

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра загальної математики

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА

на тему: «**ПОБУДОВА, ДОСЛІДЖЕННЯ ТА
ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ
ЗАДАЧ ПРО ПОКРИТТЯ**»

Виконала: студентка 2 курсу, групи 8.1118-з
спеціальності 111 математика
(шифр і назва спеціальності)
освітньої програми математика
(назва освітньої програми)

І. А. Дорошенко

(ініціали та прізвище)

Керівник завідувач кафедри загальної математики,
доцент, к.ф.-м.н., Зіновєєв І. В.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, підпис, ініціали та прізвище)

Рецензент доцент кафедри фундаментальної
математики, доцент, к.ф.-м.н., Клименко М. І.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, підпис, ініціали та прізвище)

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання _____ 30.05.2019 _____

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	07.06.2019	
2.	Збір вихідних даних.	14.06.2019	
3.	Обробка методичних та теоретичних джерел.	27.06.2019	
4.	Розробка першого та другого розділу.	30.08.2019	
5.	Розробка третього розділу.	25.10.2019	
6.	Оформлення та нормоконтроль кваліфікаційної роботи.	26.12.2019	
7.	Захист кваліфікаційної роботи.	08–11.01.2020	

Студент _____
(підпис)

І. А. Дорошенко _____
(ініціали та прізвище)

Керівник роботи _____
(підпис)

І. В. Зіновєєв _____
(ініціали та прізвище)

Нормоконтроль пройдено

Нормоконтролер _____
(підпис)

О. Г. Спиця _____
(ініціали та прізвище)

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Побудова, дослідження та застосування математичних моделей задач про покриття»: 53 с., 15 рис., 25 джерел.

АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗКУ, ВЛАСТИВОСТІ МОДЕЛЕЙ, ГЕОМЕТРИЧНЕ ПОКРИТТЯ, ГІЛЬЙОТИННИЙ РОЗКРІЙ, ГРАНИЧНИЙ ПЕРЕБОР, ЗАДАЧІ РОЗКРОЮ ТА ПАКУВАННЯ, ЛІНІЙНИЙ ЦІЛОЧИСЕЛЬНИЙ РОЗКРІЙ, МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ, МОДЕЛЬ, ПОВНИЙ ПЕРЕБОР, ПРЯМОКУТНИЙ РОЗКРІЙ ІЗ ЗАБОРОНАМИ, СКОРОЧЕННЯ ТАБЛИЦЬ ПОКРИТТЯ.

Об'єкт дослідження – задачі про покриття.

Мета роботи – дослідження розв'язання задач про покриття, побудова та застосування математичних моделей для розв'язування задач про покриття.

Метод дослідження – аналітичний, порівняння, синтез.

У кваліфікаційній роботі розглянуто поняття математичного моделювання, застосування математичних моделей до розв'язку задач про покриття. Розглянуті алгоритми розв'язку, а саме, алгоритм повного перебору, граничного перебору по увігнутій множині, алгоритм побудови циклічного залишку для таблиць покриття та наближеного розв'язку задач про покриття. Розглянуті окремі класи задач розкрою, пакування та геометричного покриття. На конкретних прикладах розглянуто застосування описаних методів. Результати дослідження являються ефективним інструментом розв'язання NP–складної комплексної задачі геометричного покриття і розкрою і мають потенціал для подальшого удосконалення.

SUMMARY

Master's Qualification Thesis «Construction, Research and Application of the Coating Problems Mathematical Models»: 53 pages, 15 figures, 25 references.

RESOLUTION ALGORITHM, AUTHORITY OF MODELS, GEOMETRIC COATINGS, GUILLOTINE INTERSECTION, BORDERS, OPENING AND PACKAGING TASKS, LINEAR INTRODUCTION, MATHEMATICAL MODELING, MODEL, FULL READY, RECTANGULAR CROSS-CUTTING, ABBREVIATIONS OF COVER TABLES.

Object of the study – coverage problems.

The purpose of the study is to investigate the solution of coverage problems, the construction and application of mathematical models for the solution of coverage problems.

The methods of research – analytical, comparison, synthesis.

The qualification work deals with the concepts of mathematical modeling, the application of mathematical models to solving problems of coverage. The algorithms of the solution are considered, namely, the algorithm of complete search, limit search by concave set, algorithm of construction of a cyclic residue for the coverage tables and the approximate solution of the coverage problems. Separate classes of cutting, packing and geometric coating problems are considered. Application of the described methods is considered in specific examples. The research results are an effective tool for solving the NP-complex complex problem of geometric coating and cutting and have the potential for further refinement.

ЗМІСТ

Завдання на кваліфікаційну роботу.....	2
Реферат.....	4
Summary.....	5
Вступ.....	8
1 Основні поняття математичного моделювання.....	10
1.1 Визначення поняття математичного моделювання	10
1.2 Наукова основа моделювання	10
1.3 Найважливіші властивості моделей	12
1.4 Схема застосування математичного моделювання	13
1.5 Висновки за I розділом.....	15
2 Огляд основних понять задач про покриття та методи їх розв'язань...	16
2.1 Постановка задачі покриття.....	16
2.2 Алгоритми розв'язку.....	19
2.2.1 Алгоритм повного перебору.....	19
2.2.2 Алгоритм граничного перебору по угнутій множині.....	20
2.2.3 Алгоритми, які використовують скорочення таблиць покриття.....	22
2.2.4 Алгоритм побудови циклічного залишку для таблиць покриття.....	23
2.3 Окремі класи задач розкрою та пакування.....	24
2.3.1 Задача плоского цілочисленого розкрою і задача покриття графів	24
2.3.2 Лінійний цілочисленний розкрій.....	26
2.3.3 Прямокутний цілочисленний розкрій	26
2.3.4 Прямокутний розкрій із заборонами	27
2.3.5 Гільйотинний розкрій	29
2.4 Висновки за II розділом.....	30
3 Застосування математичних моделей задач про покриття.....	32

3.1	Задача геометричного покриття і розкрою.....	32
3.1.1	Постановка комплексної задачі геометричного покриття і розкрою.....	33
3.1.2	Математична модель комплексної задачі геометричного покриття і розкрою.....	35
3.2	Розв'язання комплексної задачі геометричного покриття і розкрою	40
3.3	Задача розкрою ортогонального ресурсу	45
3.3.1	Розв'язок практичної комплексної задачі геометричного покриття і розкрою.....	46
3.3.2	Розв'язок безвідходної комплексної задачі геометричного покриття і розкрою.....	48
3.4	Висновки за III розділом.....	49
	Висновки.....	50
	Перелік посилань.....	51

ВСТУП

Люди здавна цікавляться, як влаштовано наш Всесвіт. Вчені будували свої уявлення у вигляді схем – картин світу, в яких об'єкти Всесвіту – Сонце і зірки, планети, Земля і Місяць зображувалися крапками, що рухаються по кривим траєкторіям. Ці схеми, ці картини світу – суть моделі Всесвіту, а метод дослідження Всесвіту, знаходження законів про Всесвіт і рішення задач, пов'язаних з ним, за допомогою цих моделей – є методом моделювання.

Моделювання в даний час отримало надзвичайно широкий розвиток і застосування в різних областях знань: філософських, гуманітарних, математичних, фізичних, радіо– і електротехнічних, фізіологічних і біологічних і т.п. Моделювання – один з головних способів пізнання навколишнього світу.

Питання моделювання розглядалися в роботах філософів (В. А. Штофа [24], І. Б. Новіка [11], А.І. Уємова [19] та інших), фахівців з педагогіки і психології (Л. М. Фрідмана [21], Б. А. Глинського [4] та інших). Майже у всіх європейських мовах воно вживалося для позначення способу або прообразу, або предмету, подібного в якомусь відношенні з іншим предметом.

Метод математичного моделювання є потужним інструментом для дослідження різних процесів, систем і завдань, для успішного освоєння якого потрібно не тільки мати теоретичні знання, а й уміння поставити і розв'язати прикладну задачу, що виникає в конкретній ситуації.

Математичне моделювання – приватний випадок моделювання. Являється найважливішим видом знакового моделювання і здійснюється засобами мови математики.

Математичне моделювання передбачає використання в якості специфічного засобу дослідження оригіналу його математичну модель, вивчення якої дає нову інформацію про об'єкт пізнання, його закономірності.

Відомо, що для математичного дослідження процесів і явищ, які реально відбуваються в дійсності, треба зуміти описати їх на мові математиці, тобто побудувати математичну модель процесу, явища. Математичні моделі і є об'єктами безпосереднього математичного дослідження.

Математична модель — це наближений опис будь-якого класу явищ, виражене мовою математичної теорії [24].

1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

1.1 Визначення поняття математичного моделювання

У своїй роботі «Моделювання та філософія» В.А. Штоф дає наступне визначення моделі: «Під моделлю розуміють таку систему, яка відображає і відтворює об'єкт так, що його вивчення дає нову інформацію про цей об'єкт» [25, с 19].

А.А. Зінов'єв та І.І. Ревзін підкреслюють, що модель – засіб отримання знань, а не самі ці знання [6, с.83].

«Модель – це об'єкт-замінник, створений з метою відтворення за певних умов істотних властивостей об'єкта-оригіналу. Модель може бути представлена фізичним об'єктом, подібним оригіналу, або описом об'єкта у вигляді математичних формул, тексту, комп'ютерної програми» [8].

Таким чином, незалежно від термінології, можна сказати, що під моделлю розуміють такий матеріальний чи подумки представлений об'єкт, який у процесі пізнання (вивчення) заміщає об'єкт – оригінал, зберігаючи деякі важливі для даного дослідження типові риси.

«Метою моделювання є здобуття, обробка, представлення і використання інформації про об'єкти, які взаємодіють між собою і зовнішнім середовищем; а модель тут виступає як засіб пізнання властивостей і закономірностей поведінки об'єкту» [8].

1.2 Наукова основа моделювання

Науковою основою моделювання являється теорія аналогії, в якій основним поняттям є поняття аналогії – схожість об'єктів за їх якісними та кількісними ознаками. Всі ці види об'єднуються поняттям узагальненої

аналогії – абстракцією. Аналогія являє собою відповідність між об'єктами, моделлю та оригіналом [2].

Взагалі, аналогія – це ланка між моделлю та об'єктом. Функція цієї ланки полягає в наступному:

- в порівнянні різних об'єктів, виявленні та аналізі певної подібності деяких властивостей цих об'єктів;

- в операціях міркування і висновків по аналогії.

Дуже ясно про прийоми, які використовуються при моделюванні, пише С.Ю. Полякова в дисертаційному дослідженні:

«Висновок за аналогією – прийом, при якому з подібності деяких ознак двох та більше предметів, явищ робиться висновок про подібність інших ознак цих предметів, явищ.

Прийом гіпотез – спосіб висування обґрунтованих теоретичних припущень. При неможливості перевірити правильність гіпотези в середовищі самого об'єкта її припущення переводять в модельну середу аналогів об'єкта.

Прийом синтезу – процес створення з розрізнених фактів єдиного, цілого.

Прийом абстрагування – створений цілісний аналог, для того, щоб бути корисним, підлягає можливим спрощенням, виділенням одного найцікавішого параметра для вивчення, зневагою малоістотними.

Прийом аналізу – спостерігаючи за конкретним, ми абстрагуємося від несуттєвого і усвідомлюємо абстракції. Потім втілюємо ці абстракції в моделі, проводимо експерименти з метою виявлення і опису більш повного, конкретного змісту об'єкта у вигляді нових властивостей у доступній для дослідження моделі. Отриманні знання переносимо на об'єкт, що вивчається. Далі розглядаємо оригінал на новому теоретичному рівні, починаючи з виділення нових властивостей, пошуку нових знань шляхом абстрагування і

створення моделей, повторюючи пройдені етапи. Таким чином, відбувається конкретизація знань про модель.

Прийом експерименту – більш уточнена перевірка на відповідність статусу моделі аналога, раніше вже аналізованого на принципову несуперечливість» [15, с. 21–22].

Моделювання є багатофункціональним, тобто воно використовується найрізноманітнішим чином для різних цілей на різних рівнях (етапах) дослідження або перетворення. У зв'язку з цим, багатовікова практика використання моделей надала нам різноманітні форми і типи моделей.

1.3 Найважливіші властивості моделей

Є.М. Вечтомов каже, що «математична модель реальної ситуації – це цілком певний опис даного явища, виражений мовою формул» [3, с. 56]. Крім того, він розглядає деякі найважливіші властивості моделей:

а) адекватність (теоретичну відповідність реальності) і застосовність (практична користь) моделі. Кажучи про адекватність, автор акцентує увагу на певній структурній складності моделі, в той час як застосовність моделі означає здійсненність модельних обчислень;

б) простота і складність моделі. Відзначається достатня умовність цих понять. Якщо взяти дві моделі одного і того ж явища, то порівняти їх за складністю цілком можливо;

в) жорсткі і м'які моделі. Жорстка модель досить примітивна і проста, містить невелику кількість параметрів, які, як правило, є константами. М'яка складніша, має більшу кількість параметрів, які дозволяють враховувати мінливий стан системи [3, с. 60–61].

З вище перерахованих властивостей можна зробити висновок, що обрана модель досліджуваного явища не повинна бути занадто простою для

адекватного відображення ситуації і занадто складною для реальної можливості її використання.

1.4 Схема застосування математичного моделювання

Метод математичного моделювання застосовується до наукового дослідження дійсності, тобто до вирішення реальних завдань [23]. На сьогоднішній день найбільш поширеною є триетапна схема процесу:

а) переклад запропонованого завдання на мову математичних термінів, тобто побудова математичної моделі задачі (формалізація). На цьому етапі зазвичай обходяться відомим математичним апаратом [3, с. 59–60];

б) розв’язок задачі в рамках математичної теорії;

в) переклад отриманого результату (математичного розв’язку) на ту мову, на якій було сформульовано вихідну задачу.

Розглянемо задачу.

Приклад 1.1 Вікно має форму прямокутника, завершеного зверху півколом. Вкажіть такі розміри вікна, щоб при даному периметрі l воно пропускало більше світла [7].

Розв’язок. *I етап.* Формалізація. Будуємо математичну модель задачі.

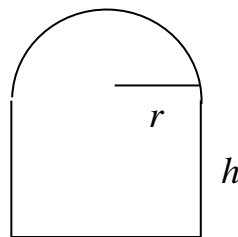


Рисунок 1.1 – Ілюстрація до прикладу 1.1

Потрібно знайти розміри вікна з найбільшою площею. Позначимо розміри: r – радіус півкола, h – висота прямокутника, тоді основа прямокутника – $2r$.

Щоб визначити, яку із змінних вибрати аргументом досліджуваної функції, треба подивитися, яка з них простіше виражається через іншу:

$$1 = 2r + 2h + \pi r, \quad h = \frac{l - (2 + \pi)r}{2}, \quad r = \frac{l - 2h}{2 + \pi}.$$

Зручніше вибрати r , тому що для позначення площі знадобиться r^2 , а h входить в цей вираз лінійно.

$$S(r) = \frac{\pi r^2}{2} + lr - r^2(2 + \pi).$$

Ця функція і є модель даної задачі.

II етап. Внутрішнє модельне рішення. Ясно, що $0 < r < \frac{1}{2}$.

Знайдемо похідну функції $S(r)$:

$$S' = \pi r + l - 2r(2 + \pi).$$

Скористаємося необхідною умовою екстремуму: $1 - r(\pi + 4) = 0$.

Звідки $r = \frac{l}{\pi + 4}$. З міркувань здорового глузду вікно не може мати меншу площу, тому знайдене значення r – точка максимуму. При цьому

$$r = h = \frac{l}{\pi + 4}.$$

III етап. Інтерпретація. Переведемо результат з математичної мови на мову вихідної задачі. Щоб при цьому периметрі l вікно пропускало більше світла, необхідно встановити наступні розміри вікна:

$$r = h = \frac{l}{\pi + 4}.$$

1.5 Висновки за I розділом

Таким чином, в даному розділі ми ознайомилися з поняттям математичного моделювання та найважливішими властивостями моделей, розглянули найбільш поширену триетапну схему процесу моделювання, застосувавши її для розв'язку задачі. Метод математичного моделювання є потужним інструментом для дослідження різних процесів і систем.

2 ОГЛЯД ОСНОВНИХ ЗАДАЧ ПРО ПОКРИТТЯ ТА МЕТОДИ ЇХ РОЗВ'ЯЗАНЬ

2.1 Постановова задачі покриття

Задачі геометричного покриття досліджуються останні десятиліття. Постановки мають велику різноманітність, яку диктує практична спрямованість [5, 10, 16, 18, 20]. Як правило, метою їх розв'язання є мінімізація кількості предметів (елементів), які покривають задану площу. Наприклад, в [16, 20] розглянуті випадки покриття багатокутної області мінімальною кількістю кіл заданого радіуса. Зустрічаються задачі, мета яких – максимізація покритої області [18]. Основна відмінність постановок задач розкрою-упаковки і геометричного покриття полягає в обмеженнях: в задачах геометричного покриття необхідно розміщувати елементи без «просвітів» між ними, а в деяких випадках [5, 16, 20] дозволяється перетин елементів між собою і сторонами області, яка покривається; в задачах розкрою-упаковки подібне перекриття не допускається. Незважаючи на відмінності, завдання розкрою і покриття мають близьку структуру математичних моделей, тому для розв'язку часто використовують схожі методи і підходи.

Нехай $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ – опорна множина. Є множина A , що складається з m підмножин A_i ($A = \{A_1, \dots, A_m\}$) множини B таких, що $A_i \subseteq B$, $\bigcup_{i=1}^m A_i = B$. Кожній підмножині A_i створили у відповідність число c_i , назване ціною. Множина $P = \{A_{k_1}, \dots, A_{k_l}\}$ ($k_j \in \{1, \dots, m\}, l \leq m, k$ – номер варіанта вибірки підмножин) називається розв'язком задачі про покриття або просто покриттям, якщо виконується умова

$$\bigcup_{j=1}^l A_{i_j} = B, \quad (2.1)$$

при цьому ціна $C = \sum_{j=1}^l a_j \rightarrow \min$ [1].

Термін покриття означає, що сукупність множин A_{k_1}, \dots, A_{k_l} містить всі елементи множини B , тобто «покриває множину B ».

Скористаємось означеннями та теоремами, описами алгоритмів, наведеними у навчальному посібнику [12] Новоселова В.Г., Скаткова О.В.

Означення 2.1 Безнадлишковим називається покриття, якщо при видаленні з нього хоча б одного елемента воно перестає бути покриттям. Інакше – покриття надлишкове.

Означення 2.2 Покриття P називається мінімальним, якщо його ціна $C = \sum_{j=1}^l a_{i_j}$ – найменша серед всього покриття даної задачі.

Означення 2.3 Покриття P називається найкоротшим, якщо l – найменше серед всього покриття даної задачі.

Відзначимо, що в цьому випадку ціни всіх підмножин A_i , прийняті за замовчуванням, однакові та рівні 1.

Теорема 2.1 Мінімальні і найкоротші покриття – безнадлишкові.

Зручним і наочним поданням вихідних даних і їх перетворень в задачі про покриття є таблиця покриття. Таблиця покриття (приклад на рис.2.1) – це матриця T відношень належності елементів множин $A_i \in A$ опорній множині B ; стовпці матриці T зіставлені елементам b_j множини B , рядки – елементам A_i множини A :

$$T = \begin{cases} 1, \text{ якщо } b_j \in A_i, \\ 0, \text{ якщо } b_j \notin A_i. \end{cases} \quad (2.2)$$

Нулі в матриці T не ставляться.

	$b1$	$b2$	$b3$	$b4$	$b5$	$b6$	$b7$	$b8$	$b9$	c
$A1$	1		1		1	1				1
$A2$	1	1		1				1		2,5
$A3$		1			1		1			2
$A4$			1					1	1	1,5
$A5$				1	1			1	1	3
$A6$			1		1	1	1		1	7
$A7$		1		1		1				1

Рисунок 2.1 – Таблиця покриття множини A

Мовою відношення належності задача про покриття формулюється як задача побудови таких підмножин P_i рядків таблиці покриття, щоб у сукупності рядків, що входять в P_i , у всіх стовбцях були «1» (одиниці в деякому стовпці можуть повторюватися). Така підмножина рядків таблиці покриття називається покриттям.

Маємо наступні варіанти формулювання задачі про покриття:

- а) потрібно знайти всі покриття (для розв'язку задачі необхідно виконати повний перебір всіх підмножин множини A);
- б) потрібно знайти тільки безнадлишкове покриття (використовується граничний перебір або розкладання по стовпцю у таблиці покриття);
- в) потрібно знайти одне безнадлишкове покриття (розв'язок задачі ґрунтується на скороченні таблиці покриття).

Задачі про покриття можуть бути розв'язані точно (при невеликій розмірності) або наближено.

Для знаходження точного розв'язку використовують наступні алгоритми:

- а) алгоритм повного перебору. Заснований на методі упорядкування перебору підмножин множини;

б) алгоритм граничного перебору по угнутій множині (заснований на одноіменному методі скорочення перебору);

в) алгоритм розкладання по стовпцю таблиці покриття (заснований на методі скорочення перебору, який складається в розгляді тільки тих рядків таблиці покриття, в яких є «1» в обраному для розкладання стовпці);

г) алгоритм скорочення таблиці покриття (заснований на методі побудови циклічного залишку таблиці покриття, покриття для якого потім будується методами граничного перебору або розкладання по стовпцю).

Нижче розглянемо окремі алгоритми.

2.2 Алгоритми розв'язку

2.2.1 Алгоритм повного перебору

Будемо вважати, що підмножини A_i пронумеровані A_1, \dots, A_m і таким чином впорядковані. Природний метод перебору всіх підмножин рядків таблиці покриття будується так: пуста підмножина рядків, підмножина з одного рядка, з двох рядків, ..., з усіх рядків, тобто всього 2^m підмножин:

$$D = \{\emptyset, \{A_1\}, \dots, \{A_m\}, \{A_1, A_2\}, \dots, \{A_1, A_m\}, \dots, \{A_1, \dots, A_m\}\}.$$

Опис алгоритму:

а) поточна підмножина $D = \{A_1\}$, $i = 0$.

б) $i=i+1$. Запам'ятовуємо множину D , як чергове побудовання підмножини D_i ;

в) знаходимо найбільший номер j елемента $A_j \in D$;

г) якщо $j \neq n$ (n – кількість підмножин A_j), то переходимо до останнього пункту;

д) якщо $j = n$, то видаляємо A_n з D і якщо $D = \emptyset$, то закінчуємо побудову; якщо $D \neq \emptyset$ – знаходимо найбільший номер j елемента $A_j \in D$ і видаляємо A_j з D ;

е) $j=j+1$. Вводимо в D елемент A_j . Переходимо до пункту а.

2.2.2 Алгоритм граничного перебору по угнутій множині

Даний алгоритм заснований на генерації підмножин та їх цілеспрямованому відборі.

Алгоритм генерації підмножин повинен гарантувати, що при його послідовному застосуванні можна побудувати, починаючи з деякої початкової підмножини, всі можливі підмножини; при цьому не повинно бути повторень і повинен існувати критерій закінчення перебору. В п.2.2 впорядкування перебору зроблено спочатку по числу i елементів, а потім для фіксованого i – щодо номерів підмножин.

Більш зручний для подальшого спрощення процесу розв'язку алгоритм повного перебору полягає в наступному: спочатку будуються всі підмножини D_i , що містять A_1 , потім – що містять A_2 , але не містять A_1 ; якщо побудована підмножина D_i , то за нею будується підмножина D_{i+j} , яка цілком містить D_i ($D_i \subset D_{i+j}$).

У багатьох додатках досить знаходити тільки безнадлишкове покриття (теорема 2.1), що скорочує перебір. Однак не вдається знайти простий і ефективний алгоритм, який не потребує побудови всього надлишкового покриття. Ідея поліпшення алгоритму перебору (генерації) підмножин полягає в наступному: якщо поточна підмножина – покриття, то в цю підмножину не потрібно вводити нові елементи.

Теорема 2.2 Якщо P – покриття, то і P' , $P' \supseteq P$, теж покриття, тобто множина всього можливого покриття угнута.

Безнадлишкове покриття – це межа угнутої множини всього покриття, тому модифікований алгоритм носить назву Алгоритм граничного перебору по угнутій множині.

Опис алгоритму:

- а) поточна підмножина $D = \{A_i\}$, $i=0$. Виконуємо пункт ж;
 - б) знаходимо найбільший номер j елемента в підмножині D ;
 - в) якщо $j \neq n$ і D – не покриття, то виконуємо пункт є;
 - г) якщо $j \neq n$ і D – покриття, то виконуємо пункт е;
 - д) якщо $j = n$, то видаляємо A_n з D , і якщо $D = \emptyset$, то виконуємо пункт і, по іншому – знову знаходимо найбільший номер j елемента в D і виконуємо пункт б;
 - е) видаляємо елемент A_j з D ;
 - є) $j=j+1$. Вводимо елемент A_j в D ;
 - ж) з'ясовуємо, чи є D покриттям;
 - з) якщо чергова побудова в D – покриття, то видаляємо по черзі з раніше побудованого покриття те, яке поглинає D , тобто надлишкове покриття, відповідно зменшуючи i кожен раз на 1, і запам'ятовуємо D як покриття P_i ($i = i + 1$; $P_i = D$). Переходимо до пункту а;
 - и) якщо побудова в D не є покриттям, то виконуємо пункту а;
 - і) закінчуємо побудову всього безнадлишкового покриття.
- З отриманого безнадлишкового покриття можна вибрати покриття з мінімальною кількістю рядків (найкоротше покриття) або покриття з мінімальною ціною (мінімальне покриття).

2.2.3 Алгоритми, які використовують скорочення таблиць покриття

Теорема 2.3 (про ядро) Якщо у стовпці таблиці покриття міститься тільки одна одиниця, то рядок, який містить цю одиницю, входить в усе покриття і називається ядерним.

Множина ядерних рядків заздалегідь виділяється і запам'ятовується для введення в усе покриття. Ядерні рядки з таблиці покриття видаляються і викреслюються всі покриті ними стовпці, тобто викреслюються всі стовпці, в яких є 1 в ядерних рядках.

Теорема 2.4 (про антиядро) Якщо після видалення ядерних рядків і покритих ними стовпців у будь-якому рядку не залишиться 1, то цей рядок не входить ні в жодне безнадлишкове покриття. Такі рядки називаються антиядерні і викреслюються з таблиці покриття без запам'ятовування.

Означення 2.4 Вектор $E = (e_1, \dots, e_m)$ поглинає вектор $F = (f_1, \dots, f_m)$, $E \geq F$, якщо для всіх компонент e_i, f_i цих векторів можна одночасно записати $e_i \geq f_i$. В іншому випадку вектори називаються незрівняними.

Приклад 2.2 Нехай задані два вектори $E = (1, 1, 0, 1)$, $F = (0, 1, 0, 1)$. Порівнюючи їх поелементно (наприклад, зліва направо), робимо висновок, що $E \geq F$.

Теорема 2.5 (про поглинаючі стовпці) У таблиці покриття можуть бути викреслені всі поглинаючі стовпці (що розглядаються як вектори) без шкоди для побудови всього безнадлишкового покриття.

Теорема 2.6 (про поглинаючі рядки при пошуку одного найкоротшого покриття) Якщо при розв'язуванні задачі про покриття досить гарантувати отримання хоча б одного найкоротшого покриття, то можна видалити усі поглинаючі рядки.

Теорема 2.7 (про поглинаючі рядки при побудові мінімального покриття). Якщо при розв'язуванні задачі про покриття досить гарантувати

побудову всього (хоча б одного) мінімального покриття, то можна викреслювати поглинаючий рядок, якщо ціна його більше або дорівнює ціні поглинаючого рядка.

Використовуючи теореми 2.3 – 2.7, спрощуємо таблицю покриття. При цьому можливі два результати:

а) таблиця покриття після спрощення стає порожньою (викреслені всі стовпці). У цьому випадку множина ядерних рядків – необхідне покриття;

б) залишок таблиці покриття більше не спрощується прийомами з теорем 2.3 – 2.7. Отримуємо циклічний залишок таблиці покриття. Покриття циклічного залишку таблиці можна будувати методами граничного перебору або розкладання по стовпцю.

Повний розв'язок (покриття вихідної таблиці) складається з ядерних рядків і рядків покриття циклічного залишку.

2.2.4 Алгоритм побудови циклічного залишку для таблиці покриття

Опис алгоритму для випадку побудови одного найкоротшого покриття:

а) вважаємо вихідну таблицю покриття поточною, а множину ядерних рядків – порожньою;

б) знаходимо ядерні рядки, запам'ятовуємо множину ядерних рядків. Поточну таблицю покриття скорочуємо: викреслюємо ядерні рядки і всі стовпці, покриті ними;

в) викреслюємо антиядерні рядки;

г) викреслюємо поглинаючі стовпці;

д) викреслюємо поглинаючі рядки;

е) якщо в результаті виконання п.п. а – д поточна таблиця покриття змінилася, знову виконуємо пункт а, інакше перетворення закінчуємо.

Отримуємо два результати: множину ядерних рядків і циклічний залишок таблиці покриття.

У разі побудови мінімального покриття змінюється тільки п.4 алгоритму, який формулюється таким чином: викреслюються поглинаючі рядки, вага яких не менше ваги відповідних поглинаючих рядків.

За умови побудови всього безнадлишкового покриття п.4 не виконується – не можна викреслювати ніякі поглинаючі рядки.

2.3 Окремі класи задач на покриття: задачі розкрою та пакування

Окремим класом задач про покриття є задачі розкрою та пакування. Наведемо короткий огляд задач цього класу.

2.3.1 Задача плоского цілочисленого розкрою і задача покриття графів

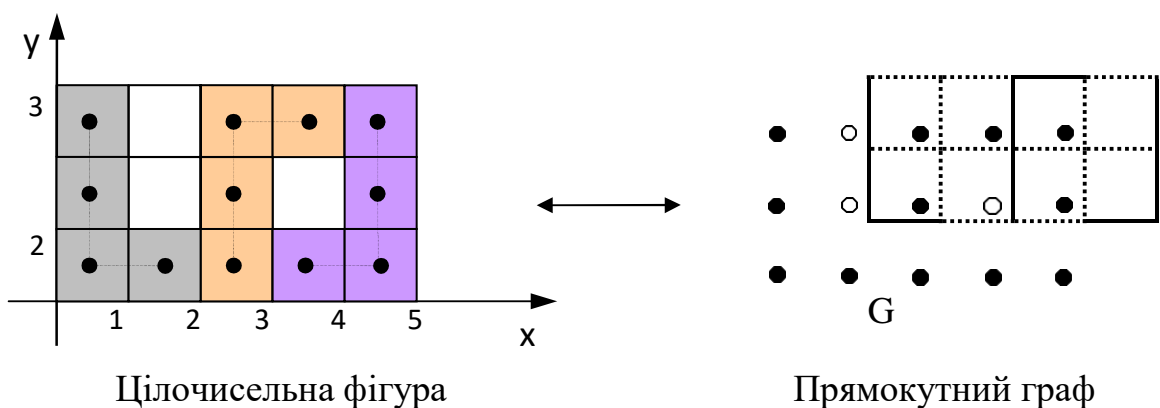
Задачі даного типу наведені у роботі [14]. Цілочисельна решітка в просторі R^n – це сукупність векторів простору з цілочисельними координатами. Розглянемо прямокутник P на площині, сторони якого паралельні координатним осям і координати вершин є цілими невід'ємними числами.

Введемо наступні визначення. Назвемо *пікселями* цілочисельні одиничні квадрати, з яких складається прямокутник; *цілочисельним прямокутником* – перетин прямокутника з цілочисельною решіткою площини; *неперетинаними*, якщо не існує пікселів в цих фігурах, які мають спільний кордон-відрізок; *зв'язною* фігуру, якщо її не можна представити у вигляді об'єднання неперетинаних фігур; *границею фігури* – об'єднання границь пікселів, її складових, які не є границями інших пікселів цієї ж фігури.

Задача плоского цілочисельного розкрою полягає в тому, щоб на заданому цілочисельному прямокутнику розмістити набір цілочисельних фігур, які перетинаються тільки по границях.

Ця задача може бути зведена до задачі покриття графа типовими підграфами. Наприклад, розглянемо планарний граф, вершини якого збігаються з центрами пікселів, що утворюють деяку цілочисельну фігуру. Дві вершини з'єднані ребром в тому і тільки в тому випадку, коли відповідні пікселі мають спільну сторону. Цей планарний граф назвемо прямокутним графом. З кожною цілочисельною фігурою на площині пов'язаний її прямокутний граф і навпаки, кожному зв'язковому графу з вершинами в центрах одиничних квадратів площини та ребрами, що паралельні осям координат відповідає єдина цілочисельна фігура.

Нехай на цілочисельному прямокутнику розміщені декілька цілочисельних фігур, які перетинаються лише по границях. Відповідні їм графи (рис. 2.2) не мають спільних ребер (і, отже, загальних вершин). Таким чином, кожній задачі плоского цілочисельного розкрою відповідає задача виділення в заданому прямокутному графі набору попарно неперетинаних прямокутних підграфів.



Цілочисельна фігура

Прямокутний граф

Рисунок 2.2 – Цілочисельна фігура та її прямокутний граф

2.3.2 Лінійний цілочисельний розкрій

Нехай відома довжина L стрижня-заготівки та n видів деталей. Деталь виду j має довжину $l_j > 0$ і вартість $c_j > 0, j = 1, \dots, n$. Стрижень необхідно розкрити на деталі таким чином, щоб їх загальна вартість була максимальна.

Побудуємо математичну модель. Нехай кількість деталей виду j – $x_j, j = 1, \dots, n$. Розмір стрижня, яким обмежена загальна довжина деталей, $\sum_{j=1}^n l_j x_j \leq L$. Обмеження на змінні $x_j \geq 0, x_j \in Z, j = 1, \dots, n$. Загальною вартістю отриманих деталей буде цільова функція $\sum_{j=1}^n c_j x_j$. Знайдемо такий розв'язок, щоб отримати максимум цільової функції. Зверху обмеження на число деталей виду $j: x_j \leq n_j = \frac{L}{l_j}$. Зведемо задачу до задачі з булевими змінними $\sum_{j=1}^n c_j \sum_{k=1}^{n_j} y_{jk} \rightarrow \max$ при обмеженні $\sum_{j=1}^n l_j \sum_{k=1}^{n_j} y_{jk} \leq L$ і $y_{jk} \in \{0,1\}$.

Якщо в обраний набір включається k -й примірник j -го типу деталей, то $y_{jk} = 1$.

2.3.3 Прямокутний цілочисельний розкрій

Дана множина $U = \{u_j\}_{j=1}^n$ прямокутників з цілочисельними параметрами (ширина, висота) $u_i = (w_i, h_i), i = \overline{1, n}$ та прямокутна матриця-основа $A_{W \times H}, W \in Z^+$. Треба, щоб при розміщенні прямокутних заготівок на матриці-основі та перетинанні їх лише по границі, не зайнята площа основи була мінімальною.

Кожне розміщення прямокутника задається набором

$$u_i' = (w_i, h_i, x_i, y_i), w_i, h_i \in N, x_i, y_i \in Z^+,$$

де x_i і y_i – координати лівого нижнього кута прямокутника. Візьмемо лише ті, у яких два види обмежень, які виключають:

а) перетини багатокутників:

$$\begin{aligned} (x_i \geq x_j + w_j) \vee (x_j \geq x_i + w_i) \vee (y_i \geq y_j + h_j) \vee (y_j \geq y_i + h_i), \\ i, j = \overline{1, n}, \quad i \neq j; \end{aligned} \quad (2.3)$$

б) вихід прямокутників за межі матриці-основи:

$$(x_i \geq 0) \wedge (x_i + w_i \leq W) \wedge (y_i \geq 0) \wedge (y_i + h_i \leq H), \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (2.4)$$

Множину розміщень, які задовольняють (2.3), (2.4) позначимо $U(x, y)$ і назвемо допустима множина розміщень.

Розв'язок задачі представимо набором трійок $\{(q_i, x_i, y_i)\}_{i=1}^n$, де

$$q_i = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i \text{ – я заготовка входить в покриття;} \\ 0, & \text{якщо не входить в покриття} \end{cases}$$

Цільова функція:

$$\frac{\sum_{i=1}^n q_i h_i w_i}{H \cdot W} \rightarrow \max.$$

2.3.4 Прямокутний розкрій із заборонами

Розглянемо задачу прямокутного розкрою в прямокутній області з вилученнями: прямокутники, ширина та довжина яких $u_i = (w_i', h_i')$, $i = \overline{1, n}$, складають множину $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$. Також кожному прямокутнику приписана група G_i , $i = \overline{1, n}$ можливих симетрій розміщуваних прямокутників. Потрібно розмістити ці прямокутники на прямокутній основі

з цілочисельними сторонами, в якій присутні прямокутні вилучення (зони заборони) $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$. У таких прямокутників є ширина, висота та координати лівого верхнього кута $v_i = (w_i'', h_i'', x_i, y_i)$, $i = \overline{1, m}$.

Дана задача зводиться до задачі прямокутного розкрою без вилучень: розглядаємо множину W прямокутників $V \cup U = \{w_1, w_2, \dots, w_{m+n}\}$, яка складається з усіх прямокутників цього об'єднання. При цьому параметри кожного з прямокутників такі:

$$w_i = \begin{cases} w_i'', & i = 1, 2, \dots, m; \\ w_{i-m}', & i = m + 1, m + 2, \dots, m + n, \end{cases}$$

$$h_i = \begin{cases} h_i'', & i = 1, 2, \dots, m; \\ h_{i-m}', & i = m + 1, m + 2, \dots, m + n. \end{cases}$$

Кожному з прямокутників приписується група симетрії

$$G_i = \begin{cases} 1, & i = 1, 2, \dots, m; \\ G_{i-m}', & i = m + 1, m + 2, \dots, m + n. \end{cases}$$

Треба максимально зайняти площу основи даними прямокутниками з умовою розмістити перші m елементи множини W в позиціях, які задаються координатами (x_i, y_i) , $i = \overline{1, m}$.

Для розв'язку використаємо фрагментарну модель [9]. Множиною елементарних фрагментів є множина прямокутників з W , елементи якої нумеруються числами $1, 2, \dots, N$. Кожен прямокутник з W зустрічається в цій множині стільки разів, який порядок його групи симетрії.

Фрагментарний алгоритм розміщення:

– складаємо список елементарних фрагментів (зв'язків) упорядкований у відповідності з деякою перестановкою s чисел $1, 2, \dots, m + n$, причому $s = \left(\begin{matrix} 1, 2, \dots, m, m+1, \dots, N \\ 1, 2, \dots, m, i_{m+1}, \dots, i_N \end{matrix} \right)$, тобто на першому місці завжди стоять прямокутники вилучення;

– вибираємо черговий по порядку фрагмент (i) зі списку. Якщо $i \leq t$, прямокутник з номером i розміщується в позиції (x_i, y_i) , якщо $i > t$ – в першій вільній позиції, в якій можливе розміщення даного прямокутника без виходу за межі основи та без перетинів з вже розміщеними прямокутниками;

– якщо таке розміщення неможливе, прямокутник видаляємо зі списку, якщо його вдалося розмістити, то зі списку видаляємо цей прямокутник і всі його копії;

– алгоритм закінчує роботу, коли список стане порожнім.

Результатом роботи фрагментарного алгоритму буде розміщення прямокутників на основі, яке є допустимим розв'язком розглянутої задачі.

2.3.5 Гільйотинний розкрій

Розглянемо задачу гільйотинного розкрою: довжина і висота листа – $L \times H$, де $L, H \in Z^+$. Маємо множину прямокутних заготовок. Їх сторони також виражаються цілими числами і повороти заборонені. Допускаються тільки гільйотинні зрізи (наскрізні розрізи, паралельні кромкам матеріалу). Двостадійна обробка: спочатку ріжемо лист паралельно осі OY , потім паралельно осі OX від кромки до кромки. Розмістити на ньому заготовки і при цьому незайнята площа листа повинна залишитися мінімальною. Заготовки можуть перетинатися тільки по границях. Приклад такого розміщення наведено на рис. 2.3 а, де штрихуванням виділена незайнята частина листа. Лінії, які розділяють повинні бути суцільними та паралельними граням листа (рис. 2.3 а), тобто технологія розділення прямокутників – гільйотинна.

Можливі різні критерії даної задачі: критерій мінімуму відходів; критерій мінімуму листів; на нескінченній смузі мінімізувати довжину смуги.

Дана задача відноситься до числа NP -повних задач [13], то точний алгоритм не відомий, але відомо багато наближених алгоритмів, які є евристичними.

Для задачі гільйотинного розкрою існує звичайна фрагментарна структура. Фрагментом є сама заготовка, точніше її місцезоташування. Далі заготовки упорядковуються по якомусь правилу, наприклад, «наступний відповідний». За цим правилом, якщо прямокутник не виходить за межі смуги, ліва верхня вершина чергового прямокутника збігається з лівою нижньою вершиною попереднього прямокутника. Але якщо прямокутник виходить за межі смуги, його ліва верхня вершина розміщується на верхній границі смуги, таким чином, щоб пряма, яка містить ліву границю цього прямокутника містила також крайню праву границю прямокутників, розміщених раніше.

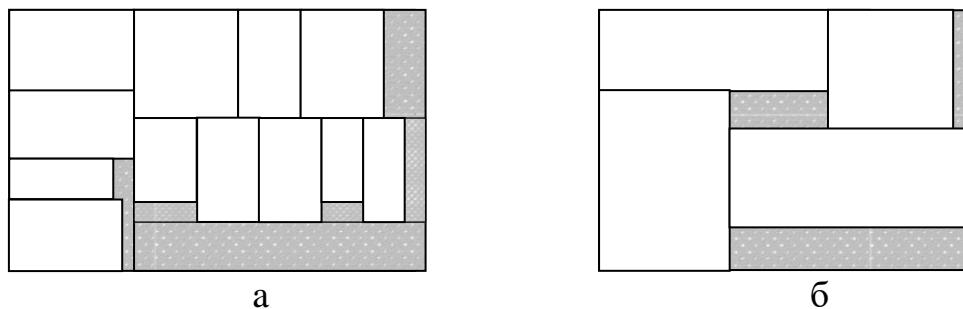


Рисунок 2.3 – Приклади гільйотинного та негільйотинного розкрою:
а – гільйотинний розкрій; б – негільйотинний розкрій

2.4 Висновки за II розділом

Таким чином, у даному розділі ми ознайомилися із задачами на покриття, розглянули алгоритми їх розв'язку. Розібрали окремі класи задач розкрою та пакування та методи розв'язання. Для всіх розглянутих в розділі задач наближений розв'язок може бути знайденим стандартним еволюційно-

фрагментарним алгоритмом, базова множина якого є множиною перестановок.

3 ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ЗАДАЧ ПРО ПОКРИТТЯ

3.1 Задача геометричного покриття і розкрою

У будівельній галузі при покритті поверхонь будівельним матеріалом (лінолеумом, плитами, кахелем і ін.) виникають задачі раціонального використання матеріалів, задачі укладання цих матеріалів, виготовлення матеріалів заданої форми та розміру. Розв'язання цих задач можливо засобами математичного моделювання.

Розглянемо наступну задачу: потрібно знайти план покриття прямокутниками заданої багатокутної області, розміри цих прямокутників, план розкрою потрібних прямокутників з прямокутних листів або рулонного матеріалу заданих розмірів. При цьому потрібно максимізувати розміри елементів, які покривають задану область і мінімізувати витрати ресурсу на ці елементи .

Таким чином розглядається комплексна задача геометричного покриття і розкрою, яка розбивається на дві – задачу покриття області та задачу розкрою.

Мета задач покриття і розкрою: розмістити предмети відомих розмірів в заданому ресурсі; якщо ресурс заданий у вигляді стрижнів, листів і т.п., то мінімізувати їх кількість; якщо ресурс заданий у вигляді напівнескінченної смуги, то мінімізувати зайняту площу.

Короткий огляд, присвячений задачам покриття і розкрою та методам їх розв'язання, наведено в другому розділі.

3.1.1 Постановка комплексної задачі геометричного покриття і розкрою

Введемо наступні поняття і означення.

Ортогональний полігон – однозв'язна область, обмежена багатокутником, можливо неопуклим, ребра якого або вертикальні, або горизонтальні.

Багатозв'язним ортогональним полігоном (БОП) будемо називати ортогональний полігон, що містить однозв'язні заборонені області, які є ортогональними полігонами.

Прямокутний ресурс – це листи прямокутної форми заданих розмірів, або напівнескінченна смуга (рулон) заданої ширини.

Під *діловими відходами* будемо розуміти прямокутний ресурс нестандартних розмірів.

Як правило, на практиці часто виникає потреба у використанні ділових відходів з метою ресурсозбереження.

У разі неортогональних меж геометричної області покриття (рис. 3.1, а), вона апроксимується вертикальними та горизонтальними лініями покриття (рис. 3.1, б). Кожна перешкода, що має непрямокутну форму, розбивається на прямокутники, і далі під перешкодами будемо розуміти прямокутні області. Таким чином, для розв'язку задачі область покриття задається у вигляді багатозв'язного ортогонального полігону (рис. 3.1, в).

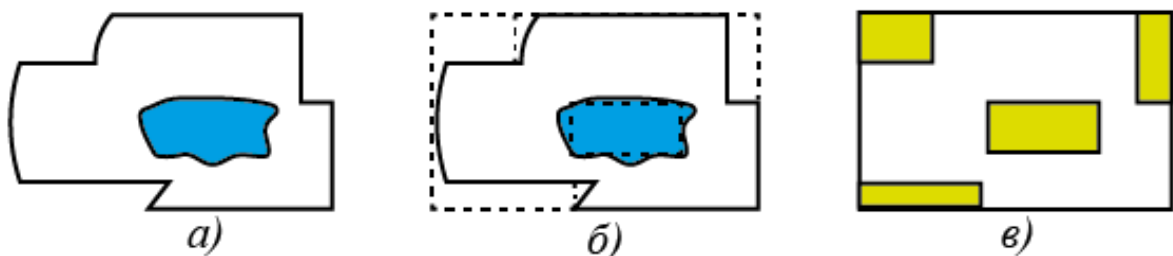


Рисунок 3.1—Приклад апроксимації фігурної області за допомогою

багатозв'язного ортогонального полігону: а - вихідна область;

б - апроксимація області вертикальними і горизонтальними лініями;

в – багатозв'язний ортогональний полігон

Крім розмірів багатозв'язного ортогонального полігону задаються розміри прямокутного ресурсу. Необхідно знайти план покриття багатозв'язного ортогонального полігону елементами покриття і план розкрою прямокутного ресурсу на ці елементи, при цьому максимізувати розміри елементів покриття і мінімізувати витрату (площу або кількість) ресурсу, який розкроюється. Ця проблема формалізується математичною моделлю задачі з двома цільовими функціями.

Для опису області покриття багатозв'язного ортогонального полігону введемо прямокутну систему координат: осі Ox і Oy збігаються відповідно з нижньою і лівою бічними сторонами прямокутника, який огинає багатозв'язний ортогональний полігон (рис. 3.2, а). W, L – ширина і довжина прямокутника, який огинає багатозв'язний ортогональний полігон. Тоді положення кожної прямокутної забороненої ділянки B_ν , задається координатами (χ_ν, η_ν) її нижнього лівого кута і розмірами, де μ – число заборонених ділянок.

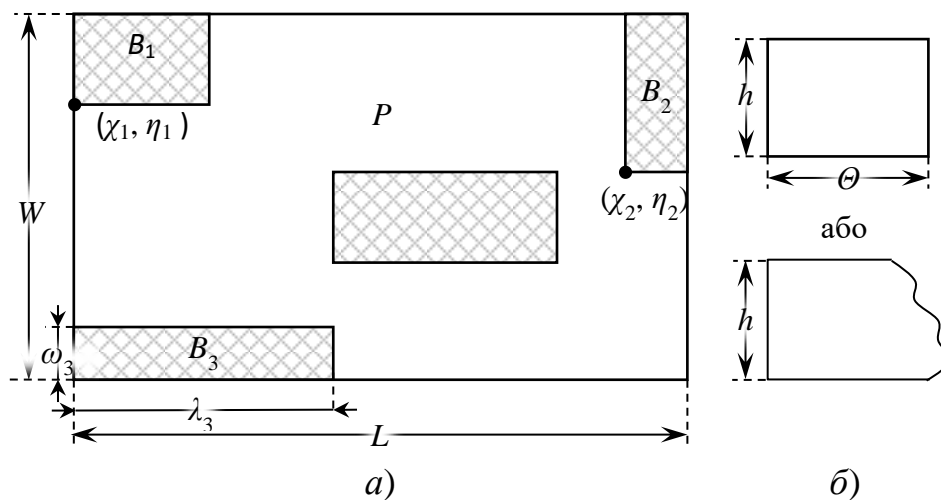


Рисунок 3.2 – Ілюстрація постановки задачі:

a – багатозв'язний ортогональний полігон P із забороненими областями B_ν ;

b – розміри ресурсу (лист / рулон)

3.1.2 Математична модель комплексної задачі геометричного покриття і розкрою

Дано: багатозв'язний ортогональний полігон, що підлягає покриттю, заданою сукупністю $P = \langle W, L, (\chi_v, \eta_v), (\omega_v, \lambda_v), v = \overline{1, \mu} \rangle$. Крім того, є необмежена множина прямокутних аркушів довжини Θ і ширини h (для задач з ресурсом у вигляді листів), або ширина h рулонного ресурсу, що підлягає розкрою на прямокутні елементи (рис. 3.2, б). Також задана інформація про ділові відходи у вигляді множини $K = (k_1, k_2, \dots, k_\tau)$ прямокутних елементів з розмірами $l_j^+ \times w_j^+, j = \overline{1, \tau}$.

Потрібно: знайти план покриття багатозв'язного ортогонального полігона P (рис. 3.3), план розкрою прямокутного ресурсу (рис. 3.4) на прямокутні елементи, які його покривають, і мінімізувати значення функцій, що характеризують ефективність розв'язку підзадач геометричного покриття і розкрою:

$$\min F_{cov}(T) = \sum_{i=1}^m (l_i + w_i),$$

$$\min F_{cut}(T) = \begin{cases} N^{PL}, & \text{якщо матеріал – прямокутні листи,} \\ L^{PI} = \max_{i=1 \dots m} (x_i' + l_i), & \text{якщо матеріал –} \\ & \text{напівнескінченна смуга.} \end{cases}$$

де $T = \{m, w, l\}$, $w = (w_1, w_2, \dots, w_m)$, $l = (l_1, l_2, \dots, l_m)$ – множина з m прямокутних елементів розмірами $w_i \times l_i, i = \overline{1, m}$, що утворюють покриття багатозв'язного ортогонального полігона і підлягають розкрою з ресурсу і ділових відходів; l_i, w_i – довжина і ширина прямокутного елемента $t_i \in T$, що покриває та входить в покриття багатозв'язного ортогонального полігона, $T = Q \cup K^+$, де

Q – множина прямокутних елементів, що покривають багатозв'язний ортогональний полігон, розкроєні зі стандартного ресурсу, K^+ – множина прямокутних елементів, що покривають багатозв'язний ортогональний полігон, розкроєні з ділових відходів, N^{PII} – кількість використаних прямокутних аркушів (у разі листового ресурсу в задачі розкрою), L^{PII} – довжина зайнятої частини напівнескінченної смуги (у разі рулонного ресурсу в задачі розкрою); x'_i, y'_i – координати лівого нижнього кута прямокутника з номером i в плані розкрою прямокутного ресурсу.

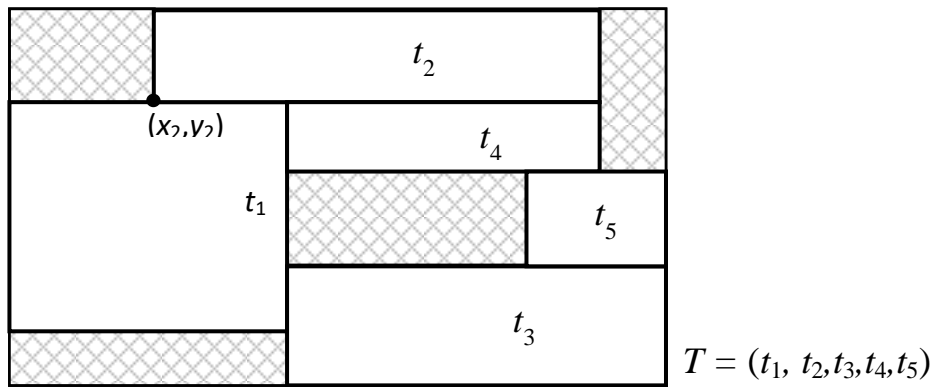


Рисунок 3.3 – План покриття багатозв'язного ортогонального полігону P множиною прямокутників T

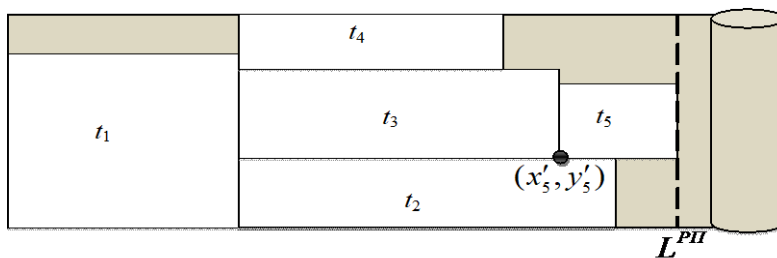


Рисунок 3.4 – План розкрою рулону на елементи покриття T

Довжина частини смуги, яка зайнята $L^{PII} = \max_{i=1..m} (x'_i + l_i) = x'_5 + l_5$

Для формалізації задачі введемо додатково змінні z_{ij}^x , z_{ij}^y , \tilde{z}_{iv}^x і \tilde{z}_{iv}^y , такі, що: $z_{ij}^x = 1$ ($z_{ij}^y = 1$), якщо проекція прямокутного елемента i на вісь Ox (Oy) знаходиться лівіше (нижче) проекції прямокутного елемента j на вісь Ox (Oy), інакше $z_{ij}^x = 0$ ($z_{ij}^y = 0$); $\tilde{z}_{iv}^x = 1$ ($\tilde{z}_{iv}^y = 1$), якщо проекція прямокутного елемента i на вісь Ox (Oy) знаходиться лівіше (нижче) проекції забороненої області v на вісь Ox (Oy), інакше $\tilde{z}_{iv}^x = 0$ ($\tilde{z}_{iv}^y = 0$).

Тоді необхідно знайти:

а) множину T прямокутних елементів, які покривають багатозв'язний ортогональний полігон P і відповідний план покриття, тобто для кожного $t_i \in T$ потрібно знайти набір значень $\langle x_i, y_i, l_i, w_i \rangle$, де x_i, y_i – координати лівого нижнього кута елемента в системі координат багатозв'язного ортогонального полігону P ; l_i і w_i – відповідно довжина і ширина прямокутного елемента.

Умови (3.1) накладають обмеження на розміри прямокутних елементів, що покривають багатозв'язний ортогональний полігон: вони не повинні перевищувати розміри прямокутного ресурсу:

$$i = \overline{1, m}, v = \overline{1, \mu} \quad w_i \leq \Theta, \quad i = \overline{1, m}. \quad (3.1)$$

Умови (3.2), (3.3) задають допустиме положення прямокутного елемента в області багатозв'язного ортогонального полігону: вони не повинні виходити за його межі:

$$x_i + l_i \leq L, \quad y_i + w_i \leq W, \quad i = \overline{1, m}, \quad (3.2)$$

$$x_i \geq 0, \quad y_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (3.3)$$

Умови (3.4) – (3.6) забезпечують неперекриті прямокутні елементи між собою:

$$z_{ij}^x + z_{ji}^x + z_{ij}^y + z_{ji}^y \geq 1, \quad i = \overline{1, m}, j = \overline{1, m}, i \neq j, \quad (3.4)$$

$$y_j \geq y_i + w_i - W(1 - z_{ij}^y), \quad i = \overline{1, m}, j = \overline{1, m}, \quad (3.5)$$

$$x_j \geq x_i + l_i - L(1 - z_{ij}^x), \quad i = \overline{1, m}, j = \overline{1, m}. \quad (3.6)$$

(3.7) – (3.9) – неперекриті прямокутні елементи із забороненими областями:

$$\tilde{z}_{iv}^x + \tilde{z}_{vi}^x + \tilde{z}_{iv}^y + \tilde{z}_{vi}^y \geq 1, \quad i = \overline{1, m}, v = \overline{1, \mu}, \quad (3.7)$$

$$\eta_v \geq y_i + w_i - W(1 - \tilde{z}_{iv}^y), \quad i = \overline{1, m}, v = \overline{1, \mu}, \quad (3.8)$$

$$\chi_v \geq x_i + l_i - L(1 - \tilde{z}_{iv}^x), \quad i = \overline{1, m}, v = \overline{1, \mu}. \quad (3.9)$$

Умова (3.10) визначає необхідність повного геометричного покриття корисної площі багатозв'язного ортогонального полігону прямокутними елементами (без «порожнин»):

$$\sum_{i=1}^m w_i \cdot l_i = S_{\text{МОП}}. \quad (3.10)$$

Отримали систему обмежень задачі:

$$\left\{ \begin{array}{l} l_i \leq h, w_i \leq \Theta, i = \overline{1, m}, \\ x_i + l_i \leq L, y_i + w_i \leq W, i = \overline{1, m}, \\ x_i \geq 0, y_i \geq 0, i = \overline{1, m}, \\ z_{ij}^x + z_{ji}^x + z_{ij}^y + z_{ji}^y \geq 1, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, m}, i \neq j, \\ y_j \geq y_i + w_i - W(1 - z_{ij}^y), i = \overline{1, m}, j = \overline{1, m}, \\ x_j \geq x_i + l_i - L(1 - z_{ij}^x), i = \overline{1, m}, j = \overline{1, m}, \\ \tilde{z}_{iv}^x + \tilde{z}_{vi}^x + \tilde{z}_{iv}^y + \tilde{z}_{vi}^y \geq 1, i = \overline{1, m}, v = \overline{1, \mu}, \\ \eta_v \geq y_i + w_i - W(1 - \tilde{z}_{iv}^y), i = \overline{1, m}, v = \overline{1, \mu}, \\ \chi_v \geq x_i + l_i - L(1 - \tilde{z}_{iv}^x), i = \overline{1, m}, v = \overline{1, \mu}, \\ \sum_{i=1}^m w_i \cdot l_i = S_{\text{МОП}}. \end{array} \right.$$

б) для плану розкрою ортогонального ресурсу на прямокутні елементи множини T виконуються наступні умови:

(3.11) – (3.12) забезпечують можливе розміщення прямокутних елементів всередині ортогонального ресурсу:

$$x'_i \geq 0, y'_i \geq 0, i = \overline{1, m}, \quad (3.11)$$

$$x'_i + l_i \leq \Theta, y'_i + w_i \leq h, i = \overline{1, m}. \quad (3.12)$$

(3.13) – (3.15) забезпечують неперекриття прямокутних елементів між собою:

$$z_{ij}^x + z_{ji}^x + z_{ij}^y + z_{ji}^y \geq 1, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, m}, i \neq j, \quad (3.13)$$

$$y'_j \geq y'_i + w_i - W(1 - z_{ij}^y), i = \overline{1, m}, j = \overline{1, m}, \quad (3.14)$$

$$x'_j \geq x'_i + l_i - L(1 - z_{ij}^x), i = \overline{1, m}, j = \overline{1, m}. \quad (3.15)$$

Отримали систему:

$$\begin{cases} z_{ij}^x + z_{ji}^x + z_{ij}^y + z_{ji}^y \geq 1, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, m}, i \neq j, \\ y'_j \geq y'_i + w_i - W(1 - z_{ij}^y), i = \overline{1, m}, j = \overline{1, m}, \\ x'_j \geq x'_i + l_i - L(1 - z_{ij}^x), i = \overline{1, m}, j = \overline{1, m}, \end{cases}$$

де $F_{cov}(T)$ і $F_{cut}(T)$ – цільові функції.

Коефіцієнт геометричного покриття дорівнює 1, якщо стики елементів покриття знаходяться лише на межах багатозв'язного ортогонального полігону і не проходять по його внутрішній області. В іншому випадку $k_{cov} < 1$. Коли відсутні втрати матеріалу, коефіцієнт розкрою дорівнює 1. В іншому випадку $k_{cut} < 1$.

3.2 Розв'язання комплексної задачі геометричного покриття і розкрою

Для розв'язання поставленої задачі геометричного покриття і розкрою використаємо еволюційні алгоритми, що засновані на трьохетапному підході:

а) декомпозиція багатозв'язного ортогонального полігону на мінімальну кількість прямокутних областей;

б) визначення плану покриття багатозв'язного ортогонального полігону і розмірів прямокутних елементів покриття;

в) визначення плану розкрою ресурсу на елементи покриття.

Заданий багатозв'язний ортогональний полігон, який підлягає геометричному покриттю $P = \langle W, L, (\chi_\nu, \eta_\nu), (\omega_\nu, \lambda_\nu), \nu = \overline{1, \mu} \rangle$. Треба знайти множину $\Pi = \{\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_m\}$ прямокутних областей $\Pi_i = \langle (x_i, y_i), (w_i, l_i) \rangle$ мінімальної потужності, де (x_i, y_i) – координати нижнього лівого кута i -ої області, w_i і l_i – її ширина і довжина відповідно, m – шукана потужність множини Π , яка задовольняє наступним умовам:

- а) допустимість положення прямокутної області в багатозв'язному ортогональному полігоні;
- б) неперетинання прямокутних областей між собою;
- в) неперетинання прямокутних областей із забороненими ділянками;
- г) повне геометричне покриття корисної площі багатозв'язного ортогонального полігону прямокутними областями;
- д) $w_i \leq h, l_i \leq \Theta, i = \overline{1, m}$ – додаткове обмеження, при виконанні якого будь-який прямокутний елемент з множини елементів покриття може бути цілком видалений з ресурсу.

У якості процедури розв'язку задачі декомпозиції багатозв'язного ортогонального полігону на мінімальну кількість прямокутних областей був застосований метод матричної декомпозиції (розроблений Е.І. Хасановою [22] для задачі розміщення прямокутних об'єктів на ортогональному полігоні з забороненими ділянками).

Він складається з наступних кроків:

- а) подання області з перешкодами в матричному вигляді. Через всі грані перешкод проведемо наскрізні лінії (рис. 3.5). В результаті область з перешкодами виявляється покритою прямокутною сіткою, кожна комірка якої або не містить перешкод (порожня), або є перешкодою або частиною перешкоди.

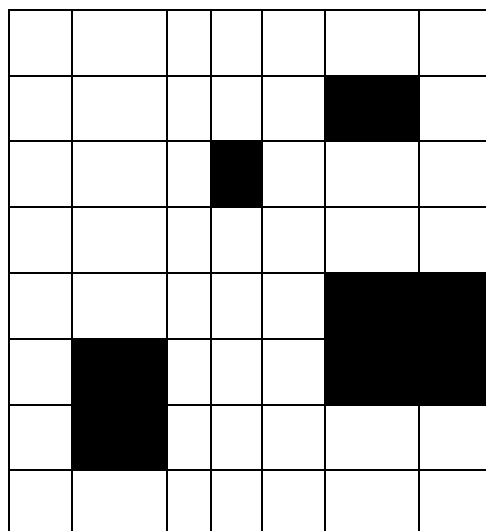


Рисунок 3.5 – Покриття багатозв'язного полігону матричною мережею

Поставимо у відповідність кожній комірці (γ, σ) число

$$a_{\gamma\sigma} = \begin{cases} 0, \text{ якщо } (\gamma, \sigma) - \text{ вільна комірка,} \\ 1, \text{ якщо } (\gamma, \sigma) - \text{ перешкода.} \end{cases}$$

Область з перешкодами буде записана у вигляді матриці $A = [a_{\gamma\sigma}]$ з булевими змінними.

б) *вибір вихідної комірки.* В якості вихідної комірки беремо ліву нижню комірку вихідної області. Якщо вона є перешкодою, рухаємося вгору по стовпцю, поки не знайдемо вільну комірку, її приймаємо за вихідну.

в) *об'єднання порожніх комірок.* Для виділення прямокутних областей без перешкод з вихідної області, будемо об'єднувати порожні суміжні комірки. Можна виділити три напрямки об'єднання: вертикальне, горизонтальне, діагональне. Можна використовувати різноманітні критерії вибору напрямку об'єднання, зокрема тут також може бути застосована мультиметодна технологія. Процес об'єднання буде продовжуватися, поки не буде досягнута верхня межа області з перешкодами.

г) *виділення порожніх прямокутних областей.* Нехай у ході попередніх кроків було виділено кілька прямокутних областей без перешкод і досягнута верхня межа області з перешкодами (області 1 і 2 на рис. 3.6).

Через праву межу області найбільшої довжини проведемо умовний наскрізний рез і продовжимо виділення областей без перешкод з області праворуч від різу. Тоді, за аналогією з рівневою технологією вихідна область з перешкодами виявиться розділеною на прямокутні рівні. При виділенні прямокутників без перешкод у рівнях залишаються «бічні порожнечі», які доцільно використовувати. Будемо називати їх вторинними багатозв'язними ортогональними полігонами. Для них рекурсивно застосовується метод матричної декомпозиції вільної області полігону на прямокутники. Робота алгоритму продовжується до тих пір, поки не залишиться порожніх клітинок.

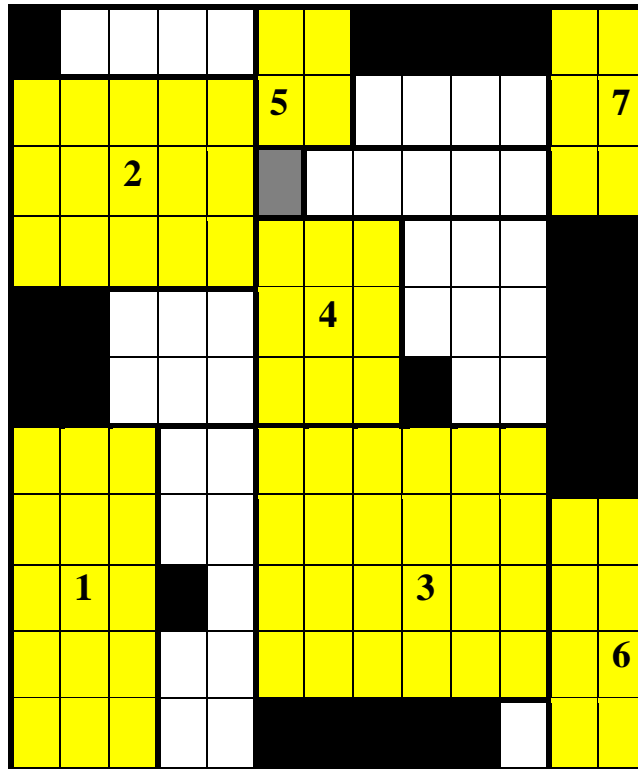


Рисунок 3.6 – Рівневе виділення областей без перешкод

Можливим є інший підхід.

Крок 1 подання багатозв'язного ортогонального полігону в матричному вигляді.

Крок 1.1 через горизонтальні межі заборонених ділянок проведемо наскрізні лінії. В результаті багатозв'язний ортогональний полігон виявляється розділений на G прямокутників з довжинами L' і ширинами d_γ , $\gamma = \overline{1, G}$. Якщо для деякого із прямокутників виконується нерівність $d_\gamma > h$, ділимо його наскрізною горизонтальною лінією на два прямокутника з шириною h і $(d_\gamma - h)$. Горизонтальне розбиття багатозв'язного ортогонального полігону продовжуємо до тих пір, поки не виконається умова: $d_\gamma \leq h, \gamma = \overline{1, G}$.

Крок 1.2 через вертикальні межі заборонених областей також проведемо наскрізні лінії. В результаті багатозв'язний ортогональний полігон виявляється розділений на U прямокутників з довжиною q_φ , $\varphi = \overline{1, U}$ і шириною W' . Якщо в якості ортогонального ресурсу виступає напівнескінченна смуга, то обмежень на довжину областей не буде. В іншому

випадку, за аналогією з горизонтальним розбиттям, вертикальний розподіл багатозв'язного ортогонального полігону триває, поки не виконається умова: $q_\varphi \leq \Theta, \varphi = \overline{1, U}$.

В результаті багатозв'язний ортогональний полігон виявляється покритим растровою сіткою, кожна комірка якої або не містить заборонених областей (порожня), або є забороненою областю чи частково забороненою областю. При цьому розміри комірки не перевищують розмірів ресурсу.

Крок 1.3 поставимо у відповідність кожній комірці (γ, σ) число 0, якщо вона вільна, і 1, якщо вона є забороненою областю. Тоді вихідний багатозв'язний ортогональний полігон може бути описаний булевою матрицею (рис. 3.7).

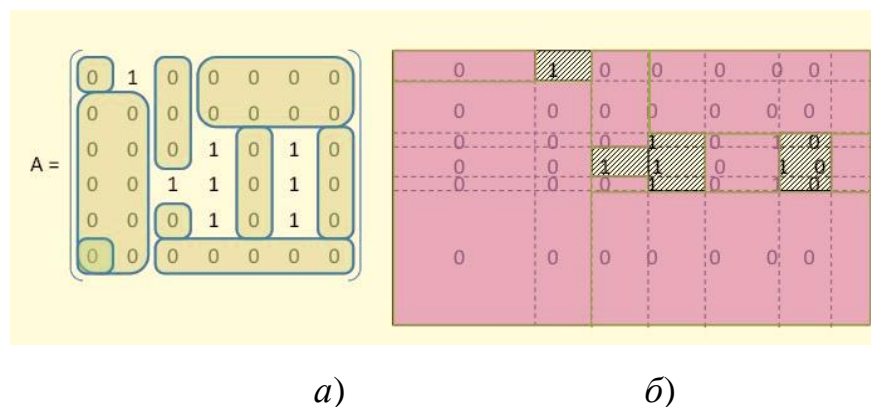


Рисунок 3.7 – Ілюстрація процедури декомпозиції багатозв'язного ортогонального полігону: *a* – матричне подання; *б* – графічне

Крок 2 вибір початкової комірки та об'єднання.

Крок 2.1 в якості вихідної комірки беремо ліву нижню ще не розглянуту комірку багатозв'язного ортогонального полігону. Якщо вона є забороненою областю, рухаємося вгору по стовпцю до вільної позиції та приймаємо її за вихідну.

Крок 2.2 об'єднуємо порожні комірки, починаючи з вихідної, вертикальним, горизонтальним або діагональним способом. Способи

чергуються випадковим чином для кожної вихідної комірки. Об'єднання комірок триває, поки не виконається хоча б одна з умов:

- а) досягнута верхня межа багатозв'язного ортогонального полігону;
- б) на шляху об'єднання є заборонена область;
- в) ширина боксу досягла h ;
- г) довжина боксу досягла Θ (якщо ресурс поставляється в листах).

Перехід на Крок 2.1.

Крок 3 виділення порожніх прямокутних областей.

Коли досягнута верхня межа багатозв'язного ортогонального полігону, через праву межу області найбільшої довжини проводиться умовний наскрізний рез, виділення наступної прямокутної області покриття триває праворуч від різку. До утворення при цьому вторинним багатозв'язним ортогональним полігоном рекурсивно застосовується процедура матричної декомпозиції багатозв'язного ортогонального полігону. Робота алгоритму продовжується, поки не залишиться порожніх осередків. Якщо ширина всіх виділених прямокутних областей дорівнює h , а довжина Θ , то подзадачу можна вважати розв'язаною: кожна прямокутна область може бути без залишку покрита листом прямокутного ресурсу. Якщо ресурс – напівнескінченна смуга і ширина прямокутної області дорівнює h , то матеріал для покриття кожної області виходить одним вертикальним розрізом рулонного ресурсу.

3.3 Задача розкрою ортогонального ресурсу

Розглянемо реальну задачу (вихідні дані та постановка наведені нижче) і за основу візьмемо приклад задачі суднобудівної індустрії, ілюстрацію якої візьмемо з роботи [17] (рис.3.8).

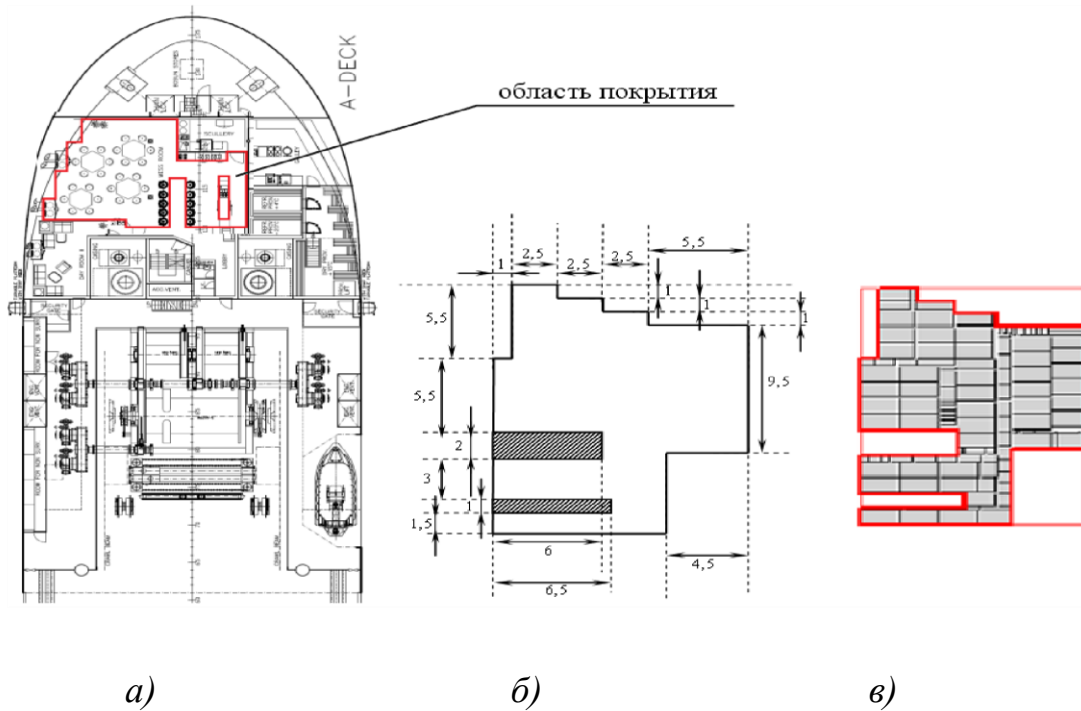


Рисунок 3.8 – Розв'язок задачі: *а* – палуба судна постачання;
б – багатозв'язний полігон покриття; *в* – приклад плану покриття

На палубі *а* судна постачання є приміщення, для якого відомі розміри. Необхідно покрити підлогу приміщення фанерою розмірного типу $1,2 \times 2,4$ м. Приміщення апроксимоване багатозв'язним ортогональним полігоном з прямокутниками із розмірами – $18,5 \times 14$ м, наборами заборонених областей з відомими розмірами і координатами.

3.3.1 Розв'язок практичної комплексної задачі геометричного покриття і розкрою

Подамо область з перешкодами у матричному вигляді, для чого покриємо полігон клітчастою прямокутною сіткою (рис. 3.9, *а*) та, згідно з алгоритмом, зробимо виділення областей без перешкод (рис. 3.9, *б*) і застосуємо розміри полігону (рис. 3.10)

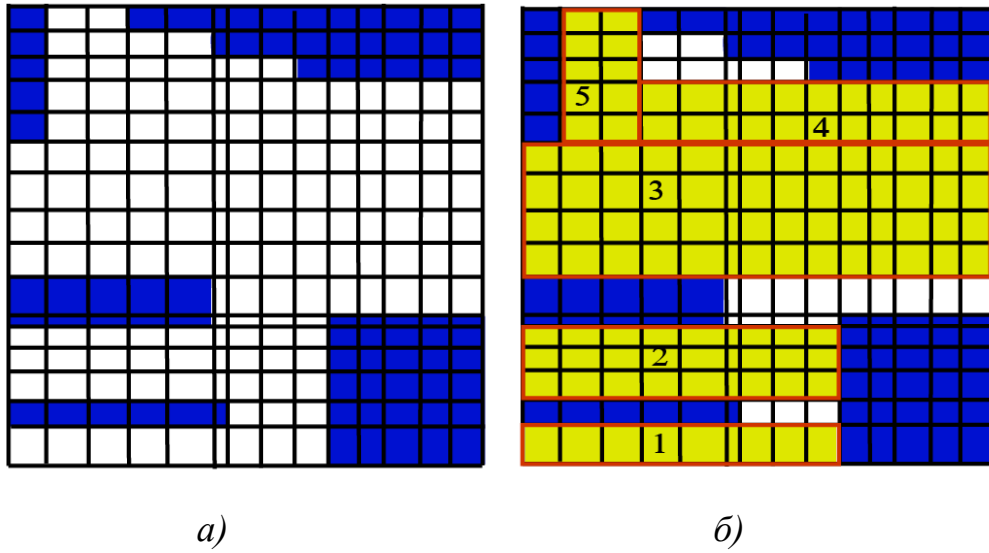


Рисунок 3.9 – Розв'язок задачі: *a* – покриття багатозв'язного полігону прямокутною сіткою; *б* – рівневе виділення областей без перешкод

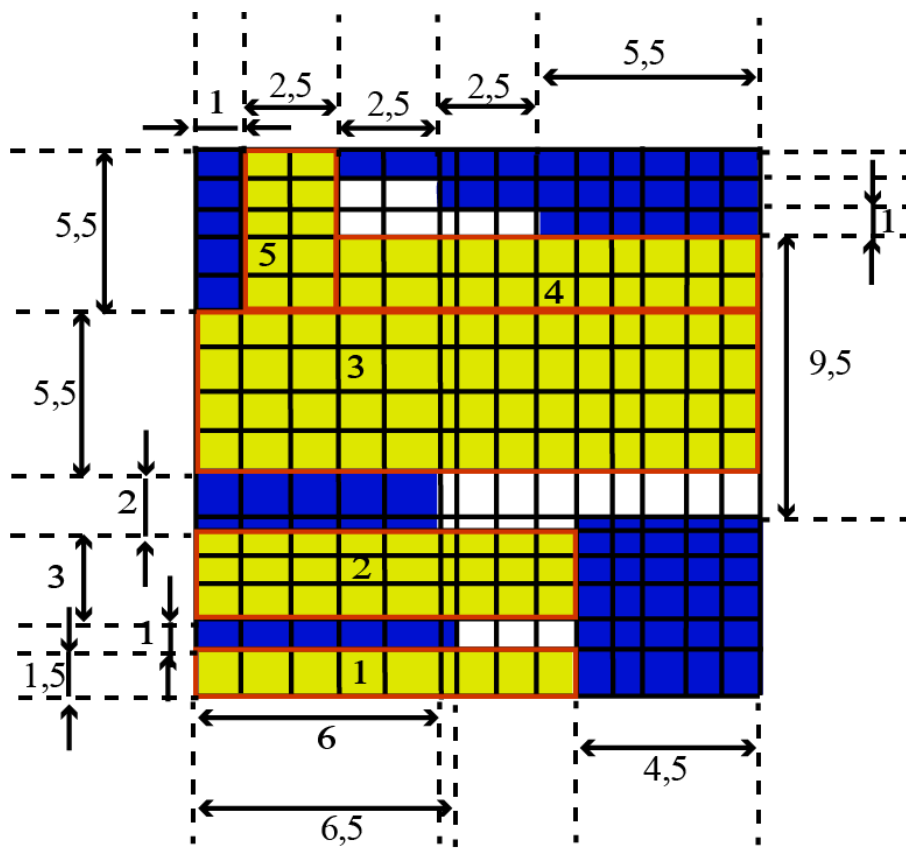


Рисунок 3.10 – Ілюстрація до розв'язку задачі

3.3.2 Розв'язок безвідходної комплексної задачі геометричного покриття і розкрою

Подамо багатозв'язний ортогональний полігон в матричному вигляді: покриємо його растровою сіткою, кожна комірка якої або не містить заборонених областей (порожня), або є забороненою областю, та поставимо у відповідність кожній комірці число 0, якщо вона вільна, і 1, якщо вона є забороненою областю. Тоді вихідний багатозв'язний ортогональний полігон може бути описаний булевою матрицею (рис. 3.11).

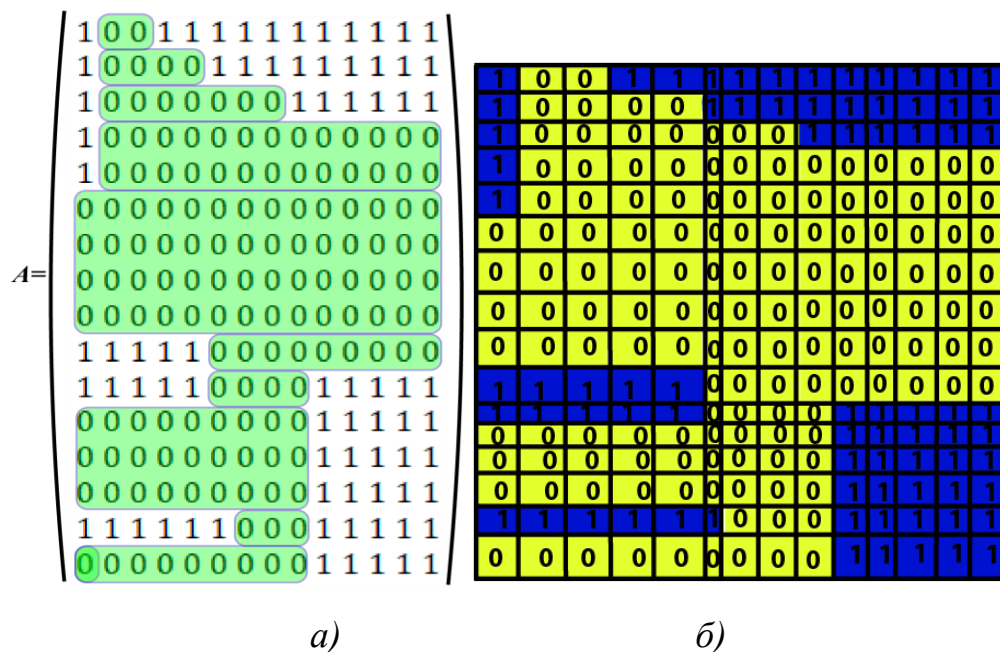


Рисунок 3.11 – Ілюстрація процедури декомпозиції багатозв'язного ортогонального полігону:

a – матричне подання; *б* – графічне

Далі були застосовані методи на основі двоетапного і триетапного підходів до розв'язку задачі.

Було створене 10 прикладів безвідходних задач, оптимальний план покриття багатозв'язного ортогонального полігону яких складається з 10 елементів покриття, розміри яких однакові і збігаються з розмірами ресурсу

1220×2440. Один від одного приклади відрізняються формою і розмірами багатозв'язного ортогонального полігону. Таким чином, оптимальна декомпозиція багатозв'язного ортогонального полігону на прямокутні області в даних прикладах одночасно є і оптимальним планом покриття.

Кожна із згенерованих задач була розв'язана за допомогою методів на основі дво- і триетапного підходів, отримані коефіцієнти покриття і розкрою.

Середній коефіцієнт розкрою для двоетапного методу склав 96%, для триетапного – 98%.

3.4 Висновки за III розділом

Таким чином, в цьому розділі на конкретних прикладах було розглянуто застосування математичних моделей для розв'язання NP-складної комплексної задачі геометричного покриття і розкрою.

ВИСНОВКИ

Робота присвячена побудові, дослідженню та застосуванню математичних моделей задач про покриття. Були отримані наступні результати:

- проведено огляд алгоритмів розв'язку задач про покриття, а саме, алгоритм повного перебору, алгоритм граничного перебору по увігнутій множині, алгоритми, які використовують скорочення таблиць покриття, алгоритм побудови циклічного залишку для таблиць покриття, алгоритм наближеного розв'язку задачі про покриття;

- розглянуто окремі класи задач розкрою та пакування: задача плоского цілочисленого розкрою і задача покриття графів, лінійний цілочисленний розкрій, прямокутний цілочисленний розкрій, прямокутний розкрій із заборонами, гільйотинний розкрій;

- розглянуто застосування математичних моделей комплексної задачі геометричного покриття і розкрою, а саме постановку, математичну модель і методи її розв'язання.

Багато практичних завдань зводяться до задач покриття. Отримані дослідження виявляють добру ефективність і високу точність розв'язання. Дані методи орієнтовані на досить широкий клас прикладних задач, пов'язаних з проектуванням раціонального розміщення прямокутних об'єктів в багатокутну область з перешкодами, наприклад, завдання розміщення вантажів на палубах суден, проектування розміщення товарів у складських приміщеннях і т.д. Тому ці алгоритми є результативними для широкої сфери застосування.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Алгоритм покрытия по методу «Построение одного кратчайшего покрытия». Книги для студентов. URL : https://studbooks.net/2249946/informatika/algorithm_pokrytiya_metodu_postroenie_odnogo_kratchayshego_pokrytiya (дата звернення: 19.11.2019).
2. Веников В. А. Теория подобия и моделирования : уч. пособ. Москва : Высшая школа, 1986. 480 с.
3. Вечтомов Е. М. Метафизика математики. Київ : Вят ГГУ, 2006. 508 с.
4. Глинский Б. А., Грязнов Б. С., Дынин Б. С., Никитин Е. П. Моделирование как метод научного исследования (гносеологический анализ) : уч. пособ. Москва : МГУ, 1965. 249 с.
5. Забелин С. Л., Жеголко К. В., Фроловский В. Д. Разработка и исследование генетического алгоритма для автоматизации проектных процедур оптимизации геометрического покрытия // *Вестник Тамбовского государственного технического университета*. 2015. №2. С. 257–265.
6. Зиновьев А. А., Ревзин И. И. Логическая модель как средство научного исследования // *Вопросы философии*. 1960. №1. С. 82–90.
7. Канин Е. С. Учебные математические задачи : уч. пособ. Киров : ГГУ, 2004. 154 с.
8. Кветний Р. Н., Богач І. В., Бойко О. Р., Софина О. Ю., Шушура О. М. Комп'ютерне моделювання систем та процесів. Методи обчислень : навч. посіб. Вінниця : ВНТУ, 2012. 193 с.
9. Козин И. В., Полюга С. И. Фрагментарные модели для некоторых экстремальных задач на графах // *Математичні машини і системи*. 2014. №1. С. 143 –150.
10. Кривуля А. В., Злотник М. В., Романова Т. Е. Средства математического моделирования в задачах прямоугольного покрытия

произвольных многоугольных областей // *Радиоэлектроника и информатика*. 2007. №4. С. 34–40.

11. Новик И. Б. О философских вопросах кибернетического моделирования. Москва : Знание, 1964. 40 с.

12. Новоселов В. Г., Скатков О. В. Прикладная математика для инженеров-системотехников. Дискретная математика в задачах и примерах : уч. пособ. Киев : УМК ВО, 1992. 200 с.

13. Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. Москва : Мир, 1985. 510 с.

14. Полюга С. І. Фрагментарні оптимізаційні моделі в задачах покриття графів типовими підграфами : дис... канд. фіз.-мат. наук : 01.05.02 / ЗНУ. Запоріжжя, 2015. 146 с.

15. Полякова С. Ю. Обучение математическому моделированию общественных процессов, средство гуманитаризации математического образования : дис...канд. пед. наук : 13.00.02 / ОГУ. Омск, 1999. 173 с.

16. Стоян Ю. Г., Пацук В. Н. Покрытие многоугольной области минимальным количеством одинаковых кругов заданного радиуса // *Доповіді НАН України*. 2006. №3. С. 74–77.

17. Телицкий С. В. Оптимизация многокритериального геометрического покрытия полигона на основе условных оценок с учетом технологических ограничений : Автореф. дис... канд. техн. наук : 05.13.01 / УГАТУ. Уфа, 2013. 19 с.

18. Телицкий С. В., Филиппова А. С. Комплексный подход к решению задачи покрытия области заголовками неопределенных размеров // *Научно-технические ведомости СПбГПУ*. 2012. № 2. С. 61–67.

19. Уемов А. И. Логические основы метода моделирования. Москва : Мысль, 1971. 312 с.

20. Филиппова А. С., Кузнецов В. Ю. Задачи о минимальном покрытии ортогональных многоугольников с запретными участками // *Информационные технологии*. 2008. №9. С. 60–65.

21. Фридман Л. М. Учитесь учиться математике. Москва : Просвещение, 1985. 114 с.

22. Хасанова Э. И. Проектирование размещения геометрических объектов на многосвязном ортогональном полигоне : дис... канд. техн. наук : 05.13.12 / УГАТУ. Уфа, 2011. 187 с.

23. Целищева И., Зайцева С. Моделирование в текстовых задачах // *Математика*. 2002, № 33. С. 34

24. Штофф В. А. Моделирование и познание. Москва : Наука и техника, 1974. 212с.

25. Штофф В. А. Моделирование и философия. Москва : Наука, 1966. 301 с.