайним диференціальним рівнянням зі сталими коефіцієнтами. Його характеристичне рівняння $k^2 - \dfrac{p^2}{a^2}$ має корені $k_{1,2} = \pm \dfrac{p}{a}$, тому $v(p,x) = C_1 e^{\frac{-px}{a}} + C_2 e^{\frac{px}{a}}$.

Для визначення сталих інтегрування C_1 та C_2 використаємо крайові умови. З умови (3.7) випливає, що $C_2 = 0$, тобто $v(p,x) = C_1 e^{\frac{-px}{a}}$.

Застосуємо для визначення C_1 крайову умову (3.6):

$$v_x = -\frac{p}{a} C_1 e^{\frac{-px}{a}}, \quad v_x(p,0) = \frac{-pC_1}{a} = Ve^{-pT}, \quad C_1 = -\frac{aVe^{-pt}}{p}.$$

Тоді зображення розв'язку задачі має вигляд:

$$v(p, x) = -\frac{aV}{p} e^{-\frac{p}{a}x - pT}.$$

Для знаходження оригіналу використаємо формулу обернення перетворення Лапласа (теорему Рімана–Мелліна). Згідно з нею оригінал розв’язку отримуємо у вигляді співвідношення

$$u(t,x) = -\frac{aV}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{1}{p}e^{p\left(t-T-\frac{x}{a}\right)}dp,$$

де $c > 0$.

Для знаходження оригіналу $u(t,x)$ можна використати також теорему запізнення. З цієї теореми знаходимо:

$$u(t,x) \equiv 0, \quad t < T + \frac{x}{a}, \quad u(t,x) = -aV, \quad t > T + \frac{x}{a}. \qquad (3.8)$$

Останню рівність запишемо з використанням функції Хевісайда:

$$u(t,x) = -aV\theta\left(t - T - \frac{x}{a}\right),$$

Тут θ – функція Хевісайда.

Таким чином, по струні після удару розповсюджується плоска хвиля у вигляді прямокутної сходинки висоти $a|V|$, при цьому швидкість її розповсюдження дорівнює a.

Коливання струни за наявності тертя моделюється з допомогою диференціального рівняння другого порядку, що містить дисипативну складову αu_t. Воно має вигляд:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + \alpha u_t, \qquad (3.9)$$

де $a>0$, $\alpha>0$ – сталі.

Початкові та крайові умови у цьому випадку також матимуть вигляд (3.2), (3.3). Для зображення по Лапласу $v(p,x)$ функції u, що описує коливання точок струни, отримаємо рівняння

$$v''_{xx}-\frac{p^2+\alpha p}{a^2}v=0 \tag{3.10}$$

і крайові умови (3.6), (3.7).

Розв'язуючи отриману крайову задачу для звичайного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами, знаходимо зображення:

$$v=-\frac{aV}{\sqrt{p^2+\alpha p}}e^{-\frac{1}{a}\sqrt{p^2+\alpha p}\cdot x-pT}.$$

Оригінал знаходимо, використавши формулу обернення:

$$u(t,x)=-\frac{aV}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{e^{p(t-T)-\frac{x}{a}\sqrt{p^2+\alpha p}}}{\sqrt{p^2+\alpha p}}dp. \tag{3.11}$$

Знайдемо особливі точки підінтегральної функції. Функція $\sqrt{p^2+\alpha p}$ має дві точки розгалуження: $p=0$, $p=-\alpha$. Її регулярна гілка в правій півплощині $\operatorname{Re}p>0$ обрана так, що $\sqrt{p^2+\alpha p}>0$ при дійсних $p>0$ з тим, щоб функція $v(p,x)$ задовольняла умові (3.7). Запишемо показник експоненти при $p\to\infty$ в (3.11) і використовуючи формулу Тейлора, одержимо:

$$p(t-T)-\frac{px}{a}\left(1+\frac{2}{p}\right)^{\frac{1}{2}}=p\left(t-T-\frac{x}{a}\left(1+\frac{1}{2}\frac{\alpha}{p}+o\left(\frac{\alpha}{p}\right)\right)\right)=p\left(t-T-\frac{x}{a}\right)-\frac{x\alpha}{2a}+o(1).$$

Тому далі замість (3.11) будемо розглядати $u(t,x)$ у вигляді:

$$u(t,x) = -\frac{aV}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{p\left(t-T-\frac{x}{a}\right)-\frac{x\alpha}{2a}}}{\sqrt{p^2+\alpha p}}.$$

Підінтегральна функція у формулі (3.11) не має полюсів у правій півплощині $\operatorname{Re} p > 0$, і за лемою Жордана $u(t, x) \equiv 0$ при $t - T - \dfrac{x}{a} < 0$.

При $t - T - \dfrac{x}{a} > 0$ інтеграл (3.11) не виражається через елементарні функції, і ми скористаємося відомою формулою операційного числення

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{-\tau\sqrt{p^2-b^2}+tp}}{\sqrt{p^2-b^2}}dp \div I_0\left(b\sqrt{t^2-\tau^2}\right)\theta(t-\tau),$$

де I_0 – функція Бесселя уявного аргументу.

Інтеграл (3.11) приводиться до такого вигляду за допомогою заміни $p = \tilde{p} - \dfrac{\alpha}{2}$, так що $b = \dfrac{\alpha}{2}$, $\tau = \dfrac{x}{a}$, і остаточно отримуємо:

$$u(t, x) = -aVe^{-\frac{\alpha}{2}(t-T)} I_0\left(\frac{\alpha}{2}\sqrt{(t-T)^2 - \frac{x^2}{a^2}}\right)\theta\left(t - T - \frac{x}{a}\right). \qquad (3.12)$$

При $\alpha = 0$ ця формула набуває вигляду (3.8). Розв'язок (3.12) також описує хвилю, передній фронт якої – точка $x = a(t-T)$ – рухається вправо зі швидкістю a [8].

Фіксуємо точку x $(x > 0)$ і досліджуємо поведінку $u(t, x)$ при $t \to +\infty$. Використовуючи асимптотику

$$I_0 \sim \frac{e^{-x}}{\sqrt{2\pi x}}, \quad x \to +\infty,$$

отримуємо з (3.12) $u(t, x) \sim -\frac{aV}{\sqrt{\alpha \pi t}}$ $(t \to +\infty)$, так що коливання у фіксованій точці з часом затухають на відміну від (3.8). Це явище обумовлене наявністю тертя.

3.2 Коливання скінченної струни без тертя

Нехай струна скінченна $(0 < x < l)$, її лівий кінець $x = 0$ вільний, а правий кінець $x = l$ закріплений, так що

$$u(0, l) = 0. \tag{3.13}$$

Як і в пункті 3.1, розглянемо задачу при нульових початкових умовах Коші і умові, що при $t = T > 0$ відбувається миттєвий удар. Тоді $u(t, x)$ задовольняє рівнянню (3.1), даним Коші (3.2), та крайовим умовам (3.3), (3.13). Переходячи до перетворення Лапласа (3.4), для функції v отримаємо рівняння (3.5) і крайові умови

$$v'_x\big|_{x=0} = Ve^{-pT}, \quad v\big|_{x=l} = 0. \tag{3.14}$$

Звідси знаходимо

$$v(p, x) = \frac{aVe^{-pT}}{p \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{pl}{a}\right)} \operatorname{sh}\left[\frac{p}{a}(x - l)\right] \tag{3.15}$$

і за формулою обернення отримуємо

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} v(p, x)\, dp,$$

де $c > 0$.

Обчислимо цей інтеграл за допомогою теорії лишків. Особливі точки підінтегральної функції збігаються з нулями функції $\mathrm{ch}\,\dfrac{pl}{a}$ ($p = 0$ – не особлива точка). Отже, підінтегральна функція має полюси в точках $p = p_n$,

$$p_n = \frac{ia\pi}{l}\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0,\ \pm 1,\ \dots .$$

Всі ці полюси прості і розташовуються на уявній осі, причому

$$\underset{p=p_n}{res}\left(e^{pt} v(p, x)\right) = \frac{aVe^{p_n(t-T)} sh\left(\dfrac{p_n}{a}(x-l)\right)}{p_n \left(ch\,\dfrac{pl}{a}\right)'\Bigg|_{p=p_n}} =$$

$$= \frac{2taV(-1)^{n+1}}{\pi(2n+1)} e^{i\frac{\pi\alpha}{l}\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-T)} \varphi_n(x), \qquad (3.16)$$

де

$$\varphi_n(x) = \sin\left[\frac{\pi}{l}\left(n + \frac{1}{2}\right)(x - l)\right]. \qquad (3.17)$$

Покажемо, що

$$u(t,x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\underset{p=p_n}{res}\left(e^{pt}v(p,x)\right) \tag{3.18}$$

при $t>T+\dfrac{l}{a}$. Оскільки a – швидкість поширення збурень, то за такий час збурення встигне досягти правого кінця і відбитися від нього. Якщо ж $t<T+\dfrac{l}{a}$, розв'язок має вигляд (3.8).

Розглянемо інтеграл

$$J_N=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_N}e^{pt}v(p,x)dp\,, \tag{3.19}$$

де Γ_N – прямокутник з вершинами в точках $c\pm iy_N$, $\pm iy_N-y_N$, $y_N=\dfrac{\pi aN}{l}$.

Інтеграл J_N дорівнює сумі лишків по полюсах підінтегральної функції, які лежать всередині контуру Γ_N. Інтеграл по відрізку $\left[c-iy_N,c+iy_N\right]$ при $N\to\infty$ збігається до $u(t,x)$. Покажемо, що інтеграл по контуру $\tilde{\Gamma}_N$, який складається з інших трьох відрізків, збігається до нуля при $N\to\infty$. Маємо

$$ch\frac{pl}{a}=\frac{1}{2}e^{-\frac{pl}{a}}\varphi(p),\quad \varphi(p)=1+e^{\frac{2pl}{a}}.$$

Покажемо, що $\left|\varphi(p)\right|\geq A>0$ при $p\in\tilde{\Gamma}_N$, де стала A не залежить від N. На відрізку $\left[-y_N+iy_N,c+iy_N\right]$, маємо:

$$\left|\varphi(p)\right|=1+e^{\frac{2l}{a}y},\quad -y_N\leq y\leq C,$$

тому $\left|\varphi(p)\right| \geq 1$. Така ж оцінка має місце на відрізку $\left[-y_N - iy_N, c - iy_N\right]$, а на відрізку, що залишився функція $e^{\frac{2l}{a}p}$ експоненціально спадає при $N \to \infty$. Отже, підінтегральна функція з (3.15) дорівнює

$$\frac{aV}{2\varphi(p)p}\left[e^{p\left(t-T+\frac{l}{a}+\frac{x-l}{a}\right)} - e^{p\left(t-T+\frac{l}{a}+\frac{x-l}{a}\right)}\right].$$

Перший співмножник має порядок $O\left(\frac{1}{p}\right)$ на контурах $\tilde{\Gamma}_N$ при $N \to \infty$, а показники експонент строго додатні, так як $t > T + \frac{l}{a}$, $0 \leq x \leq l$. За лемою Жордана інтеграл по контуру $\tilde{\Gamma}_N$ збігається до нуля при $N \to \infty$.

З (3.8), (3.6) знаходимо

$$u(t, x) = -\frac{2iaV}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n e^{\frac{i\pi a}{l}\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-T)}\frac{\varphi_n(x)}{2n+1}.$$

Об'єднуючи попарно доданки з номерами n, $-n-1$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ і враховуючи, що $\varphi_{-n-1}(x) = -\varphi_n(x)$, остаточно отримуємо:

$$u(t, x) = \frac{4Va}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\sin\left(\omega_n(t-T)\right)\sin\left(\frac{\omega_n}{a}(x-l)\right), \tag{3.20}$$

де

$$\omega_n = \frac{\pi a}{l}\left(n + \frac{1}{2}\right). \tag{3.21}$$

Кожний доданок в цій сумі – це власне коливання струни, у якої кінець $x=0$ вільний, а кінець $x=l$ закріплений. Власні частоти цих коливань дорівнюють ω_n [9].

З (3.20) випливає, що поштовх збуджує всі власні коливання струни. Їх амплітуди спадають $\frac{1}{n}$ із зростанням частоти, але енергія E_n кожного з власних коливань приблизно однакова. Дійсно, нехай ρ – щільність маси струни, T – натяг, $a^2=\frac{T}{\rho}$. Тоді енергія E_n власного коливання з номером n дорівнює:

$$E_n=\frac{1}{2}\int_0^1\left[\rho\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^2+T\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2\right]dx=$$

$$=\frac{2a^2V^2}{l}\left[\rho a^2\cos^2\left(\omega_n\left(t-T\right)\right)+T\sin^2\left(\omega_n\left(t-T\right)\right)\right]. \qquad (3.22)$$

Розглянемо результат впливу на струну серії з N періодичних поштовхів. Нехай вони мають однакову величину і відбуваються в моменти часу $T, 2T, \ldots, NT$. Це означає, що крайова умова (3.3) замінюється умовою

$$\frac{\partial u_N}{\partial x}\left(t,0\right)=V\sum_{m=1}^{N}\delta\left(x-mT\right).$$

Очевидно, що при $t>NT+\frac{l}{a}$

$$u_N\left(t,x\right)=\sum_{m=1}^{N}u_1\left(t-\left(m-1\right)T,x\right),$$

де $u_1\left(t,x\right)$ – розв’язок, що має вигляд (3.20). Маємо

$$\sum_{m=1}^{N}\sin\left(\omega\left(t-mT\right)\right)=\frac{\sin\left(\frac{\omega_n NT}{2}\right)\sin\left(\omega_n\left(t-\frac{\left(N+1\right)}{2}\right)T\right)}{\sin\left(\frac{\omega_n T}{2}\right)}.$$

Остаточно отримуємо:

$$u_N\left(t,x\right)=\frac{4aV}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n\sin\left(\frac{\omega_n NT}{2}\right)}{\left(2n+1\right)\sin\left(\frac{\omega_n T}{2}\right)}\cdot\sin\left(\omega_n\left(t-\frac{N+1}{2}\right)T\right)\times$$

$$\times\sin\left(\frac{\omega_n}{a}\left(x-l\right)\right). \tag{3.23}$$

Амплітуда n-го коливання A_n дорівнює

$$A_n=\frac{4aV\left(-1\right)^n\sin\left(\frac{\omega_n NT}{2}\right)}{\pi\left(2n+1\right)\sin\left(\frac{\omega_n T}{2}\right)}. \tag{3.24}$$

Розглянемо резонансний випадок: період поштовхів T співпадає з однією з власних частот, тобто $T=\frac{2\pi}{\omega_n}$. Тоді з (3.24) отримуємо:

$$A_n=\frac{4aVN\left(-1\right)^n}{\pi\left(2n+1\right)}, \tag{3.25}$$

так що $\left|A_n\right|$ необмежено зростає зі зростанням N.

Розглянемо, коли T співпадає з періодом першого власного коливання, тобто

$$u(t,x)=\frac{4aVN}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\sin(\omega_n T)\sin\left(\frac{\omega_n}{a}(x-l)\right), \tag{3.26}$$

при цьому

$$u_N(t,x)=Nu_1(t,x). \tag{3.27}$$

Таким чином, коливання $u_1(t,x)$ після наступних $(N-1)$-го поштовху з періодом, що має вигляд (3.24) посилюється в N разів [10].

3.3 Коливання скінченної струни за наявності тертя

У цьому випадку функція $u(t,x)$ задовольняє рівнянню (3.9), а початкові умови і крайові умови залишаються такими ж, що і в пункті. 3.2. Переходячи до перетворення Лапласа, отримуємо для функції v рівняння (3.10) і крайові умови (3.14). Розв'язавши цю задачу, отримаємо

$$v(p,x)=\frac{aVe^{-pT}sh\left(\frac{x-l}{a}\sqrt{p^2+\alpha p}\right)}{\sqrt{P^2+\alpha p}\cdot ch\left(\frac{l}{a}\sqrt{p^2+\alpha p}\right)}. \tag{3.28}$$

Зауважимо, що v – однозначна функція аргументу p, функції $ch\sqrt{z}$, $sh\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$ – однозначні функції змінної z. Особливі точки функції v – це корені рівняння $ch\left(\frac{l}{a}\sqrt{p^2+\alpha p}\right)=0$, які дорівнюють

$$p_n^{\pm} = -\frac{\alpha}{2} \pm \frac{i\sqrt{D_n}}{2}, \quad D_n = \frac{\pi^2 a^2}{l^2}(2n+1)^2 - \alpha^2. \tag{3.29}$$

Усі вони – прості полюси і розташовані на прямій $\operatorname{Re} p = -\frac{\alpha}{2}$, за винятком, можливо, їх скінченного числа, оскільки $D_n > 0$ при більших n. Якщо $\alpha > \frac{\pi a(2n+1)}{l}$ при деякому n, то корені $p_n^{\pm}$ дійсні і від'ємні.

Як і в попередньому випадку, інтеграл $u(t, x)$ дорівнює сумі лишків по всім полюсам підінтегральної функції. При обчисленні лишків слід врахувати, що вибір значення $\sqrt{p^2 + \alpha p}$ є довільним – важливо лише, щоб це значення було одним і тим же у всіх виразах. Обчислюючи інтеграл

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{pt} V(p, x)\, dp,$$

отримуємо

$$u(t, x) = \frac{2ia^2 V}{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(e^{p_n^-(t-T)} - e^{p_n^+(t-T)} \right) \frac{(-1)^n \varphi_n(x)}{\sqrt{D_n}},$$

де $\varphi_n(x)$ – функції, що визначаються рівністю (3.17).

Перетворимо цей вираз. Маємо

$$e^{p_n^-(t-T)} - e^{p_n^+(t-T)} = -2ie^{-\frac{\alpha}{2}(t-T)} \sin\left(\frac{\sqrt{D_n}}{2}(t-T) \right).$$

Об'єднуючи потім доданки з номерами n, $-n-1$, знаходимо:

$$u(t,x)=\frac{4a^2V}{l}e^{-\frac{\alpha}{2}(t-T)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{D_n}}\sin\left(\frac{\sqrt{D_n}}{2}(t-T)\right)\times$$

$$\times\sin\left(\frac{\pi}{l}\left(n+\frac{1}{2}\right)(x-l)\right). \qquad (3.30)$$

При $\alpha=0$ цей вираз співпадає з (3.20). З (3.30). З нього випливає, що тертя змінює власні частоти коливань струни: в даному випадку

$$\omega_n=\sqrt{\frac{\pi^2a^2}{l^2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{\alpha^2}{4}}. \qquad (3.31)$$

Нехай $\alpha<\dfrac{\pi a}{l}$ для визначеності, тоді $\sqrt{D_n}>0$ при всіх n. Розв'язок $u(t,x)=O\left(e^{-\frac{\alpha}{2}t}\right)$ при $t\to+\infty$, тобто експоненціально спадає, що обумовлено наявністю тертя. Розглянемо результат впливу на струну N однакових поштовхів, які здійснюють в моменти часу $T, 2T, \dots, NT$. Підсумовуючи ці коливання, при $t>NT+\dfrac{l}{a}$ отримуємо

$$u_N(t,x)=\frac{4a^2V}{l}e^{-\frac{\alpha}{2}t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\varphi_n(x)}{\sqrt{D_n}}\times$$

$$\times\left[\sin\left(\frac{\sqrt{D_n}}{2}t\right)-e^{\frac{\alpha}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{D_n}}{2}(t+T)\right)-e^{-\frac{\alpha}{2}(N+1)T}\times\right.$$

$$\left.\times\sin\left(\frac{\sqrt{D_n}}{2}(t-(N+1)T)\right)+e^{-\frac{\alpha}{2}(N+1)T}\sin\left(\frac{\sqrt{D_n}}{2}(t-NT)\right)\right]\times$$

$$\times\left[1-2e^{-\frac{\alpha}{2}T}\cos\left(\frac{\sqrt{D_n}}{2}T\right)+e^{-\alpha T}\right]^{-1}. \qquad (3.32)$$

Нехай число поштовхів велике, тобто можна вважати, що $N \to \infty$. Тоді величина $e^{-\frac{\alpha}{2}NT}$ є нескінченно малою, і суму (3.32) можна наближено замінити виразом

$$u_N(t, x) \approx \frac{4a^2V}{l} e^{-\frac{\alpha}{2}(t-T)} \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{D_n}} \varphi_n(x) \cdot \frac{e^{-\frac{\alpha}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{D_n}}{2}\tau\right) - \sin\left(\frac{\sqrt{D_n}}{2}(\tau - T)\right)}{1 - 2e^{-\frac{\alpha}{2}T}\cos\left(\frac{\sqrt{D_n}}{2}T\right) + e^{-\alpha T}}, \qquad (3.33)$$

де використаємо позначення:

$$t = NT + \tau, \quad \tau > \frac{l}{2}. \qquad (3.34)$$

Розглянемо випадок, коли період поштовхів співпадає з періодом першого власного коливання струни, тобто $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{4\pi}{\sqrt{D_0}}$. Тоді співвідношення (3.33) матиме вигляд

$$u_N(t, x) \approx \frac{4a^2V}{l} e^{-\frac{\alpha}{2}(\tau-T)} \left[-\frac{\varphi_0(x)}{\sqrt{D_0}} \frac{\sin\left(\frac{\sqrt{D_0}}{2}\tau\right) e^{\frac{\alpha}{2}T}}{\left(1 - e^{-\frac{\alpha}{2}T}\right)} + + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{D_n}} \varphi_n(x) \times \right.$$

$$\left. \times \frac{e^{\frac{\alpha}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{D_n}}{2}T\right) - \sin\left(\frac{\sqrt{D_n}}{2}(\tau - T)\right)}{1 - 2e^{-\frac{\alpha}{2}T}\cos\left(\frac{\sqrt{D_n}}{2}T\right) + e^{-\alpha T}} \right]. \qquad (3.35)$$

У цьому випадку резонанс проявляється значно слабкіше, оскільки при наявності тертя власні частоти ω_n не є цілими кратними найменшої частоти ω_1.

Таким чином, використання операційного методу дозволяє знаходити розв'язки крайових задач для диференціальних рівнянь гіперболічного типу, зокрема, рівняння коливань струни у нескінченній та скінченній області.

ВИСНОВКИ

У даному магістерському дослідженні розв'язана задача про коливання струни під дією миттєвих поштовхів за допомогою інтегрального перетворення Лапласа. При цьому розглянуті коливання напівнескінченної струни під дією миттєвих поштовхів, а також аналогічні коливання скінченної струни для випадків наявності та відсутності тертя.

Перший розділ кваліфікаційної роботи магістра містить основні теоретичні відомості щодо перетворення Лапласа, необхідні для розв'язання поставленої задачі. Зокрема, тут розглянуто поняття інтегрального перетворення Лапласа, умови, яким повинна задовольняти функції, щоб для неї було можливим виконання даного перетворення. Висвітлюються також властивості перетворення Лапласа, що використовуються при знаходженні оригіналів та зображень у процесі застосування операційного методу.

Тут описуються також основні методи відтворення оригіналу за даним зображенням, що дають можливість здійснити перехід від зображення до оригіналу при розв'язанні диференціальних рівнянь з частинними похідними. У першу чергу, до таких методів слід віднести застосування теорем розвинення, що випливають з інтегральної формули Рімана-Мелліна для обернення перетворення Лапласа. Розглянуто також умови, що надають можливість застосування таких методів.

У другому розділі розглянуто методику застосування інтегрального перетворення Лапласа до розв'язання диференціальних рівнянь, що використовуються для моделювання нестаціонарних процесів. Зокрема, розглянуто випадок лінійних задач. На прикладах показані можливості застосування операційного методу до дослідження диференціальних моделей нестаціонарних процесів.

Розв'язання задачі про коливання струни під дією миттєвих поштовхів здійснюється у третьому розділі магістерської роботи. З допомогою операційного методу визначаються переміщення точок напівнескінченної струни у коливальному процесі, коли по одному з її кінців здійснюється миттєвий удар. Для моделювання таких коливань у крайову умову вводиться дельта-функція.

Гіперболічне рівняння, що моделює коливальний процес для даного випадку, розв'язується шляхом застосування перетворення Лапласа та зведення його до крайової задачі для звичайного диференціального рівняння. Для знаходження оригіналу отриманого зображення використана теорема запізнення. Отримані розв'язки для випадків вільних коливань напівнескінченної струни та коливань струни за наявності тертя.

Аналогічну задачу розв'язано для скінченної струни для випадків наявності та відсутності тертя. Тут розв'язки отримані у вигляді нескінченних рядів, для знаходження яких використано теореми розвинення, розглянуті у теоретичній частині. Отримано також розв'язання даної задачі, коли на одному кінці струни через однакові проміжки часу здійснюється скінченна кількість миттєвих поштовхів.

Проведене дослідження засвідчило ефективність використання операційного методу для розв'язання крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу, зокрема, для задач, що виникають при аналізі коливальних процесів у скінченних та нескінченних областях.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Волков И. К., Канатников А. Н. Интегральные преобразования и операционное исчисление. Москва : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. 228 с.
2. Волков И. К., Загоруйко Е. А., Фаликова И. Д. Операционное исчисление. Москва : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1993. 197 с.
3. Гребенюк С. М., Тітова О. О., Клименко М. І., Полюга С. І. Операційне числення : навчально-методичний посібник для студентів математичного факультету. Запоріжжя : ЗНУ, 2010. 71 с.
4. Диткин В. А., Прудников А. П. Операционное исчисление. Москва : Высшая школа, 1966. 406 с.
5. Боярчук А. К., Головач Г. П. Справочное пособие по высшей математике. Т. 5. Ч. 3: Дифференциальные уравнения в примерах и задачах. Приближенные методы решения дифференциальных уравнений, устойчивость и фазовые траектории, метод интегральных преобразований Лапласа. Москва : КомКнига, 2006. 256 с.
6. Краснов М. Л., Макаренко Г. И. Операционное исчисление. Устойчивость движения. Задачи и упражнения. Москва : Высшая школа, 2002. 207 с.
7. Лурье А. И. Операционное исчисление и его приложения к задачам механики. Москва : Высшая школа, 1979. 347 с.
8. Мартиненко М. А., Юрик І. І. Теорія функцій комплексної змінної. Операційне числення. Київ : Слово, 2007. 296 с.
9. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Санкт-Петербург : Лань, 2005. 689 с.
10. Мышкис А. Д. Математика для технических вузов. Специальные курсы. Санкт-Перербург : Лань, 2002. 640 с.

11. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в теории упругости. Ленинград : Наука, 1966. 402 с.

12. Чуличков А. И. Математические модели нелинейной динамики. Москва : Физматлит, 2003. 296 с.