

УДК 624.042.42

Нестационарная задача о воздействии подвижной нагрузки на ледяной покров

В. И. Пожув, д-р физ.-мат. наук, проф., Н. П. Полякова, инж. (Запорожский индустриальный институт)

Задачи о колебаниях пластин, лежащих на жидком основании, под действием подвижных нагрузок представляют значительный практический интерес и прежде всего в связи с расчетом ледяного покрова при движении самолетов, автомобилей и других транспортных средств. Данному вопросу посвящено большое число публикаций. Большинство исследований проводилось в стационарной постановке, согласно которой с момента приложения нагрузки прошло достаточно много времени и в системе координат, движущейся вместе с нагрузкой, картина деформирования остается неизменной [1—4]. В нестационарных задачах [5—8] жидкость считалась несжимаемой, а для описания движения ледяного покрова использовались уравнения классической теории пластин Кирхгофа — Лява.

В настоящей статье с использованием интегральных преобразований Фурье по пространственной координате и Лапласа по времени с последующим численным обращением обоих преобразований исследованы переходные процессы, возникающие в начальные моменты движения нагрузки.

1. Движение ледяного покрова при воздействии на него нормальной нагрузки $F(x, t)$ и с учетом реакции со стороны жидкости $q_0(x, t)$ и постоянной растягивающей силы в срединной поверхности N описывается уравнениями с учетом поперечного сдвига и инерции вращения (типа Тимошенко)

$$\begin{aligned} k^2 G_1 h (\partial^2 w / \partial x^2 - \partial \alpha / \partial x) + N \partial^2 w / \partial x^2 + F(x, t) - q_0(x, t) = \rho_1 h \partial^2 w / \partial t^2; \\ (h^3 / 12) [N / h + E_1 / (1 - \nu_1^2)] (\partial^2 \alpha / \partial x^2) + k^2 G_1 h (\partial w / \partial x - \alpha) = (\rho_1 h^3 / 12) (\partial^2 \alpha / \partial t^2), \end{aligned} \quad (1)$$

где h — толщина слоя; $\alpha(x, t)$ — угол поворота поперечного сечения; k^2 — сдвиговой коэффициент Тимошенко; E_1, G_1, ν_1, ρ_1 — модули Юнга и сдвига, коэффициент Пуассона и массовая плотность пластины.

Предполагается, что прикладываемая к пластине нагрузка не зависит от координаты y и вызывает в системе слой — жидкость плоское деформированное состояние. Начало координат выбрано на поверхности раздела между покровом и жидкостью, а ось Oz направлена вертикально вниз.

Колебание идеальной сжимаемой жидкости описывается волновым уравнением

$$\partial^2 \varphi / \partial x^2 + \partial^2 \varphi / \partial z^2 = (1/c_1^2) (\partial^2 \varphi / \partial t^2); \quad c_1^2 = k_2 / \rho, \quad (2)$$

где c_1 — скорость распространения волн в жидкости; k_2, ρ — объемный модуль и массовая плотность жидкости.

Граничные условия для жидкости имеют вид

$$\text{при } z=0 \quad q_0 = \rho \partial \varphi / \partial t, \quad \partial w / \partial t = -\partial \varphi / \partial z. \quad (3)$$

Для жидкости бесконечной глубины кроме (3) должны выполняться условия затухания возмущений на бесконечности, а для жидкости конечной глубины — условия непроницаемости жесткой стенки:

$$\text{при } z=H \quad \partial \varphi / \partial z = 0, \quad (4)$$

где H — толщина слоя жидкости.

Начальные условия задачи принимаются нулевыми, т. е. считается, что при $t=0$ все искомые величины и их первые производные по времени равны нулю.

Перейдем в уравнениях (1) — (4) к безразмерным величинам по формулам

$$\tau = c_s t / h; \quad x_* = x / h; \quad z_* = z / h; \quad \gamma_{21} = k_2 / G_1; \quad \rho_{21} = \rho / \rho_1; \quad c_s = (G_1 / \rho_1)^{1/2}$$

и применим к уравнениям движения и граничным условиям преобразования Фурье по x_* и Лапласа по t . Вместо уравнения (2) в пространстве изображений будем иметь

$$d^2 \varphi^{LF} / dz_*^2 - \lambda \varphi^{LF} = 0; \quad \lambda = \xi^2 + \eta^2; \quad \eta = c_s^2 / c_1^2 = \rho_{21} / \gamma_{21}, \quad (5)$$

где ξ, ρ — соответственно параметры преобразований Фурье и Лапласа.

Решение уравнения (5) имеет вид

$$\varphi^{LF} = C_1 e^{z_* \sqrt{\lambda}} + C_2 e^{-z_* \sqrt{\lambda}}.$$

Для жидкости бесконечной глубины необходимо положить $C_1 = 0$ и, удовлетворяя затем граничным условиям (3), находим зависимость между трансформантами избыточного давления жидкости и прогибами пластины в виде

$$q_0^{LF} = \rho_{21} G_1 p^2 \omega^{LF} / \sqrt{\lambda}. \quad (6)$$

В случае жидкости конечной глубины H эта зависимость запишется в такой форме

$$q_0^{LF} = (\rho_{21} G_1 / \sqrt{\lambda}) [(1 + e^{-2\kappa \sqrt{\lambda}}) p^2 \omega^{LF} / (1 - e^{-2\kappa \sqrt{\lambda}})], \quad \kappa = H / h. \quad (7)$$

2. Уравнения (1) в пространстве изображений принимают вид

$$k^2 (-\xi^2 \omega^{LF} + i \xi \alpha^{LF}) - N^* \xi^2 \omega^{LF} + (1/G_1) (F^{LF} - q_0^{LF}) = p^2 \omega^{LF}; \\ - [N^* + 2/(1 - \nu_1)] \xi^2 \alpha^{LF} - 12k^2 (i \xi \omega^{LF} + \alpha^{LF}) = p^2 \alpha^{LF}, \quad (8)$$

где $N^* = N / h G_1$.

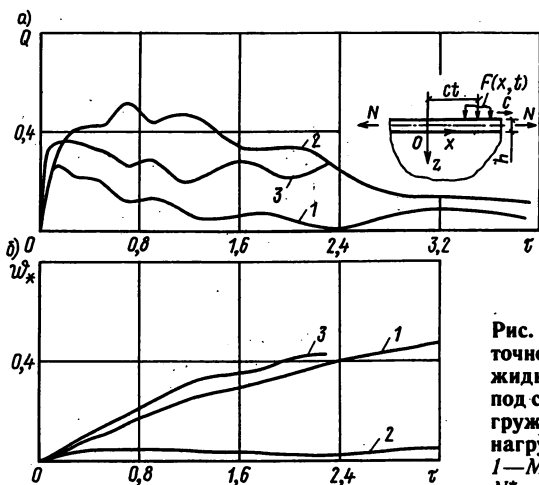


Рис. 1. Изменение во времени τ избыточного давления Q на поверхности жидкости в точке $x=ct$ (а) и в точке под серединой движущегося участка нагружения (б) под перемещающейся нагрузкой вида (11)
 1 — $M_s=0,5$, $N^*=5/6$; 2 — $M_s=0,5$, $N^*=0$

Подставляя в (8) зависимость (6) или (7) и разрешая получающуюся при этом систему уравнений относительно ω^{LF} и α^{LF} , получаем

$$\omega^{LF} = F^{LF}(\xi, p) / G_1 R(\xi, p); \quad \alpha^{LF} = -i(1 - \nu_1) F^{LF}(\xi, p) / G_1 R(\xi, p) S(\xi, p); \quad (9)$$

$$R(\xi, p) = p^2 + k^2 \xi^2 + N^* \xi^2 - [12k^4 \xi^2 (1 - \nu_1)] / [2\xi^2 + (1 - \nu_1)(p^2 + 12k^2 + N^* \xi^2)] + T(\xi, p);$$

$$S(\xi, p) = [2\xi^2 + (1 - \nu_1)(p^2 + 12k^2 + N^* \xi^2)] / 12k^2 \xi;$$

$$T(\xi, p) = \rho_{21} p^2 / \lambda^{1/2} = 1, \text{ если } H = \infty;$$

$$T(\xi, p) = \rho_{21} p^2 [(1 + e^{-2\kappa\sqrt{\lambda}}) / (1 - e^{-2\kappa\sqrt{\lambda}})] / \lambda^{1/2}, \text{ если } H < \infty.$$

После этого легко определяются трансформанты изгибающего момента в слое и давление в жидкости

$$M^{LF} = h^2 \xi F^{LF}(\xi, p) / 6R(\xi, p) S(\xi, p); \quad q^{LF} = \rho_{21} F^{LF}(\xi, p) p^2 e^{-z\sqrt{\lambda}} / R(\xi, p) \lambda^{1/2}. \quad (10)$$

3. Окончательное решение зависит от вида приложенной к ледяному покрову нагрузки и получается путем применения к формулам (9) и (10) обратных преобразований Фурье и Лапласа. В качестве примера рассмотрим случай, когда в начальный момент времени к пластине прикладывается нормальная нагрузка, равномерно распределенная по участку конечной длины $2l$, которая затем движется с постоянной скоростью c в положительном направлении оси Ox . Для такой нагрузки

$$F(x, t) = F_0 h(x, t, l) / 2l; \quad h(x, t, l) = 1, \quad ct - l \leq x \leq ct + l; \quad h(x, t, l) = 0, \quad x < ct - l \vee x > ct + l. \quad (11)$$

Применяя к (11) преобразования Фурье и Лапласа, получаем

$$F^{LF}(\xi, p) = (F_0 / 2i\xi l_* h) [(e^{i\xi l_*} - e^{-i\xi l_*}) / (p - i\xi M_s)]; \quad l_* = l/h; \quad M_s = c/c_f. \quad (12)$$

Подставляя (12) в (9) и (10) и обращая преобразование Фурье, получаем

$$M^* = \frac{M^L(x_*, p)}{hF_0} = \frac{1}{6\pi l_*} \left[p \int_0^\infty \frac{\cos(\xi x_*) \sin(\xi l_*)}{S(\xi, p) R(\xi, p) (p^2 + M_s^2 \xi^2)} d\xi + \right.$$

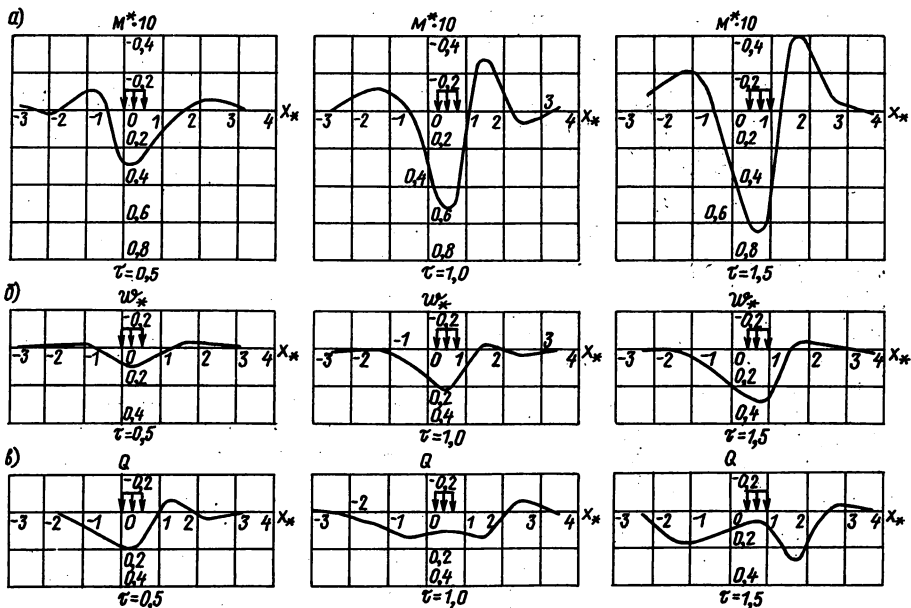


Рис. 2. Картины распределения вдоль слоя изгибающего момента M (а), прогиба w (б) и избыточного давления Q (в)

$$+ M_s \int_0^{\infty} \frac{\xi \sin(\xi x_*) \sin(\xi l_*)}{S(\xi, \rho) R(\xi, \rho) (\rho^2 + M_s^2 \xi^2)} d\xi \quad (13)$$

Аналогичный вид имеют выражения для прогиба пластины $w^* = w^L(x_*, \rho) G_1 h / F_0$ и давления в жидкости $Q = q^L(x_*, z_*, \rho) h / F_0$. Предельным переходом при $l_* \rightarrow 0$ получаются результаты для линейной сосредоточенной нагрузки.

Интегралы в формулах вида (13) для различных значений параметра преобразования Лапласа ρ находились численно по методу Файлона [9]. Оригиналы строились также численно на основании метода обращения преобразования Лапласа с помощью смещенных многочленов Лежандра [10]. Согласно этому методу искомые величины представляются в виде

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) a_k P_k^*(e^{-t}), \quad (14)$$

где $P_k^*(e^{-t})$ — смещенный полином Лежандра;

$$P_k^*(e^{-t}) = \sum_{i=0}^k \alpha_i^{(k)} e^{-it}; \quad a_k = \sum_{i=0}^k \alpha_i^{(k)} F(i+1); \quad \alpha_i^{(k)} = (-1)^{k+i} \binom{k}{i} \frac{(k+i)!}{k! i!}. \quad (15)$$

Чтобы получить искомые величины, надо в формулы (14), (15) вместо $F(i+1)$ подставить соответствующие значения из формул (13).

Расчеты проведены для ледяной пластины, плавающей на воде, при таких значениях безразмерных параметров: $\rho_{21} = 1,052$; $\gamma_{21} = 2,202$; $\nu_1 = 0,33$; $N^* = 5/6$ и $N^* = 0$; $M_s = 0,5$ и $M_s = 1,55$; $l_* = 0,1$; $k^2 = 2/3$.

Как показали расчеты (рис. 1), с ростом времени устанавливается процесс, а прогибы и избыточное давление стремятся к значениям, получаемым при стационарной постановке задачи, так что при $\tau > 4$ процесс можно считать установившимся.

Поскольку скорость движения нагрузки меньше первой критической в соответствующей стационарной задаче, то со временем происходит симметризация относительно середины участка нагружения, причем более быстро для прогибов и изгибающего момента и медленнее для избыточного давления (рис. 2). Исследование влияния глубины жидкости на характер протекания переходного процесса показало, что, как и в соответствующей стационарной задаче [3], при $\kappa > 35$ жидкость можно считать бесконечно глубокой.

Список литературы

1. Александров В. М., Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы механики ледяного покрова // Современные проблемы механики и авиации: Сб. статей.— М., 1982.— С. 11—20.
2. Chopan S. Moving load on a prestressed plate resting on a fluid halfspace.— *Ingenieur Archiv*, 1976, Vol. 45, N 3, p. 171—178.
3. Пожуев В. И. Действие подвижной нагрузки на ледяной покров, плавающий на поверхности жидкости конечной глубины // Строит. механика и расчет сооружений.— 1984.— № 3.— С. 39—42.
4. Пожуев В. И. О возможности использования теории пластин в задачах о действии подвижных нагрузок на ледяной покров, плавающий на поверхности идеальной жидкости // Динамика и прочность машин:— Сб. статей:— Харьков, 1987.— Вып. 46.— С. 49—53.
5. Букатов А. Е., Черкесов Л. В., Ярошенко А. А. Изгибно-гравитационные волны от движущихся возмущений // Прикладная механика и техническая физика.— 1984.— № 2.— С. 151—157.
6. Букатов А. Е., Ярошенко А. А. Развитие трехмерных колебаний упругой равномерно растянутой плавающей пластинки // Динамика системы.— Сб. статей: Киев, 1985.— № 4.— С. 72—74.
7. Ткаченко В. А., Яковлев В. В. Изгибно-гравитационные волны, вызванные перемещением по льду фронта давления // Гидромеханика.— Сб. статей.— Киев, 1983.— № 48.— С. 27—29.
8. Ткаченко В. А., Яковлев В. В. Неустановившиеся изгибно-гравитационные волны в системе жидкость — пластина // Прикладная механика.— 1984.— Т. 20.— № 3.— С. 70—75.
9. Крылов В. И., Шульгина Л. Т. Справочная книга по численному интегрированию.— М.: Наука, 1966.— 370 с.
10. Крылов В. И., Скобля Н. С. Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа.— М.: Наука, 1974.— 224 с.