МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра загальної математики

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА

на тему: **«ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ МАРКОВСЬКИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ ДО ПРОГНОЗУВАННЯ СТАНУ СИСТЕМ»**

Виконав: студент 2 курсу, групи 8.1118-з

спеціальності 111 математика
(шифр і назва спеціальності)

освітньої програми математика
(назва освітньої програми)

П.А. Кравченко
(ініціали та прізвище)

Керівник доцент кафедри фундаментальної математики доцент, к.ф.-м.н., Клименко М.І.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Рецензент доцент кафедри прикладної математики та механіки доцент, к.ф.-м.н., Левчук С.А.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Запоріжжя – 2020

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет математичний

Кафедра загальної математики

Рівень вищої освіти магістр

Спеціальність 111 математика

Освітня програма математика
(шифр і назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри загальної математики, к.ф.-м.н., доцент
______________ Зіновєєв І.В.
(підпис)
“ 30 ” травня 2019 р.

З А В Д А Н Н Я

НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТУ

Кравченко Павлу Анатолійовичу
(прізвище, ім’я та по батькові)

1. Тема роботи Застосування теорії марковських випадкових процесів до прогнозування стану систем

керівник роботи Клименко Михайло Іванович, доцент к.ф.-м.н.
(прізвище, ім’я та по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від « 29 » травня 2019 року № 812-с

2. Строк подання студентом роботи 26.12.2019 р.

3. Вихідні дані до роботи 1. Постановка задачі.
2. Перелік літератури.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)
1. Постановка задачі.
2. Основні теоретичні відомості.
3.Застосування властивостей скінчених груп для розв’язання задач.

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов’язкових креслень)
Презентація

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання 30.05.2019

К А Л Е Н Д А Р Н И Й   П Л А Н

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	30.05.2019	
2.	Збір вихідних даних.	04.06.2019	
3.	Обробка методичних та теоретичних	09.07.2019	
	джерел.		
4.	Розробка першого та другого розділу.	06.08.2019	
5.	Розробка третього розділу.	08.11.2019	
6.	Оформлення та нормоконтроль	03.12.2019	
	кваліфікаційної роботи.		
7.	Захист кваліфікаційної роботи.	09.01.2020	

Студент ____________ П. А. Кравченко
(підпис) (ініціали та прізвище)

Керівник роботи ____________ М. І. Клименко
(підпис) (ініціали та прізвище)

Нормоконтроль пройдено

Нормоконтролер ____________ О. Г. Спиця
(підпис) (ініціали та прізвище)

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Застосування теорії марковських випадкових процесів до прогнозування стану систем»: 55 с., 8 рис., 15 джерел.

ДИСКРЕТНИЙ ЧАС, ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ КОЛМОГОРОВА, ЙМОВІРНІСТЬ, МАРКОВСЬКИЙ ПРОЦЕС, МАРКОВСЬКИЙ ЛАНЦЮГ, МНОЖИНА, МОДЕЛЬ ЛЕОНТЬЄВА.

Об’єкт дослідження – економічні системи, функціонування яких визначається скінченною множиною можливих станів.

Мета роботи: розробка стохастичних математичних моделей для прогнозування та оцінки діяльності економічних систем на основі застосування ланцюгів Маркова.

Метод дослідження – метод марковських процесів.

У кваліфікаційній роботі розглядаються наступні задачі:

– сутність та основні характеристики марковських випадкових процесів;

– особливості дослідження марковських випадкових процесів з дискретним та неперервним часом;

– методики побудови диференціальних рівнянь Колмогорова;

– на основі виконаного дослідження побудувати математичні моделі для прогнозування та оцінки конкретних економічних процесів.

SUMMARY

Master’s Qualification Thesis "Application of the Theory Random Markov Processes in Predicting the State of the System": 55 pages, 8 figures, 15 references.

DISCRETE TIME, DIFFERENTIAL EQUATIONS OF KOLMOGOROV, PROBABILITY, MARKOV PROCESS, MARKOV CIRCUIT, SET, LEONTIEV MODEL.

The object of the study is the economic systems whose functioning is determined by a finite set of possible states.

The aim of the study is development of stochastic mathematical models for forecasting and estimating the activity of economic systems based on the use of Markov chains.

The method of research is method of Markov processes.

In the qualification work the addresses the following tasks:

- the nature and main characteristics of Markov random processes;

- peculiarities of the study of Markov random processes with discrete and continuous time;

- methods of constructing Kolmogorov differential equations;

- to build mathematical models on the basis of the performed research for forecasting and evaluation of specific economic processes.

ЗМІСТ

Завдання на кваліфікаційну роботу………………………………………… 2

Реферат…………………………………………………………………….. 5

Summary…………………………………………………………………… 6

Вступ…………………………………………..…………………………… 7

1 Сутність марковських випадкових процесів……………….………… 9

1.1 Марковські випадкові процеси та ергодичні системи………...... 9

1.2 Характеристики марковського процесу з дискретним часом...... 12

2 Марковські процеси з неперервним часом……………………..……... 20

2.1 Щільності ймовірностей зміни станів системи………..……... 20

2.2 Диференціальні рівняння Колмогорова…….…………………... 23

3 Прогнозування стану системи на основі марковських процесів……. 30

3.1 Прогнозування банківських депозитних процентних ставок….. 30

3.2 Прогнозування надійності експлуатації обладнання…………… 36

3.3 Застосування ланцюгів Маркова до дослідження моделі Леонтьєва……………………………………………………….. 42

Висновки……………………….……………………………………….... 52

Перелік посилань………………………………………………………….. 54

ВСТУП

На сучасному етапі розвитку економічної науки математичне моделювання широко використовується не лише у теоретичних дослідженнях соціально-економічних явищ та процесів, але й для вирішення прикладних, практичних задач економіки. Значна ефективність використання сучасних методів математичного моделювання у економічних дослідженнях обумовлює необхідність розширення кола економічних проблем, вирішити які можна за допомогою побудови та аналізу відповідних детермінованих або стохастичних математичних моделей. Цього, зокрема, можна досягти у випадку, коли економічну систему, що є об’єктом дослідження, можна описати, задавши скінченну множину її можливих станів.

Метою даного магістерського дослідження є розробка стохастичних математичних моделей для прогнозування та оцінки діяльності економічних систем на основі застосування ланцюгів Маркова.

Об’єкт дослідження – економічні системи, функціонування яких визначається скінченною множиною можливих станів.

Предметом дослідження є застосування марковських ланцюгів до моделювання діяльності економічних систем.

Для досягнення мети магістерського дослідження необхідно вирішити наступні задачі:

– дослідити сутність та основні характеристики марковських випадкових процесів;

– з’ясувати особливості дослідження марковських випадкових процесів з дискретним та неперервним часом;

– вивчити методику побудови диференціальних рівнянь Колмогорова;

– на основі виконаного дослідження побудувати математичні моделі для прогнозування та оцінки конкретних економічних процесів.

На сучасному етапі основним засобом дослідження особливостей функціонування економічних систем є математичне моделювання. [1] Цей метод дослідження ґрунтується на використанні принципу аналогії. Він полягає у тому, що при дослідженні здійснюється заміна реальної економічної системи чи процесу відповідною математичною моделлю, що відображає найбільш суттєві характеристики об’єкта моделювання. Дані, отримані у результаті математичного моделювання, використовуються для прийняття управлінських рішень.

Важливість математичного моделювання для економічних досліджень пояснюється тим, у економіці неможливо використати фізичні або аналогові моделі подібності. Тут також відсутня можливість для проведення експериментів. Для прийняття оптимальних економічних рішень потрібно на основі аналізу минулого досвіду функціонування економічної системи розробляти та застосовувати математичні моделі, що є найбільш адекватними для конкретної економічної ситуації.

1 СУТНІСТЬ МАРКОВСЬКИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

1.1 Марковські випадкові процеси та ергодичні системи

Розглянемо основні положення сучасної теорії марковських випадкових процесів. Випадковою величиною називають величину, яка у результаті досліду може прийняти одне з числових значень відомої множини, проте заздалегідь невідомо яке саме. Випадковим процесом $S(t)$ називають функцію, яка кожному моменту часу t з часового проміжку проведеного досвіду ставить в відповідність єдину випадкову величину $S(t)$.

Отже, аргументом випадкової функції являється час, а її значенням – випадкова величина. Таким чином, випадкова функція характеризує зміну випадкової величини у часі.

Зв’язки між елементами системи можуть бути як безпосередніми, так і опосередкованими, в одну або в обидві сторони. Елементи системи і зв’язки між ними у загальному випадку змінюються у часі і характеризують в кожен момент часу t стан $S(t)$ системи S. Якщо система S з плином часу t змінює свої стани $S(t)$ випадковим чином, то кажуть, що в системі S здійснюється випадковий процес.

Якщо множина станів системи S є не більш, ніж зліченною, то випадковий процес, що протікає в цій системі, є дискретним або процесом з дискретними станами. Якщо ж множина станів системи S є більш ніж зліченою (континуальною), то випадковий процес є неперервним.

Надалі ми будемо розглядати тільки системи з дискретною множиною станів, припускаючи при цьому, що в кожен фіксований момент часу система може перебувати тільки в одному зі своїх можливих станів.

Випадковий процес, що протікає в системі S, називається марковським, якщо він має властивість відсутності післядії або відсутності пам'яті, який полягає у тому, що для нинішнього фіксованого моменту часу t_0 ймовірність будь-якого стану $S(t)$ системи S в майбутньому (при $t > t_0$) залежить тільки від її стану $S(t_0)$ на сьогодні (при $t = t_0$) і не залежить від того, як розвивався цей процес в минулому (при $t < t_0$). У фінансово-економічній практиці нерідко зустрічаються випадкові процеси, які з певною похибкою можна вважати марковськими.

Для аналізу дискретного випадкового процесу, що протікає в системі, зручно користуватися графом її станів, під яким будемо розуміти плоску множину прямокутників, квадратів або кругів, всередині яких містяться позначення станів, і множину стрілок, що позначають можливі безпосередні переходи з станів в стани.

Групу станів системи називають множиною без виходу, якщо система одного разу потрапивши в неї, може з будь-якого її стану перейти за скінченне число кроків в будь-який інший її стан, але ніколи не може вийти з цієї множини. Зокрема, якщо множина без виходу складається з єдиного стану, то останній називають станом без виходу (поглинаючим станом) або пасткою.

Групу станів системи називають множиною без входу, якщо система, перебуваючи в цій множині, може з будь-якого її стану перейти за скінченне число кроків в будь-який інший його стан, але вийшовши один раз з цієї множини, система вже ніколи в неї не повернеться. Зокрема, якщо множина без входу складається з єдиного стану, то останній називають станом без входу або нестійким станом.

Систему називають ергодичною, якщо вона з будь-якого свого стану може перейти за скінченне число кроків в будь-який інший стан. Ергодична система не має станів без входу, станів без виходу, множин без входу, множин без виходу.

Вивчення будь-якої системи, в якій протікає дискретний випадковий процес, слід починати з чіткого опису всіх станів, в яких може перебувати система, і побудови графа цих станів. Приклад такого графа показано на рис.1.1.

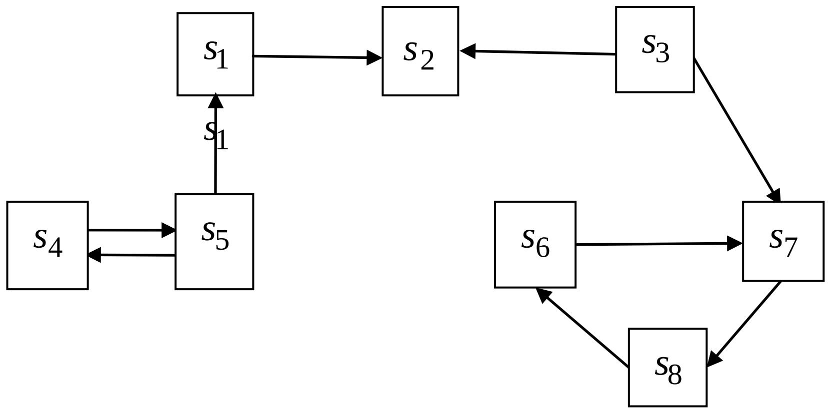

Рисунок 1.1 – Граф станів ергодичної системи

У будь-який фіксований момент часу $t = t'$ система S, в якій протікає марковський дискретний випадковий процес, може знаходиться тільки в одному зі своїх можливих станів $s_1, s_2, \ldots$, але невідомо в якому саме. Тобто стан $S(t')$ може бути одним із станів $s_1, s_2, \ldots$. Щоб $S(t')$ інтерпретувати як дискретну випадкову величину, треба кожний стан $s_1, s_2, \ldots$ охарактеризувати кількісно. Це можна зробити різними способами.

Наприклад, припишемо кожному стану $s_i, i = 1,2,\ldots$, у якості кількісної характеристики його номер i, тобто $s_i = i$. Тоді $S(t')$ буде являти собою дискретну випадкову величину з множиною значень $\{1, 2, \ldots\}$.

Дискретну випадкову величину $S(t')$ називають перерізом випадкового процесу, що протікає в системі S, в момент часу t'. Відповідність $t \to S(t)$ є дискретною випадковою функцією часу t.

Якщо провести спостереження за процесом в системі S протягом певного проміжку часу від t_0 до $t_0 + \Delta t \; (\Delta t > 0)$, то випадкова величина $S(t)$ в кожен момент часу $t \in [t_0, t_0 + \Delta t]$ прийме конкретне числове значення, в результаті чого ми отримаємо вже не випадкову, а звичайну дискретну функцію, яку називають реалізацією даного процесу за часовий проміжок $[t_0,\, t_0 + \Delta t]$.

Для однозначності функції будемо вважати, що момент переходу система знаходиться в стані, у який вона перейшла, а не у стані, з якого відбувся перехід.

1.2 Характеристики марковського процесу з дискретним часом

Марковський дискретний випадковий процес, що протікає в системі S, характеризується не тільки можливими станами, в яких система може перебувати випадковим чином, але і тими моментами часу, в які можуть відбуватися її переходи зі стану в стан. Ці моменти часу можуть бути заздалегідь відомі або випадкові.

Випадковий процес, що протікає в системі, називається процесом з дискретним часом, якщо переходи системи зі стану в стан можуть здійснюватися тільки у заздалегідь відомі певні моменти часу $t_1, t_2, t_3, \ldots$, що називають кроками або етапами цього процесу. У проміжки часу між кроками система зберігає свій стан. Не виключається можливість, що на деяких етапах система не змінить свого стану.

Випадковий процес, що протікає в системі, називають процесом з неперервним часом, якщо переходи системи зі стану в стан можливі в будь-які, заздалегідь невідомі, випадкові моменти часу.

Нехай $s_1, \ldots, s_n$ – можливі стани системи S, яка може переходити з одного з них в інший тільки в моменти $t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots$. Оскільки для моменту часу $t \in [t_k,\, t_{k+1})$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, система S знаходиться у стані $S(t) = S(t_k)$, то даний процес можна розглядати як випадкову функцію кроків t_k або їх номерів k. Таким чином, цей процес є випадковою функцію натурального аргументу $k = 1, 2, 3, \ldots$, тобто маємо випадкову послідовність.

Випадкову послідовність називають марковським ланцюгом, якщо для кожного кроку ймовірність переходу з будь-якого стану s_i в будь-який стан s_j не залежить від того, коли і як система виявилася в стані s_i.

Позначимо через $S_i(k)\,(i=1,\ldots,n;\ k=1,\,2,\ldots)$ подію, яка полягає в тому, що з k-го до $k+1$ -го кроку система S знаходиться в стані s_i, тобто $S_i(k)$ є подія $S(t)=s_i$ при $t\in[t_k,t_{k+1})$. Оскільки система S будь-який момент t може перебувати тільки в одному зі своїх можливих станів $s_1,\ldots,s_n$, то при кожному $k=1,\,2,..$ події $S_1(k),\ldots,S_n(k)$ несумісні і утворюють повну групу.

Кожну реалізацію дискретного випадкового процесу з дискретним часом можна подати як ланцюг (послідовність за індексом k) розглянутих подій $S_i(k)\,(i=1,\ldots,n;\ k=1,\,2,\ldots)$.

Основними характеристиками марковських ланцюгів є ймовірності $p_i(k)=p(S_i(k))\,(i=1,\ldots,n;\ k=1,\,2,\ldots)$ подій $S_i(k)$. Їх називають ймовірностями станів.

Таким чином, ймовірність стану $p_i(k)$ – це ймовірність того, що система S від k-го до $(k+1)$-го кроку буде перебувати в стані s_i.

Оскільки для кожного кроку $k=1,\,2,\ldots$ події $S_1(k),\ldots,S_n(k)$ несумісні і утворюють повну групу, то, як відомо з теорії ймовірностей, сума ймовірностей цих подій для кожного $k=1,\,2,\ldots$, дорівнює 1:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(k)=1,\ k=1,\,2,\ldots \tag{1.1}$$

Для знаходження ймовірностей станів $p_i(k)$ розглянемо перехідні ймовірності. Їх визначають наступним чином.

Перехідною ймовірністю $p_{ij}(k)$ k-го кроку $(i = 1,\ldots,n;\, k = 1,\, 2,\ldots)$ називають ймовірність безпосереднього переходу системи S в момент t_k зі стану s_i в стан s_j.

Перехідні ймовірності $p_{ij}(k)$ називаються можливостями переходу системи S зі стану s_i в інший стан s_j, якщо $i \neq j$ та можливостями затримки системи S в стан s_i, якщо $i = j$.

Якщо в момент t_k безпосередній перехід системи зі стану s_i в інший стан $s_j(i \neq j)$ неможливий, то $p_{ij}(k) = 0$; якщо неможлива затримка $i = j$ в і i-му стані, то $p_{ii}(k) = 0$.

Якщо жодна з перехідних ймовірностей $p_{ij}(k), i, j = 1,..., k, k = 1,2,...$, не залежить від кроку k (в цьому випадку їх позначають p_{ij}), то марковський ланцюг називають однорідним, у іншому випадку – неоднорідним.

Розглянемо спочатку випадок однорідного марковського ланцюга. Запишемо перехідні ймовірності у вигляді квадратної матриці n-го порядку

$$P = \left(p_{ij}\right)_{i,\, j=1}^{n} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nm} \end{pmatrix}.$$

Матриця P не залежить від номера кроку k, її порядок n збігається з числом станів системи, на головній діагоналі розташовані ймовірності затримок.

Перехідну ймовірність p_{ij} можна інтерпретувати як умовну ймовірність $p_{ij} = p\left(S_j(k) \middle| S_i(k-1)\right)$ події $S_j(k)$ (з k-го до $(k+1)$-го кроку система S знаходиться в стані s_j) за умови, що мала місце подія $S_i(k-1)$ (з

$(k+1)$-го до k-го кроку система S перебувала в стані s_i). Отже, з огляду на те, що події $S_1(k),\ldots,S_n(k)$ несумісні і утворюють повну групу, матимемо:

$$\sum_{i=1}^{n} p_{ij} = 1,\ i = 1,\ldots,n, \tag{1.2}$$

тобто сума елементів кожного рядка матриці P перехідних ймовірностей дорівнює 1.

Матрицю, кожен елемент якої є невід’ємним, а сума елементів кожного рядка дорівнює одиниці, називають стохастичною. Отже, матриця перехідних ймовірностей є стохастичною.

Граф станів, біля стрілок якого проставлені перехідні ймовірності, називають розміченим.

Наявність на розміченому графі стрілок і відповідних їм перехідних ймовірностей з одного стану в інший означає, що ці перехідні ймовірності відмінні від нуля. Навпаки, відсутність стрілок з одного стану в інший, говорить про те, що відповідні їм перехідні ймовірності дорівнюють нулю.

Перехідні ймовірності, що відповідають стрілкам переходів із станів $s_i(i=1,\ldots,n)$, розташовані в i-му рядку матриці P перехідних ймовірностей і тому їх сума, в силу (1.2), дорівнює 1. Отже, ймовірність затримок $p_{ii}(i=1,\ldots,n)$ можна підрахувати за формулою

$$p_{ii} = 1 - \sum_{\substack{i=1 \\ j\neq i}}^{n} p_{ij},\ i = 1,\ldots,n. \tag{1.3}$$

Тому стрілки – петлі зі стану s_i, в себе і відповідні їм ймовірності затримки p_{ii} на графі не проставляються.

Вектор-рядок ймовірностей станів $(p_1(0),\ldots,p_n(0))$ в початковий момент часу $t=0$, що безпосередньо передує першому кроку, називають вектором початкового розподілу ймовірностей.

Очевидно, що для ймовірностей в початковий момент часу також має місце умова нормування $p_1(0),\ldots,p_n(0)=1$.

Наприклад, якщо система S в початковий момент $t=0$ перебувала в стані $s_m, m\in\{1,\ldots,n\}$, то $p_m(0)=1$ і тоді початковий розподіл ймовірностей матиме вигляд: $p_1(0)=\ldots=p_{m-1}(0)=0,\ p_m(0)=1,\ p_{m+1}(0)=\ldots=p_n(0)=0$

Маючи в своєму розпорядженні початковий розподіл ймовірностей (початковий стан системи) і матрицю перехідних ймовірностей, можна обчислити ймовірність станів системи від будь-якого k-го до $(k+1)$-го кроку, $k=1,2,\ldots$. Для однорідного марковського ланцюга вектор-рядок ймовірностей станів від k-го до $(k+1)$-го кроку дорівнює добутку вектор-рядку ймовірностей станів від $(k-1)$-го до k-го кроку на матрицю перехідних ймовірностей:

$$((p_1(k)),\ldots,p_n(k))=(p_1(k-1),\ldots,p_n(k-1))\cdot P. \tag{1.4}$$

Для доведення цієї формули попередньо зазначимо, що розмір $[1\times n]$ вектор-рядка $(p_1(k-1),\ldots,p_n(k-1))$ і розмір $[n\times n]$ матриці P перехідних ймовірностей в правій частині рівності (1.4) забезпечують можливість їх перемноження, в результаті чого отримуємо вектор-рядок розміру $[1\times n]$.

Для кожного $j=1,\ldots,n$ розглянемо n гіпотез $H_i(k-1),\ i=1,\ldots,n$, що складаються відповідно в тому, що від $(k-1)$-го кроку до k-го система S перебувала в стані S_j. Гіпотези $H_i(k-1),\ i=1,\ldots,n$,, для кожного $k=1,2,\ldots$, несумісні і утворюють повну групу. Їх ймовірності $p(H_i(k-1)=p_i(k-1)$. Умовна ймовірність $p(S_j(k)|S_i(k-1))$ того, що система S від k-го до $(k+1)$-

го кроку буде перебувати в стані s_j при гіпотезі $H_i(k-1)$, тобто за умови що система S від $(k-1)$-го до k-го кроку перебувала в стані s_i, є перехідна ймовірність p_{ij}. Тому за формулою повної ймовірності

$$p_j(k) = \sum_{i=1}^{n} p(H_i(k-1)) \cdot p\big(S_j(k) \big| S_i(k-1)\big) = \sum_{i=1}^{n} p_i(k-1) \cdot p_{ij},\ j = 1,\ldots,n,$$

що і доводить справедливість формули (1.4).

Для обчислення вектора ймовірностей станів від k-го до $(k+1)$-го кроку за формулою (1.4) необхідно знати вектор ймовірностей станів від $(k-1)$-го до k-го кроку, тобто формула (1.4) є рекурентною.

При $k=1$ в правій частині рівності (1.4) знаходиться добуток вектора початкового розподілу ймовірностей на матрицю P.

Для однорідного марковського ланцюга має місце наступна формула

$$((p_1(k)),\ldots,p_n(k)) = (p_1(k-1),\ldots,p_n(k-1)) \cdot P. \tag{1.5}$$

Для отримання формули (1.5) у праву частину формули (1.4) замість вектора $(p_1(k-1),\ldots,p_n(k-1))$ підставимо його вираз $(p_1(k-2),\ldots,p_n(k-2)) \cdot P$ за формулою (1.4), що виходить з неї при заміні k на $k-1$. Отримаємо $((p_1(k)),\ldots,p_n(k)) = (p_1(k-2),\ldots,p_n(k-2)) \cdot P^2$.

Аналогічно, в правій частині цієї рівності замість вектора $(p_1(k-2),\ldots,p_n(k-2))$ підставимо його вираз за формулою (1.4) і т.д. У результаті прийдемо до формули (1.5).

Неважко переконатися в тому, що будь-який натуральний степінь квадратної стохастичною матриці є також стохастичною матрицею. Таким чином, у формулі (1.5) P^k – стохастична матриця.

Відзначимо, що в якості контролю за правильністю обчислень можна використовувати перевірку матриць на стохастичність. У розглянутому прикладі P, P^2, P^4 стохастичні.

Ми розглянули однорідний марковський ланцюг, для якого перехідні ймовірності p_{ij} не залежать від номера кроку k, тобто є незмінними від кроку до кроку.

Тепер припустимо, що марковський ланцюг неоднорідний, тобто перехідні ймовірності залежать від номера кроку k: $p_{ij}(k)$. Тоді матриця перехідних ймовірностей буде залежати від k:

$$P(k) = \left(p_{ij}(k)\right)_{i,j=1}^{n} = \begin{pmatrix} p_{11}(k) & \dots & p_{in}(k) \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{n1}(k) & \dots & p_{nn}(k) \end{pmatrix}.$$

Для кожного $k = 1, 2, \dots$ сума елементів кожного рядка матриці $P(k)$ дорівнює одиниці:

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij}(k) = 1,\ i = 1, \dots, n,\ k = 1, 2, \dots. \tag{1.6}$$

Для неоднорідного марковського ланцюга вектор-рядок ймовірностей станів від k-го до $(k+1)$-го кроку дорівнює добутку вектор-рядка ймовірностей станів від $(k-1)$-го до k-го кроку на матрицю перехідних ймовірностей від k-го до $(k+1)$-го кроку $k = 1, 2, \dots$.

$$((p_1(k)), \dots, p_n(k)) = (p_1(k-1), \dots, p_n(k-1)) \cdot P(k). \tag{1.7}$$

Внаслідок послідовного застосування формули (1.7) отримуємо, що для неоднорідного марковського ланцюга має місце наступна формула:

$$((p_1(k)),\ldots,p_n(k)) = (p_1(0),\ldots,p_n(0)) \cdot P(1) \cdot \ldots \cdot P(k), \; k = 1,2,\ldots. \qquad (1.8)$$

Якщо неоднорідність марковського ланцюга розуміти в більш широкому сенсі, що допускає, зокрема, її однорідність, то в разі однорідності марковського ланцюга $p_{ij}(k) = p_{ij}$, $P(k) = P$, $k = 1, 2,\ldots$ і формули (1.6), (1.7) і (1.8) перетворюються відповідно в формули (1.2), (1.4) і (1.5).

2 МАРКОВСЬКІ ПРОЦЕСИ З НЕПЕРЕРВНИМ ЧАСОМ

2.1 Щільності ймовірностей зміни станів системи

Крім випадкових процесів з дискретним часом на практиці досить часто зустрічається випадкові процеси з неперервним часом, при яких система може змінювати свої стани у будь-який випадковий момент часу.

Нехай $s_1,..s_n$ – стани, у яких може перебувати система S. Ймовірність $p_i = p(S_i(t)),\ \ i=1,\dots,n,\ \ t \ge 0$, події $S_i(t)$, яка полягає у тому, що система S в момент часу t перебуває в стані s_i, називають ймовірністю i-го стану в момент часу t.

Ймовірність станів $p_i(t)$ є, таким чином, ймовірнісною функцією часу $t \ge 0$.

Марковський випадковий дискретний процес з неперервним часом вважається заданим, якщо визначені всі ймовірності станів $p_i(t),\ \ i=1,\dots,n$.

Оскільки у будь-який момент часу t система S буде знаходитися в одному з станів $s_1,\dots,s_m$, то події $S_i(t),\ \ i=1,\dots,n$, є несумісними і утворюють повну групу, тому має місце умова:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(t) = 1, \quad t \ge 0. \tag{2.1}$$

Нехай $p_{ij}(t)$ – ймовірність переходу системи S в момент часу t зі стану s_i в стан s_j при $i \ne j$, і ймовірність затримки в момент часу t в стані s_i при $i = j$. Якщо в момент часу t система знаходиться в i-му стані, то можна вважати, що точно в цей момент t сталася затримка системи в i-м стані і тому $p_{ii}(t)$. Отже, з міркувань виконання умови $p_{i1}(t)+...+p_{in}(t)=1$, робимо висновок, що ймовірність переходу системи S з i-го стану в інший, j-ий стан точно в момент t буде дорівнювати нулю: $p_{ij}(t)=0$, $i \neq j$. Тому ймовірності переходу в разі процесу з неперервним часом вже не відіграють тієї визначальної ролі в обчисленні ймовірностей станів, яку вони виконували в разі процесу з дискретним часом. Замість перехідних ймовірностей в процесі з неперервним часом розглядають інші характеристики процесу – так звані щільності ймовірностей переходу λ_{ij} зі стану s_i в стан s_j, які визначаються наступним чином.

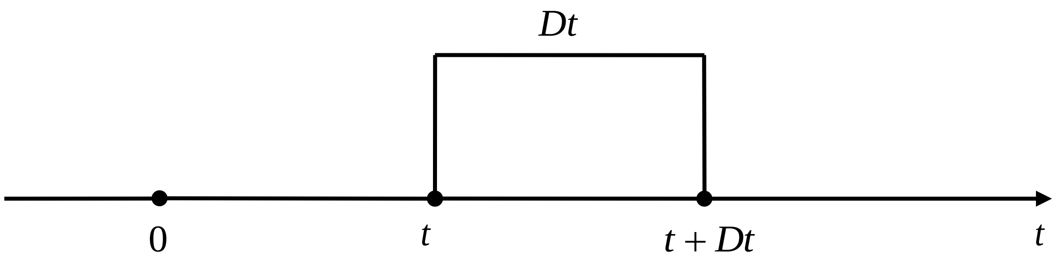

Рисунок 2.1 – Зображення проміжку часу $[t, t+\Delta t]$, $\Delta t > 0$

Позначимо через $p_{ij}(t;\Delta t)$, $i \neq j$, – ймовірність того, що система S, що знаходилася в момент часу t в стані s_i, за проміжок часу $[t, \Delta t]$, $\Delta t > 0$, (тобто за час Δt) перейде з нього в інший ($i \neq j$) стан s_j. (див. рис 2.1).

Якщо відомо, що система в момент часу t не може перебувати в стані s_i або вона в момент t знаходиться в стані s_i, але за проміжок часу Δt не може змінити свого стану, то $p_{ij}(t,\Delta t)=0$, $i \neq j$.

Для рівних індексів $i = j$ позначення $p_{ii}(t,\Delta t)$ являє собою ймовірність того, що система за проміжок часу від t до $t+\Delta t$ перейшла з i-го стану в i-ий, тобто з i-го стану не перейшла в інший, а тому $p_{ii}(t;\Delta t)=0$, $i=1,...,n$.

Щільністю ймовірності переходу системи S зі стану s_i в стан s_j в момент часу t називають величину

$$\lambda_{ij}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{ij}(t; \Delta t)}{\Delta t}. \qquad (2.2)$$

З (2.2) випливає, що

$$p_{ij}(t; \Delta t) \approx \lambda_{ij}(t) \cdot \Delta t, \ \Delta t \to 0. \qquad (2.3)$$

З визначення щільності ймовірності переходу $\lambda_{ij}(t)$ видно, що вона у загальному випадку залежить від часу t, є невід'ємною і, на відміну від ймовірностей переходу $p_{ij}(t)$, може бути більше 1, але $\lambda_{ii}(t) = 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Якщо за будь-яких $i \neq j$, $i, j = 1, ..., n$, щільності ймовірностей переходів не залежать від часу t, і тоді замість $\lambda_{ij}(t)$ будемо писати просто λ_{ij}, то марковский процес з неперервним часом називають однорідним. Якщо ж хоча б при одній парі значень $i \neq j$ щільність ймовірності переходу λ_{ij} є функцією часу t, то процес називають неоднорідним.

Розглянемо далі однорідний дискретний марковський випадковий процес з неперервним часом.

Граф станів марківського однорідного випадкового процесу з неперервним часом, біля стрілок якого проставлені щільності ймовірностей переходів $\lambda_{ij}(t)$, називають розміченим. На рис. 2.2 зображений розмічений граф процесу з неперервним часом.

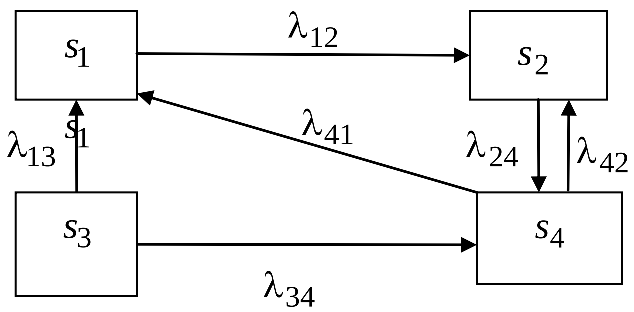

Рисунок 2.2 – Розмічений граф станів системи, в якій протікає процес з неперервним часом

Відсутність на графі стрілок з одних станів в інші означає, що щільності ймовірностей відповідних переходів дорівнюють нулю. Наприклад, $\lambda_{21} = 0$.

Оскільки щільності ймовірностей переходів забезпечені двома індексами, то їх зручно розташувати матрицею

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nn} \end{pmatrix}.$$

де $\lambda_{11} = \lambda_{22} = \ldots = \lambda_{nn} = 0$.

2.2 Диференціальні рівняння Колмогорова

Знаючи щільності ймовірностей переходу λ_{ij}, і, $i, j = 1,\dots, n$, можна скласти систему диференціальних рівнянь щодо ймовірностей станів $p_i(t)$, $i = 1,\ldots,n$.

Ймовірності станів $p_i(t)$, $i=1,\ldots,n$, (невідомі імовірнісні функції) є розв'язком наступної системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dp_i(t)}{dt}=-\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}\right)p_i(t)+\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ji}p_j(t), i=1,\ldots,n;\ t\geq 0. \qquad (2.4)$$

Для доведення формул (2.4) дамо моменту часу t мале збільшення $\Delta t>0$ і розглянемо подію $S_i(t+\Delta t)$, яка полягає у тому, що у момент $t+\Delta t$ система S буде знаходиться в стані s_i. Ця подія може відбутися при появі однієї з наступних двох подій: $A_i(t,\Delta t)$ або $B_i(t,\Delta t)$.

Подія $A_i(t,\Delta t)$ полягає в тому, що у момент t система S вже була в стані s_i, а за час Δt не вийшла з цього стану, тобто вона не перейшла ні в який інший стан s_j, $j=1,\ldots,n$, $j\neq i$.

Подія $B_i(t,\Delta t)$ складається в тому, що в момент t система S перебувала в одному з станів s_j, $j=1,\ldots,n$, $j\neq i$ відмінному від s_i, а за час Δt перейшла з нього в стан s_i.

Події $A_i(t,\Delta t)$ і $B_i(t,\Delta t)$ є несумісними і тому, за теоремою додавання ймовірностей несумісних подій,

$$p_i(t+\Delta t):=p(S_i(t+\Delta t))=p(A_i(t+\Delta t))+p(B_i(t+\Delta t)). \qquad (2.5)$$

Подія $A_i(t,\Delta t)$ являє собою добуток двох залежних подій: події $S_i(t)$, яка полягає у тому, що система S в момент t перебувала в стані s_i і події $C_i(t,\Delta t)$, що полягає у тому, що за час Δt система S не вийшла зі стану s_i. Тому за теоремою множення ймовірностей залежних подій,

$$p(A_i(t,\Delta t))=p(S_i(t))p(C_i(t,\Delta t)|S_i(t))=p_i(t)\cdot p(C_i(t,\Delta t)|S_i(t)), \qquad (2.6)$$

де $p(S_i(t)) = p_i(t)$ – ймовірність події $S_i(t)$, тобто ймовірність стану s_i в момент t, а $p(C_i(t,\Delta t)|S_i(t))$ – умовна ймовірність події $C_i(t,\Delta t)$ за умови, що подія $S_i(t)$ вже настало, тобто за умови того, що в момент t система S вже перебувала в стані s_i.

Для обчислення умовної ймовірності $p(C_i(t,\Delta t)|S_i(t))$ розглянемо подію, протилежну події $C_i(t,\Delta t)$. Подія $\overline{C_i(t,\Delta t)}$ полягає у тому, що система S за час Δt вийде з i-го стану s_i, і є сумою подій $D_{ij}(t,\Delta t)$, $j = 1,\ldots,n$, $j \neq 1$, що полягають у тому, що система S за час Δt перейде зі стану s_i в стан s_j. Оскільки події $D_{ij}(t,\Delta t)$, $j = 1,\ldots,n$, $j \neq 1$, несумісні, то для умовних ймовірностей цих подій, за умови, що подія $S_i(t)$ вже настала, матимемо

$$p\left(\overline{C_i(t,\Delta t)}|S_i(t)\right) = \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} p\left(D_{ij}(t,\Delta t)|S_i(t)\right) = \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} P_{ij}(t,\Delta t).$$

Підставляючи сюди (2.3) з урахуванням того, що в однорідному процесі $\lambda_{ij}(t)$ не залежать від часу t, отримаємо:

$$p\left(\overline{C_i(t,\Delta t)}|S_i(t)\right) = \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \lambda_{ij}(t)\cdot \Delta t.$$

Тоді

$$p\left(C_i(t,\Delta t)|S_i(t)\right) = 1 - p\left(\overline{C_i(t,\Delta t)}|S_i(t)\right) = 1 - \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \lambda_{ij}\cdot \Delta t.$$

Підставляючи цю рівність у (2.6), знайдемо ймовірність події $A_1(t,\Delta t)$:

$$p\left(A_i(t,\Delta t)\right)=p_i(t)-\left(\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n}\lambda_{ij}\right)p_i(t)\cdot\Delta t\,. \tag{2.7}$$

Для обчислення ймовірності події $B_i(t,\Delta t)$ розглянемо подію $E_j(t,\Delta t)$, $j=1,\ldots,n$, $j\neq 1$, що складається в тому, що в момент часу t система S вже перебувала в стані s_j, а за час Δt вона перейшла в стан s_j. Подія $E_j(t,\Delta t)$ являє собою добуток двох залежних подій: події $S_i(t)$, що складається в тому, що система S в момент t перебувала в стані s_j, і події $D_{ji}(t,\Delta t)$, що складається в тому, що за час Δt система S зі стану s_j перейде в стан s_i. За теоремою множення ймовірностей залежних подій, з використанням (2.3) отримуємо:

$$p\left(E_j(t,\Delta t)\right)=p\left(S_j(t)D_{ji}(t,\Delta t)\right)=p\left(S_j(t)\right)\cdot p\left(D_{ji}(t,\Delta t)\middle|S_j(t)\right)=p_j(t)\cdot p_{ji}(t,\Delta t)=$$
$$=p_j(t)\cdot\lambda_{ji}\cdot\Delta t,\ j=1,\ldots,n;\ j\neq i\,.$$

Подія $B_i(t,\Delta t)$ є сумою несумісних подій $E_j(t,\Delta t)$, $j=1,\ldots,n$, $j\neq 1$, а тому, за теоремою додавання ймовірностей несумісних подій,

$$p\left(B_i(t,\Delta t)\right)=\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n}p\left(E_j(t,\Delta t)\right)=\left(\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n}\lambda_{ji}p_{ji}(t)\right)\cdot\Delta t\,. \tag{2.8}$$

Підставляючи (2.7) і (2.8) в (2.5), будемо мати:

$$p_i(t+\Delta t)=p_i(t)-\left(\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n}\lambda_{ji}\right)p_i(t)\Delta t+\left(\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n}\lambda_{ji}p_{ji}(t)\right)\cdot\Delta t\,,$$

звідси

$$\frac{p_i(t+\Delta t)-p_i(t)}{\Delta t}=-\left(\sum_{j=1,\,j\neq i}^{n}\lambda_{ij}\right)p_i(t)+\sum_{j=1,\,j\neq i}^{n}\lambda_{ji}p_j(t).$$

Переходячи в цій рівності до границі при $\Delta t\to 0$, отримаємо диференціальне рівняння для функції $P_i(t)$:

$$\frac{dp_i(t)}{dt}=-\left(\sum_{j=1,\,j\neq i}^{n}\lambda_{ij}\right)p_i(t)+\sum_{j=1,\,j\neq i}^{n}\lambda_{ji}p_j(t),$$

яке збігається з рівнянням системи (2.4), якщо взяти до уваги, що $\lambda_{11}=0$.

Оскільки шукані функції $p_i(t)$ – функції однієї змінної – часу t, то кожне рівняння системи (2.4) є звичайним диференціальним рівнянням. Оскільки невідомі функції $p_i(t)$ і їх похідні входять в рівняння (2.4) тільки в першому степені, то кожне рівняння системи (2.4) є лінійним. Оскільки найвищий порядок похідних $\frac{dp_i(t)}{dt}$ і шуканих функцій $p_i(t)$ – перший, то рівняння системи (2.4) є диференціальними рівнянням першого порядку. У кожному рівнянні системи (2.4) вільні члени дорівнюють нулю, тому рівняння системи (2.4) є однорідними. Оскільки ми розглядаємо однорідний процес, то коефіцієнти λ_{ij} в рівняннях (2.4) є сталими щодо часу t.

Отже, система (2.4) є системою n звичайних лінійних однорідних диференціальних рівнянь першого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Систему (2.4) називають системою диференціальних рівнянь Колмогорова.

Скласти систему диференціальних рівнянь Колмогорова зручно по одному з наступних двох правил.

Перше правило складання диференціальних рівнянь Колмогорова по розміченому графу станів полягає у наступному. Для того, щоб скласти диференціальне рівняння Колмогорова для функції $p_i(t)$ $(j=1,\ldots,n)$, треба в лівій частині цього рівняння записати похідну функції $\frac{dp_i(t)}{dt}$, а в правій – добуток $-\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}\right)p_i(t)$ суми $\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ji}$ щільності ймовірностей переходів λ_{ij} біля стрілок, що виходять зі стану s_i, на ймовірність $p_i(t)$ цього стану зі знаком мінус і плюс суму $\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ji}p_j(t)$ добутків $\lambda_{ij}p_j(t)$ щільності ймовірностей переходів λ_{ji} на відповідних стрілках, що входять в стан s_i, на ймовірності станів $p_j(t)$, з яких ці стрілки виходять. При цьому щільності ймовірностей переходів λ_{ij}, що відповідають відсутнім на графіку стрілкам, дорівнюють нулю.

Система диференціальних рівнянь Колмогорова, складена по розміченому графу на рис. 2.2, буде виглядати наступним чином:

$$\begin{cases}\frac{dp_1(t)}{dt}=-(\lambda_{12}+\lambda_{13})p_1(t)+\lambda_{41}p_4(t),\\ \frac{dp_2(t)}{dt}=-\lambda_{24}p_2(t)+\lambda_{12}p_1(t)+\lambda_{42}p_4(t),\\ \frac{dp_3(t)}{dt}=-\lambda_{31}p_3(t)+\lambda_{13}p_1(t),\\ \frac{dp_4(t)}{dt}=-(\lambda_{41}+\lambda_{42})p_4(t)+\lambda_{24}p_2(t)+\lambda_{34}p_3(t).\end{cases}$$

Друге правило складання диференціальних рівнянь Колмогорова по матриці щільності ймовірностей переходів полягає у наступному. Для складання диференціального рівнянь Колмогорова для функції

$p_i(t)$ $(j=1,\dots,n)$, треба в лівій частині цього рівняння записати похідну $\dfrac{dp_i(t)}{dt}$ функції $p_i(t)$, а в правій – добуток $-\left(\sum\limits_{j=1,\, j\neq i}^{n}\lambda_{ij}\right)p_i(t)$ суми $\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_{ij}$ елементів λ_{ij} i-го рядка матриці Λ на ймовірність $p_i(t)$ стану s_i (номер якого збігається з номером взятого рядка) зі знаком мінус, плюс суму $\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_{ji}p_j(t)$ добутків $\lambda_{ji}p_j(t)$ елементів λ_{ji} i-го цього стовпця на відповідні їм ймовірності $p_j(t)$.

Початкові умови системи диференціальних рівнянь Колмогорова визначаються заданим розподілом ймовірностей станів системи в початковий момент часу $t=0$; $p_1(0),\dots p_n(0)$, що задовольняють нормувального умові (2.1). Якщо в початковий момент часу система S знаходиться в стані $s_m, m\in\{1,\dots,n\}$, з умови (2.1) отримуємо, що

$$p_1(0)=0,\dots,\ p_{m-1}(0)=0,\ p_m(0)=1,\ p_{m+1}(0)=0,\dots,p_n(0)=0\,.$$

Систему диференціальних рівнянь першого порядку, що розв'язані відносно похідних шуканих функцій, називають системою, що має нормальну форму Коші, а задачу знаходження невідомих функцій цієї системи, які відповідають зазначеним вище початковим умовам, – задачею Коші. Таким чином, для системи диференціальних рівнянь Колмогорова (2.4), що мають нормальну форму Коші, ставиться задача Коші.

3 ПРОГНОЗУВАННЯ СТАНУ СИСТЕМИ НА ОСНОВІ МАРКОВСЬКИХ ПРОЦЕСІВ

3.1 Прогнозування банківських депозитних процентних ставок

Методи теорії випадкових процесів знайшли широке застосування при аналізі та прогнозуванні процесів у різноманітних економічних системах. У даному магістерському дослідженні пропонується методика прогнозування банківських депозитних процентних ставок, що ґрунтується на використанні теорії марковських ланцюгів. Особливості застосування даної методики розглянемо на прикладі депозитних операцій деякого умовного банку. Розглянемо можливі стани цього виду банківської діяльності, що характеризуються однією з процентних ставок: 12%, 13%, 14%, які встановлюються на початку кожного кварталу і фіксуються на протязі цього періоду часу. Таким чином, якщо за систему S прийняти цей банк, то вона в кожен момент часу може знаходитися тільки в одному з наступних трьох станів: s_1 – процентна ставка 12%, s_2 – процентна ставка 13%, s_3 – процентна ставка 14%. Аналіз роботи банку в попередні роки показав, що зміна перехідних ймовірностей на протязі року є дуже малою.

Визначимо ймовірності зазначених станів банку в кінці поточного року, якщо в кінці попереднього року процентна ставка банку становила 13%, а розмічений граф станів банку представлений на рис. 3.1.

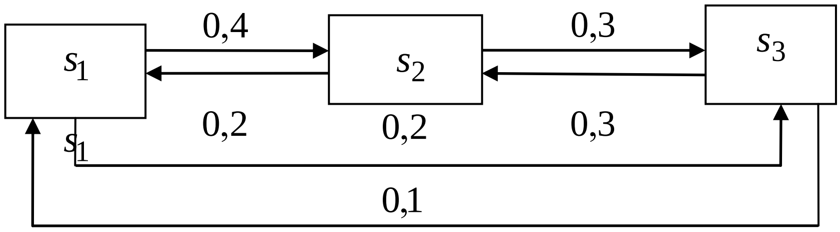

Рисунок 3.1 – Розмічений граф станів банку

Оскільки множина допустимих станів, в яких може перебувати система S, є скінченною (три стани), то випадковий процес, що реалізується у системі S, є дискретним.

З певним рівнем похибки можна припустити, що ймовірність перебування банку в одному зі своїх станів в майбутньому суттєво залежить тільки від його стану на теперішній момент часу і не залежить від його станів в минулому. Тому розглянутий випадковий процес можна вважати марковським.

У межах вибраної моделі банк може переходити з одного стану в інший тільки в заздалегідь визначені моменти часу: t_k – початок k-го кварталу, $k=1, 2, 3, 4$. Отже, випадковий процес в системі S є процесом з дискретним часом. Оскільки перехідних ймовірностей від часу можна знехтувати, то даний процес буде однорідним. Таким чином, у системі S протікає однорідний марковський дискретний випадковий процес з дискретним часом, тобто маємо однорідний марковський ланцюг.

За розміченим графом на рис. 3.1 запишемо значення перехідних ймовірностей: $p_{12}=0{,}4$; $p_{13}=0{,}2$; тоді, за формулою (1.3) при $i=1$, $p_{11}=1-(p_{12}+p_{13})=1-(0{,}4+0{,}2)=0{,}4$. Аналогічно, $p_{21}=0{,}2$; $p_{23}=0{,}3$ і, отже, $p_{22}=0{,}5$. Нарешті, $p_{31}=0{,}1$; $p_{32}=0{,}3$; $p_{33}=0{,}6$.

Складемо матрицю перехідних ймовірностей:

$$P=\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}6 \end{pmatrix}.$$

Оскільки у кінці попереднього року процентна ставка становила 13%, то можна вважати, що в початковий момент $t=0$ система S перебувала в стані s_2. Тому початковий розподіл ймовірностей має вигляд

$$\left(\left(p_1(0)\right), p_2(0), p_3(0)\right) = (0, 1, 0). \tag{3.1}$$

Ймовірність станів банку в кінці року, тобто після чотирьох кварталів, можна знайти за формулою (1.5) при $n = 3$ і $k = 4$. Для цього підрахуємо спочатку

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,1 & 0,3 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,1 & 0,3 & 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,26 & 0,42 & 0,32 \\ 0,21 & 0,42 & 0,37 \\ 0,16 & 0,37 & 0,47 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$P^4 = P^2 \cdot P^2 = \begin{pmatrix} 0,26 & 0,42 & 0,32 \\ 0,21 & 0,42 & 0,37 \\ 0,16 & 0,37 & 0,47 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,26 & 0,42 & 0,32 \\ 0,21 & 0,42 & 0,37 \\ 0,16 & 0,37 & 0,47 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2070 & 0,4040 & 0,3890 \\ 0,2020 & 0,4015 & 0,3965 \\ 0,1945 & 0,3965 & 0,4090 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи формулу (1.5) при $n = 3$ і $k = 4$з урахуванням (1.6) маємо:

$$\left(p_1(4), p_2(4), p_3(4)\right) = (0{,}1{,}0) \cdot \begin{pmatrix} 0,2070 & 0,4040 & 0,3890 \\ 0,2020 & 0,4015 & 0,3965 \\ 0,1945 & 0,3965 & 0,4090 \end{pmatrix} = (0,2020 \;\; 0,4015 \;\; 0,3965).$$

Отже, $p_1(4) = 0,2020$; $p_2(4) = 0,4015$; $p_3(4) = 0,3965$;, тобто в кінці року ймовірності процентних ставок 12%, 13%, 14% дорівнюють відповідно $0,2020$; $0,4015$; $0,3965$. Таким чином, найімовірніше процентна ставка до кінця року залишиться такою ж, як і була в кінці попереднього року, тобто 13%.

Розглянемо випадок, коли перехідні ймовірності залежать від моментів встановлення процентних ставок. Нехай матриці перехідних ймовірностей задаються наступним чином:

$$P(1)=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}0 & 0{,}9\\ 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1\\ 0{,}2 & 0{,}8 & 0{,}0\end{pmatrix},\ P(2)=\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5\\ 0{,}6 & 0{,}0 & 0{,}4\\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}1\end{pmatrix},$$

$$P(3)=\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3\\ 0{,}0 & 0{,}6 & 0{,}4\\ 0{,}7 & 0{,}0 & 0{,}3\end{pmatrix},\ P(4)=\begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}0\\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}5\\ 0{,}5 & 0{,}0 & 0{,}5\end{pmatrix}.$$

Побудуємо розмічені графи станів, що відповідають моментам часу t_i – початок i-го кварталу ($i = 1, 2, 3, 4$) і знайдемо ймовірності станів банку в кінці року, якщо в кінці попереднього року процентна ставка була 14%.

В даному випадку ми маємо марковський дискретний неоднорідний ланцюг. При побудові розмічених графів станів системи S вказуємо тільки стрілки тих безпосередніх переходів зі стану в стан, перехідні ймовірності яких відмінні від нуля. Відповідні графи зображені на рис. 3.2-3.3.

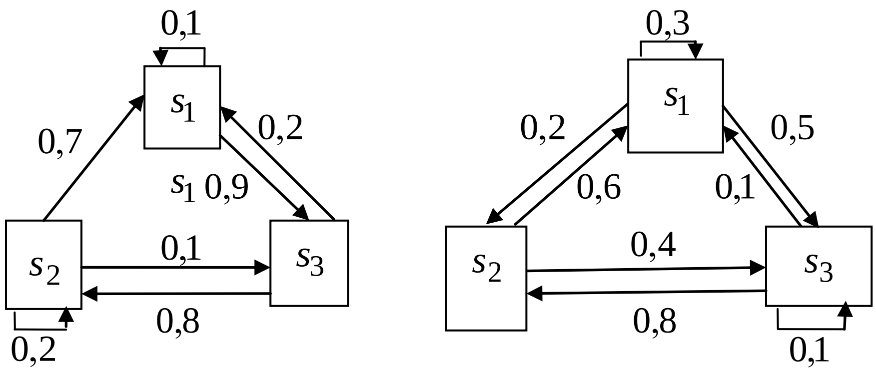

Рисунок 3.2 – Розмічені графи станів системи S відповідні $k = 1$ та $k = 2$

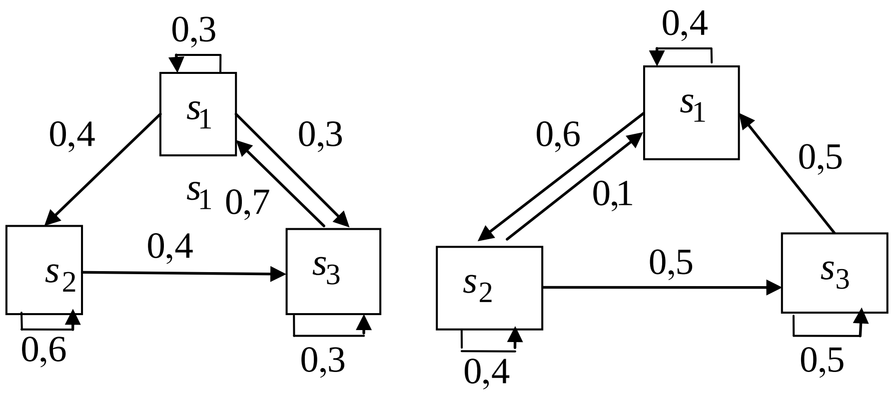

Рисунок 3.3 – Розмічені графи станів системи S відповідні $k=3$ та $k=4$

За умовою прикладу випишемо ймовірності станів в початковий момент часу $t=0$.

$$((p_1(0)), p_2(0), p_3(0)) = (0, 0, 1). \qquad (3.2)$$

Знаходимо:

$$P(1)\cdot P(2) = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,0 & 0,9 \\ 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 & 0,0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0,6 & 0,0 & 0,4 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,12 & 0,74 & 0,14 \\ 0,34 & 0,22 & 0,44 \\ 0,54 & 0,04 & 0,42 \end{pmatrix},$$

$$P(1)\cdot P(2)\cdot P(3) = \begin{pmatrix} 0,12 & 0,74 & 0,14 \\ 0,34 & 0,22 & 0,44 \\ 0,54 & 0,04 & 0,42 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,0 & 0,6 & 0,4 \\ 0,7 & 0,0 & 0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,134 & 0,492 & 0,374 \\ 0,410 & 0,268 & 0,322 \\ 0,456 & 0,240 & 0,304 \end{pmatrix},$$

$$P(1)\cdot P(2)\cdot P(3)\cdot P(4) = \begin{pmatrix} 0,134 & 0,492 & 0,374 \\ 0,410 & 0,268 & 0,322 \\ 0,456 & 0,240 & 0,304 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 & 0,0 \\ 0,1 & 0,4 & 0,5 \\ 0,5 & 0,0 & 0,5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,2898 & 0,2772 & 0,4330 \\ 0,3518 & 0,3532 & 0,2950 \\ 0,3584 & 0,3996 & 0,2750 \end{pmatrix}. \qquad (3.3)$$

За формулою (1.3) при $n=3$ і $k=4$ з урахуванням (3.2) і (3.3) будемо мати:

$$(p_1(4), p_2(4), p_3(4)) = (p_1(0), p_2(0), p_3(0)) \cdot P(1) \cdot P(2) \cdot P(3) \cdot P(4) =$$

$$= (0,\, 0,\, 1) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}2898 & 0{,}2772 & 0{,}4330 \\ 0{,}3518 & 0{,}3532 & 0{,}2950 \\ 0{,}3584 & 0{,}3696 & 0{,}2720 \end{pmatrix} = (0{,}3584 \quad 0{,}3696 \quad 0{,}2720).$$

Тобто $p_1(4) = 0{,}3584$; $p_2(4) = 0{,}3696$; $p_3(4) = 0{,}2720$. Таким чином, в кінці року, який розглядається найімовірніше процентна ставка буде 13%.

Так само як і у випадку однорідного марковського ланцюга обчислення вектора $(p_1(4), p_2(4), p_3(4))$ можна було б провести послідовним використанням формули (1.8):

$$(p_1(1), p_2(1), p_3(1)) = (p_1(0), p_2(0), p_3(0)) \cdot P(1) = (0,\, 0,\, 1) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}0 & 0{,}9 \\ 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 & 0{,}0 \end{pmatrix} =$$

$$= (0{,}2 \quad 0{,}8 \quad 0{,}0);$$

$$(p_1(2), p_2(2), p_3(2)) = (p_1(1), p_2(1), p_3(1)) \cdot P(1) \cdot P(2) =$$

$$= (0{,}2 \quad 0{,}8 \quad 0{,}0) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0{,}0 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}1 \end{pmatrix} =$$

$$= (0{,}06 + 0{,}48 \quad 0{,}04 \quad 0{,}10 + 0{,}32) = (0{,}54 \quad 0{,}04 \quad 0{,}42);$$

$$(p_1(3), p_2(3), p_3(3)) = (p_1(2), p_2(2), p_3(2)) \cdot P(1) \cdot P(2) \cdot P(3) =$$

$$= (0{,}54 \quad 0{,}04 \quad 0{,}42) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}0 & 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}7 & 0{,}0 & 0{,}3 \end{pmatrix} = (0{,}456 \quad 0{,}240 \quad 0{,}304);$$

$$\left(p_1(4), p_2(4), p_3(4)\right) = \left(p_1(3), p_2(3), p_3(3)\right) \cdot P(1) \cdot P(2) \cdot P(3) \cdot P(4) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}456 & 0{,}240 & 0{,}304 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}0 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}0 & 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3584 & 0{,}3696 & 0{,}2720 \end{pmatrix};$$

Отримали результат, що співпадає з результатом отриманим попереднім методом.

Таким чином, використання марковських ланцюгів дозволяє здійснювати прогнозування показників діяльності економічних систем, що змінюються у дискретній часовій послідовності, зокрема, банківських депозитних та кредитних процентних ставок.

3.2 Прогнозування надійності експлуатації обладнання

Методи теорії марковських процесів з неперервним часом можуть бути використані для оцінки надійності експлуатації обладнання. У даній магістерській роботі пропонується методика прогнозування надійності експлуатації обладнання на прикладі експлуатації лічильника банкнот TECHNITROL 940. Для розв’язання цієї задачі приймемо лічильник банкнот за систему S та розглянемо наступні три його стани: s_1 – лічильник справний, але не знаходиться в стані експлуатації; s_2 – лічильник справний і знаходиться в стані експлуатації; s_3– лічильник не знаходиться в стані експлуатації через несправність.

Будемо припускати, що лічильник банкнот може вийти з ладу тільки під час його експлуатації. На даному етапі вивчення ремонт несправного лічильника не передбачається, тому стан s_3 є пасткою. Будемо також вважати, що зміна щільності ймовірностей переходів системи S зі стану в стан є досить малою, так, що нею можна знехтувати. У цьому випадку щільності ймовірностей переходів практично не залежать від часу (тим більше, якщо проміжок часу, протягом якого ми аналізуємо роботу лічильника банкнот, не дуже великий). Розмічений граф станів системи наведено на рис.3.4.

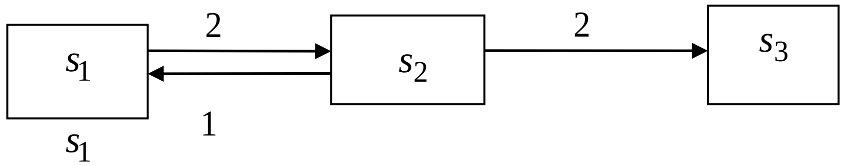

Рисунок 3.4 – Розмічений граф станів лічильника банкнот TECHNITROL 940

Знайдемо ймовірності станів лічильника в момент $t = 1$ (за одиницю часу виберемо місяць), якщо в початковий момент $t = 0$ лічильник банкнот був справний, але не експлуатувався.

Оскільки лічильник може змінювати свої стани випадковим чином в випадкові моменти часу, а в кожен момент він перебуває в одному з станів s_1, s_2, s_3, то процес, що протікає в системі S, буде дискретним випадковим процесом з неперервним часом. Даний процес можна вважати марковським, оскільки стан лічильника в майбутньому істотно залежать від його станів в даний момент часу і несуттєво залежить від його станів в минулому. Незначні коливання щільності ймовірностей переходів з плином часу дозволяють нам зробити припущення про однорідність розглянутого процесу.

Матриця щільності ймовірностей переходів, складена за графом на рис. 3.4, має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Спочатку знайдемо ймовірності станів $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$ в будь-який момент часу t.

Використовуючи перше правило, складемо систему диференціальних рівнянь Колмогорова:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_1(t)}{dt} = -2p_1(t) + p_2(t), \\ \dfrac{dp_2(t)}{dt} = -3p_2(t) + 2p_1(t), \\ \dfrac{dp_3(t)}{dt} = 2p_2(t). \end{cases} \tag{3.4}$$

У початковий момент $t = 0$ лічильник був справний, але не експлуатувався, тому система S перебувала в стані s_1 і отже, ми можемо виписати початкові умови:

$$p_1(0) = 1,\ p_2(0) = 0,\ p_3(3) = 0. \tag{3.5}$$

Перші два рівняння системи (3.4) не містять функції $p_3(t)$ і тому їх можна розглядати як систему двох рівнянь з двома невідомими функціями $p_1(t)$ і $p_2(t)$, з якої при перенесенні правих частин в ліві отримаємо:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_1(t)}{dt} + 2p_1(t) - p_2(t) = 0, \\ \dfrac{dp_2(t)}{dt} - 2p_1(t) + 3p_2(t) = 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

З теорії диференціальних рівнянь [6] відомо, що частинний розв’язок системи (3.6) шукається у вигляді показових функцій

$$p_1(t) = \gamma_1 e^{\lambda t}, \; p_2(t) = \gamma_2 e^{\lambda t}, \tag{3.7}$$

де γ_1, γ_2 і λ – сталі, які слід підібрати так, щоб функції (3.7) задовольняли системі (3.6).

Підставимо (3.7) в (3.6), потім скоротимо кожне рівняння на $e^{\lambda t}(> 0)$ та приведемо подібні доданки:

$$\begin{cases} (2+\lambda)\gamma_1 - \gamma_2 = 0, \\ -2\gamma_1 + (3+\lambda)\gamma_2 = 0. \end{cases} \tag{3.8}$$

Система (3.8) є однорідною лінійною системою двох алгебраїчних рівнянь з двома невідомими γ_1, γ_2 і параметром λ, вона завжди має тривіальний розв'язок $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 0$, який, проте, не задовольняє умовам сформульованої математичної моделі, бо у цьому випадку маємо $p_1(t) \equiv 0$, $p_2(t) \equiv 0$, що не задовольняє початковій умові (3.5). Ненульовий розв'язок системи (3.8) існує тоді і тільки тоді, коли її визначник дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} 2+\lambda & -1 \\ -2 & 3+\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Це рівняння (щодо λ) є характеристичним рівнянням системи (3.6).

Розкривши визначник в лівій частині характеристичного рівняння, одержимо квадратне рівняння щодо λ:

$$\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0,$$

корені якого можна знайти за теоремою Вієта:

$$\lambda_1 = -4, \ \lambda_2 = -1.$$

Підставивши $\lambda = \lambda_1 = -4$ в систему (3.8) і розв’язавши її, знайдемо $\gamma_2 = -2\gamma_1$. Оскільки γ_1 – вільне невідоме, то йому можна надати будь-числове значення. Покладемо $\gamma_1 = 1$. Тоді $\gamma_2 = -2$. Підставивши знайдені значення $\lambda = \lambda_1 = -4$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = -2$ в (3.7), отримаємо:

$$p_1^{[1]}(t) = e^{-4t}, \ p_2^{[1]}(t) = -2e^{-4t}. \tag{3.9}$$

Аналогічно, підставивши в систему (3.8) $\lambda = \lambda_1 = -1$ і розв’язавши її, знайдемо $\gamma_2 = \gamma_1$, звідки, вважаючи $\gamma_1 = 1$, отримаємо $\gamma_2 = 1$. Підставивши $\lambda = \lambda_1 = -1$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ у (3.7); в результаті отримаємо:

$$p_1^{[2]}(t) = e^{-t}, \ p_2^{[2]}(t) = e^{-t}. \tag{3.10}$$

З (3.9) і (3.10) складаємо загальний розв’язок системи (3.6):

$$\begin{cases} p_1(t) = C_1 p_1^{[1]}(t) + C_2 p_1^{[2]}(t) = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{-t} \\ p_2(t) = C_1 p_2^{[1]}(t) + C_2 p_2^{[2]}(t) = -2C_1 e^{-4t} + C_2 e^{-t}, \end{cases} \tag{3.11}$$

де C_1 і C_2 – довільні константи.

Для того, щоб знайти частинний розв’язок системи (3.6), який задовольняє початковим умовам

$$p_1(0) = 1, \ p_2(0) = 0, \tag{3.12}$$

треба знайти відповідні значення констант C_1 і C_2. З (3.11) і (3.12):

$$\begin{cases} p_1(0) = C_1 + C_2 = 1, \\ p_2(0) = -2C_1 + C_2 = 0. \end{cases}$$

звідки $C_1 = \frac{1}{3}$, $C_2 = \frac{2}{3}$. Підставивши ці значення C_1 і C_2 в (3.12), отримаємо шуканий розв'язок, який задовольняє початковим умовам (3.12):

$$\begin{cases} p_1(t) = \frac{1}{3}e^{-4t} + \frac{2}{3}e^{-t}, \\ p_2(t) = -\frac{2}{3}e^{-4t} + \frac{2}{3}e^{-t}. \end{cases} \tag{3.13}$$

Для знаходження функції $p_3(t)$ можна скористатися умовою нормування (2.1), з якої знаходимо:

$$p_3(t) = \frac{1}{3}e^{-4t} - \frac{4}{3}e^{-t} + 1. \tag{3.14}$$

Функцію $p_3(t)$ можна було б знайти і з третього рівняння системи (3.4), підставивши в його праву частину отриманий вираз для функції $p_2(t)$ і потім інтегруючи його.

Можна переконатися в тому, що знайдені функції (3.8) і (3.14) є ймовірними, тобто що $0 \le p_i(t) \le 1$, $i = 1, 2, 3, t \ge 0$.

З (3.13) і (3.14) підрахуємо ймовірність станів системи S в момент $t = 1$:

$$p_1(1) = \frac{1}{3}e^{-4} - \frac{2}{3}e^{-1} \approx 0{,}252, \; p_2(1) = -\frac{2}{3}e^{-4} + \frac{2}{3}e^{-1} \approx 0{,}234,$$

$$p_3(1) = 1 - 0{,}252 - 0{,}234 = 0{,}514.$$

Отже, при заданих на розміченому графі на рис.3.6 станах лічильника банкнот TECHNITROL 940 і початкових умовах (3.5) ймовірність того, що в момент $t=1$ лічильник

а) справний, але не експлуатується, приблизно дорівнює $0{,}252$;

б) справний і знаходиться в стані експлуатації, приблизно дорівнює $0{,}234$;

в) не експлуатується через несправність, наближено дорівнює $0{,}514$;

Таким чином, якість лічильника на момент $t=1$ потребує поліпшення.

3.3 Застосування ланцюгів Маркова до дослідження моделі Леонтьєва

Відкрита модель Леонтьєва. У моделі Леонтьєва витрат-випуску (input-output model) розглядається економічна система, що складається з r галузей. Ми припускаємо для простоти, що кожна галузь виробляє тільки один вид товарів. Природні чинники – такі, як земельні, лісові, мінеральні та ін. Ресурси – ми вважаємо вільними для безоплатного користування і не включаємо їх у вартість кінцевої продукції. Взагалі кажучи, галузі пов’язані між собою в тому сенсі, що кожна повинна закуповувати певну невід’ємну кількість продукції іншої галузі, щоб продовжувати своє виробництво. Визначимо технологічні коефіцієнти таким чином: q_{ij} – це кількість продукції j-й галузі, яку i-а галузь повинна придбати для того, щоб самій зробити товарів на один долар. Нехай Q – квадратна матриця порядку r з елементами q_{ij}. За визначенням технологічні коефіцієнти невід’ємні.

Сума всіх q_{ij} при фіксованому i є величина тих витрат, які повинна зробити i-а галузь, щоб виробити товарів на 1 долар. Щоб i-а галузь приносила прибуток або хоча б не терпіла збитків, ця сума не повинна перевищувати величини випуску, тобто має бути

$$q_{i1} + q_{i2} + .. q_{ir} \le 1.$$

Природно назвати i-ю галузь прибутковою, якщо виконується суворе нерівність, і безприбуткової, якщо має місце рівність. Ми допускаємо, що будь-яка галузь є або прибутковою, або неприбутковою, тобто виключаємо можливість збиткових галузей.

Сформульовані умови можна записати як

$$Q \ge 0, \tag{3.15}$$

$$Q\xi \le \xi. \tag{3.16}$$

Розглянувши витрати галузей, перейдемо тепер до продукції, що випускається ними продукції. Нехай x_i – грошова вартість продукції i-й галузі, і нехай $\pi = (x_1, x_2, .. x_r)$ – вектор-рядок цих вартостей. Так як i-а галузь потребує продукції j-ї галузі в кількості $x_i q_{ij}$, то вектор необхідних витрат просто дорівнює πQ. Іншими словами, j -а компонента вектора πQ дає вартість тієї частини продукції j -ї галузі, яку вона повинна зробити, щоб задовольнити потреби всіх галузей в своїй продукції

Нехай з продукції i-ї галузі сума c_i йде на кінцеве споживання.

Введемо вектор споживання $\gamma = (c_1, c_2, .. c_i)$, ми вимагаємо, щоб

$$\gamma \ge 0. \tag{3.17}$$

Тепер легко записати у векторній формі вимогу, щоб економіка була збалансована так, що і міжгалузеві потреби, і потреби кі нцевого споживання були задоволені

$$\pi = \pi Q + \gamma . \tag{3.18}$$

Переписавши (3.18) у вигляді

$$\pi(I - Q) = \gamma , \tag{3.19}$$

ми бачимо, що це – система r рівнянь з r невідомими.

Ми повинні знайти невід'ємні рішення системи (3.19) (тільки вони і мають економічний сенс). Так як вектор попиту γ може бути довільним, то система рівнянь (3.19), взагалі кажучи, неоднорідна і має рішення тоді і тільки тоді, коли матриця $I - Q$ має зворотну. Більш того, рішення системи (3.19) будуть невід'ємні при будь-якому γ тоді і тільки тоді, коли всі елементи матриці $(I - Q)^{-1}$ невід'ємні. Тому нам треба знайти необхідні і достатні умови того, щоб матриця, обернена до $I - Q$, була невід'ємна.

Ми вирішимо це завдання за допомогою занурення нашої моделі в ланцюг Маркова.

Під ланцюгом Маркова, приєднаним до моделі витрат – випуску, ми будемо розуміти ланцюг Маркова з наступними властивостями:

а) станами служать r галузей моделі плюс ще один додатковий поглинаючий стан s_0, що відповідає банку;

б) матриця P перехідних ймовірностей визначається наступним чином

$$p_{00} = 1,$$

$$p_{0j} = 0 , \; j > 0 ,$$

$$p_{ij} = q_{ij} , \; i, j > 0 ,$$

$$p_{i0} = 1 - \sum_{j=i}^{r} q_{ij} , \; i > 0 .$$

Ось інтуїтивна інтерпретація цього ланцюга. Коли в i-у галузь надходить 1 долар, то вона використовує його, витрачаючи на придбання продукції j -і галузі. Залишок цього долара, якщо він є – тобто величина p_{i0}, – це прибуток, ми можемо вважати, що вона надходить в банк. Банк є поглинальним станом, тобто отримує гроші, але не витрачає їх.

Тепер відразу видно, що якщо матриця Q задовольняє умовам (1) і (2), то невід'ємний розв’язок системи (3.19) існує при будь-якому $r \geq 0$ тоді і тільки тоді, коли приєднаний ланцюг Маркова є поглинальним, причому банк s_0 є єдиним поглинальним станом. Дійсно, якщо s_0 – єдиний поглинаючий стан у поглинальному ланцюгу, то матриця $N = (I - Q)^{-1}$ існує і невід’ємна; значить, $\pi = \gamma N$ є шуканим розв’язком. В іншому випадку матриця $(I - Q)^{-1}$, яка дає середній час перебування в різних станах до досягнення s_0, матиме нескінченні елементи, тобто вона не існує.

Цей результат можна просто пояснити з економічної точки зору. Як ми переконалися, ланцюг повинен бути влаштований так, щоб з кожного стану можна було «добратися» до банку. Безпосередньо в банк «потрапляє» тільки прибуткова галузь, неприбуткова повинна потрапити в банк через прибуткову. Значить, наша умова означає, що кожна галузь або прибуткова, або залежить від прибуткової галузі. Наприклад, якщо припустити, що кожна галузь залежить від праці, і праця є прибутковою (мабуть, це означає, що плата за працю вище, ніж зарплата, що покриває вартість засобів існування), то наша умова виконується, і, отже, система може задовольнити будь-який попит.

Якщо наведена умова порушується, то економічна система вже не володіє цією властивістю. Подивимося, який попит вона може задовольнити. Перш за все розглянемо випадок, коли немає прибуткових галузей. Це означає, що кожна галузь витрачає все, що виробляє, на закупівлю сировини, і не може задовольнити жодного стороннього попиту.

Якщо немає прибуткових галузей, то сума елементів кожного рядка матриці Q дорівнює 1, тобто $Q\xi = \xi$. Якщо ми помножимо рівняння (3.18) на ξ справа, то отримаємо

$$\pi\xi = \pi Q\xi + \gamma\xi = \pi\xi + \gamma\xi,$$

звідки $\gamma\xi = 0$. Це означає, що сумарний сторонній попит дорівнює 0. Отже, ніякої попит не може бути задоволений.

Розглянемо тепер загальний випадок порушення нашого умови. В цьому випадку приєднаний ланцюг Маркова не є поглинальним ланцюгом з єдиним поглинальним станом. Значить, має існувати ергодична множина, відмінна від $\{s_0\}$, тобто повинна існувати замкнута група галузей, кожна з яких безприбуткові і не залежить ні від однієї галузі поза цієї групи. Розглянемо множину всіх таких галузей, тобто об'єднання всіх ергодичної множин, відмінних від $\{s_0\}$. Підматриця $\overline{Q}$ для цих галузей має доведену вище властивість $Q\xi = \xi$ і, отже, не може задовольнити жодного стороннього попиту. Тому і вся економічна система не може задовольнити попит на товари, вироблені цими галузями. Неможливим є також постачання тих товарів, виробництво яких вимагає в якості сировини продукції цих галузей, оскільки по відношенню до замкнутої групі галузей це було б стороннім попитом.

Однак якщо ми видалимо цю замкнуту групу неприбуткових галузей разом з тими, які від них залежать, то для решти галузей (якщо вони знайдуться) наша вимога буде виконана, і вони зможуть задовольнити будь-який попит. Отже, якщо є такі галузі, що не залежать пі від однієї прибуткової галузі, то ні вони, ні будь-яка галузь, від них залежить, не можуть задовольнити попит з боку. Решта галузей можуть задовольнити будь-який попит. У термінах ланцюгів Маркова це означає, що будь-який ергодичний стан (відмінний від s_0), або будь-який безповоротний стан, з якого такого стану можна досягти, не може задовольнити ніякого попиту.

Щоб з'ясувати, які галузі можуть підтримати попит, ми використовуємо наступний простий алгоритм для класифікації станів.

а) зробимо позначку проти кожного рядка матриці Q, сума елементів якого менше 1, іншими словами, відзначимо все рядки, що відповідають прибутковим галузям;

б) відзначимо стовпці з тими ж номерами, що зазначені рядки, потім в цих стовпцях відзначимо рядки, все елементи яких є додатними;

в) будемо повторювати операцію (б) до тих пір, поки не перестанемо отримувати нові рядки. Тоді можливі два остаточних результату:

1) всі рядки будуть відзначені;

2) не всі рядки будуть відзначені.

Якщо має місце випадок (1), то приєднаний ланцюг Маркова є поглинальним з єдиним поглинаючим станом s_0. Якщо маємо випадок (2), то невідмічені рядки і дадуть максимальну замкнуту групу з збиткових галузей. Ми можемо знайти їхні капітали, які залежать від них, позначивши ці рядки (попередньо видаливши колишні позначки і повторно застосовуючи операцію (б). Будь-який стан, позначений таким чином, не може задовольняти сторонній попит.

Таким чином, ми бачимо, що питання про те, який попит може задовольняти економічна система, вирішується за допомогою дуже простого алгоритму. «Обчислити» потрібно тільки суми елементів рядків, а потім зробити просту ітерацію, при якій перевіряється тільки додатність елементів. Цей алгоритм зручний навіть для дуже великих матриць.

Галузі, які не можуть задовольнити ніякого попиту з боку, утворюють абсолютно непотрібну частину економічної системи. Починаючи з цього моменту, ми припустимо, що вони виключені з розгляду; тоді $(I-Q)^{-1}$ існує.

Визначимо частку вартості стороннього замовлення для i-ї галузі, яка надійде у якості прибутку іншим галузям.

Перш за все потрібно визначити, яким буде загальний попит на продукцію різних галузей. В даному випадку γ – це вектор, у якого i-я компонента дорівнює 1, а решта – нулі. Значить, $\pi = \gamma N$ – це просто i-й рядок матриці N. Таким чином, елементи матриці N отримують просте тлумачення: n_{ij} – це кількість продукції , яку має виробити j-а галузь, щоб галузь i виконала замовлення на 1 долар. Оскільки j-а галузь отримує p_{j0} прибутку з продукції вартістю в 1 долар, то галузь j отримує прибуток $n_{ij} p_{j0}$.

Сума всіх прибутків дорівнює $\sum_j n_{ij} p_{j0} = b_{i0} = 1$ (так як s_0 – єдиний поглинаючий стан). Звідси видно, що долар, сплачений замовником, осідає як прибуток в прибутково працюючих галузях.

З цим пов’язане і таке питання: якщо i-а галузь отримує замовлення на 1 долар, то до якої ділової активності це призведе? Від галузі j потрібно n_{ij} одиниць продукції. Сума їх дорівнює t_i – i-й компоненті вектора τ. Вона, як правило, набагато більше одиниці. Для вектора попиту γ загальна продукція дорівнює $\gamma N \xi = \gamma \tau$.

Розглянемо приклад. Нехай технологічні коефіцієнти для шести галузей задаються матрицею.

$$Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

тоді

$$P=\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{l} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \end{array}.$$

З першого стовпчика видно, що s_1, s_2 та s_6 – прибуткові галузі. Класифікація станів показана на рис. 3 5.

Тут $\{s_4, s_5\}$ – ергодична множина збиткових галузей, які не залежать від прибуткових галузей.

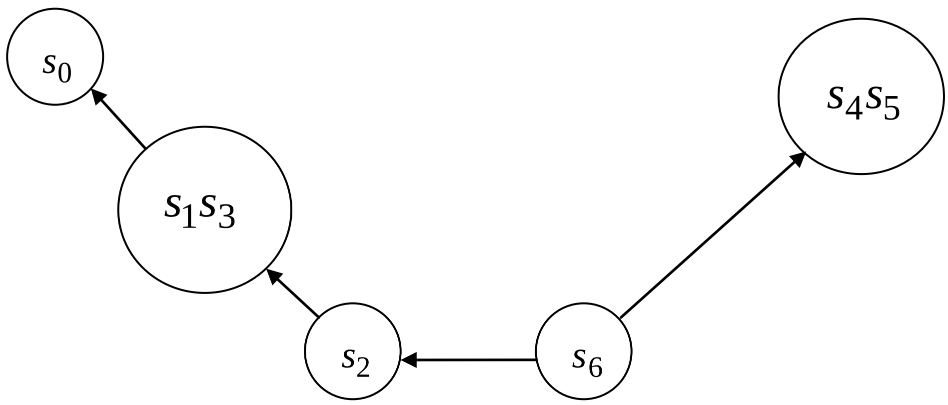

Рисунок 3.5 – Класифікація станів

Галузь s_6 прибуткова, але залежить від $\{s_4, s_5\}$. Отже, s_4, s_5, s_6 можуть бути виключені. Галузь s_3 є безприбутковою, але не зайвою. Скорочена матриця перехідних ймовірностей дорівнює

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{array}{l} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{array}.$$

Значить,

$$N=\begin{pmatrix}4 & 0 & 2\\ 8/3 & 4/3 & 2\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix},\ \tau=\begin{pmatrix}6\\ 6\\ 8\end{pmatrix}.$$

Так, наприклад, замовлення на 1 долар галузі s_2 стимулює виробництво продукції всього на 6 доларів, з них на $8/3$, у s_1, на $4/3$ у s_2 і на 2 у s_3. З цього долара s_1 отримує прибуток $8/3\cdot 1/4=2/3$, s_2 прибуток $4/3\cdot 1/4=1/3$ і s_3 – прибуток $2\cdot 0=0$ (s_3 безприбуткова).

Якщо ми визначимо попит $\gamma=(1,2,3)$, то наші галузі зроблять $\gamma N=(20,4,16)$ одиниць продукції. Вартість всієї продукції буде $\gamma\tau=40$ доларів.

Зауважимо, що P Р допускає укрупнення станів $[\{s_0\},\{s_1,s_2\},\{s_3\}]$. Для укрупненого процесу

$$\widehat{P}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1/4 & 1/2 & 1/4\\ 0 & 1/2 & 1/2\end{pmatrix},$$

$$\widehat{N}=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 4 & 4\end{pmatrix},$$

$$\widehat{\tau}=\begin{pmatrix}6\\ 8\end{pmatrix}.$$

Якщо $\widehat{\gamma} = (4, 2)$, то $\widehat{\gamma}\widehat{N} = (24, 16)$, $\widehat{\gamma}\widehat{\tau} = 40$. Об'єднані галузі s_1 і s_2 розглядаються тут як одна «галузева група». При використанні цього процесу виходить попит з усією галузевої групи, без підрозділи його на запити окремих галузях.

В реальних задачах обчислення можуть виявитися практично нездійсненні Тому важливо об'єднати галузі економічної системи. Умова можливості укрупнення приймає тут такий вигляд: всі галузі однієї галузевої групи вимагають однакову кількість продукції від членів (цієї або) іншої галузевої групи при замовленні на одиницю продукції. Цей спосіб може дати хороші наближення. Укрупнення дозволяє розглядати галузеві групи як основні об'єкти і призводить до меншої моделі, зручнішої для обчислень.

ВИСНОВКИ

Виконане дослідження свідчить, що застосування стохастичних математичних моделей, зокрема, ланцюгів Маркова, дозволяє успішно здійснювати аналіз та прогнозування реальних економічних систем та приймати націй основі ефективні управлінські рішення.

У першому розділі магістерської роботи розглянуто сутність та основні характеристики марковських випадкових процесів. Надано означення основних елементів математичного, моделювання, пов’язаних з використанням математичного апарату марковських ланцюгів. Розглянуто також основні характеристики ергодичних систем. Досліджено властивості марковського процесу з дискретним часом, види марковських ланцюгів.

Другий розділ містить дослідження марковських процесів з неперервним часом, при яких система може змінювати свій стан у будь-який момент часу. Такі процеси у багатьох випадках найбільш адекватно відображають реальні економічні процеси. Тут розглядаються дискретні процеси з неперервним часом, а також методи побудови системи диференціальних рівнянь Колмогорова, які дають можливість визначити ймовірність окремих станів економічної системи як функцій часу.

У третьому розділі кваліфікаційної роботи магістра на основі викладених раніше основних теоретичних відомостей здійснюється аналіз та прогнозування стану економічних систем та процесів на основі апарату марковських ланцюгів. Цей апарат застосовано для побудови математичних моделей встановлення банківських депозитних процентних ставок, прогнозування надійності експлуатації банківського обладнання – лічильника банкнот та для дослідження моделі «витрати – випуск» Леонтьєва.

При моделюванні банківських депозитних процентних ставок застосовано ланцюг Маркова з дискретним часом, розглянуто випадки однорідного та неоднорідного процесів. Запропонована модель може застосовуватись також для прогнозування банківських кредитних ставок.

Застосування теорії марковських процесів з неперервним часом дозволило запропонувати методику прогнозування надійності експлуатації банківського обладнання на прикладі лічильника банкнот TECHNITROL 940. Для цього побудовано та розв'язано диференціальні рівняння Колмогорова, з яких визначено залежності можливостей перебування приладу у певних технічних станах від часу. Ланцюг Маркова використано також для побудови алгоритму визначення продуктивності моделі «витрати – випуск» Леонтьєва.

Використання ланцюгів Маркова дозволяє об'єднувати окремі галузі у галузеві групи та розглядати їх у якості основних об'єктів для побудови моделі Леонтьєва. Це дозволило отримати придатну для практичного застосування математичну модель. Отже, теорія ланцюгів Маркова дозволяє вдосконалити процес побудови та дослідження моделі Леонтьєва «витрати-випуск».

Подальший розвиток економічних досліджень пов'язаний з розширенням сфери застосування математичного моделювання, зокрема, з використанням стохастичних моделей, що ґрунтуються на використанні марковських ланцюгів.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Бережная Е. В., Бережной В. И. Математические методы моделирования экономических систем. Москва : Финансы и статистика. 2010. 368 с.

2. Бочаров П. П., Касимов Ю. Ф. Финансовая математика. Москва : Гардарики, 2002. 642 с.

3. Вітлінський В. В. Моделювання економіки. Київ : КНЕУ. 2016. 296 с.

4. Экономико-математическое моделирование. Учебник для вузов. / Под ред. И.Н. Дрогобицкого. Москва : Экзамен. 2004. 800 с.

5. Замков О. О., Толстопятенко А. В., Черемных Ю. Н. Математические методы в экономике. Москва : Дело и сервис. 2014. 368 с.

6. Колемаев В. А. Математическая экономика. Москва : ЮНИТИ. 2015. 399 с.

7. Колемаев В. А. Экономико-математическое моделирование: моделирование макроэкономических процессов и систем. Москва : ЮНИТИ, 2005. 295 с.

8. Иванилов Ю. П., Лотов А. В. Математические модели в экономике. Москва : Наука. 1999. 304 с.

9. Красс М. Математика в экономике. Базовый курс. Москва : Юрайт, 2014. 471 с.

10. Монахов А. В. Математические методы анализа экономики. Санкт - Петербург : Питер. 2013. 176 с.

11. Попов А. М., Сотников В. И. Экономико-математические методы и модели. Москва : Юрайт. 2011. 479 с.

12. Приймак В. І. Математичні методи економічного аналізу. Київ : ЦУЛ. 2009. 277 с.

13. Трояновский В. М. Математическое моделирование в менеджменте. Москва : РДЛ. 256 с.

14. Таха Х. А. Введение в исследование операций. Москва : Вильямс. 2011. 912 с.

15. Шелобаев С. И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе. Москва : ЮНИТИ. 2011. 367 с.