

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра загальної математики

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА

на тему: «МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ  
СОЦІАЛЬНО-ДЕМОГРАФІЧНИХ ПРОЦЕСІВ»

Виконала: студентка 2 курсу, групи 8.1118-3

спеціальності 111 математика  
(шифр і назва спеціальності)

освітньої програми математика  
(назва освітньої програми)

Я.С. Конюшенко  
(ініціали та прізвище)

Керівник завідувач кафедри загальної математики,  
доцент, к.ф.-м.н., Зіновєєв І.В.  
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Рецензент доцент кафедри фундаментальної математики  
доцент, к.ф.-м.н., Клименко М.І.  
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

Факультет \_\_\_\_\_ математичний  
Кафедра \_\_\_\_\_ загальної математики  
Рівень вищої освіти \_\_\_\_\_ магістр  
Спеціальність \_\_\_\_\_ 111 математика  
Освітня програма \_\_\_\_\_ математика  
(шифр і назва)

**ЗАТВЕРДЖУЮ**

Завідувач кафедри загальної  
математики, к.ф.-м.н., доцент

Зіновєєв І.В.

(підпис)

“ 30 ” \_\_\_\_\_ травня \_\_\_\_\_ 2019 р.

**З А В Д А Н Н Я**

**НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТУ**

Конюшенко Яні Святославівни

(прізвище, ім'я та по батькові)

1. Тема роботи \_\_\_\_\_ Математичне моделювання соціально-демографічних процесів

керівник роботи \_\_\_\_\_ Зіновєєв Ігор Валерійович, доцент, к.ф.-м.н.

(прізвище, ім'я та по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від « 29 » \_\_\_\_\_ травня \_\_\_\_\_ 2019 року № 812-с

2. Строк подання студентом роботи \_\_\_\_\_ 26.12.2019 р.

3. Вихідні дані до роботи \_\_\_\_\_ 1. Постановка задачі.

\_\_\_\_\_ 2. Перелік літератури.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)

\_\_\_\_\_ 1. Основні поняття. Огляд підходів до математичного моделювання демографічних процесів.

\_\_\_\_\_ 2. Математичне моделювання соціально-демографічних процесів.

\_\_\_\_\_ 3. Оцінювання та прогнозування чисельності та вікового складу населення.

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень) \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_ Графічно-ілюстративний матеріал до тексту роботи

## 6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання \_\_\_\_\_ 30.05.2019 \_\_\_\_\_

## КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	05.06.2019	
2.	Збір вихідних даних.	06.06.2019 - 10.07.2019	
3.	Обробка методичних та теоретичних джерел.	15.07.2019	
4.	Розробка першого та другого розділу.	06.08.2019	
5.	Розробка третього розділу.	08.11.2019	
6.	Оформлення та нормоконтроль кваліфікаційної роботи.	03.12.2019	
7.	Захист кваліфікаційної роботи.	08.01.2020-11.01.2020	

Студент \_\_\_\_\_  
(підпис)

**Я.С. Конюшенко** \_\_\_\_\_  
(ініціали та прізвище)

Керівник роботи \_\_\_\_\_  
(підпис)

**І.В. Зіновєєв** \_\_\_\_\_  
(ініціали та прізвище)

### Нормоконтроль пройдено

Нормоконтролер \_\_\_\_\_  
(підпис)

**О. Г. Спиця** \_\_\_\_\_  
(ініціали та прізвище)

## РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра « Математичне моделювання соціально-демографічних процесів» 61 с., 8 рис., 14 табл., 28 джерел, 1 додаток.

ДЕМОГРАФІЧНИЙ ПРОЦЕС, МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ, МАТРИЧНА МОДЕЛЬ, МОДЕЛЮВАННЯ, ПРОГНОЗУВАННЯ, СОЦІАЛЬНЕ ЯВИЩЕ.

Об'єкт дослідження: показники соціально-демографічного стану в Україні.

Метою даної роботи є моделювання демографічних, соціально-демографічних процесів, прогнозування структурної динаміки вікових груп населення та пов'язаних з цим питань соціального забезпечення.

Методи дослідження: аналітичний, аналітико-синтетичний, порівняння.

Кваліфікаційна робота складається з вступу, трьох розділів, висновків та переліку посилань. У першому розділі розкриваються основні поняття математичного моделювання демографічних процесів та проведено стислий огляд методів моделювання демографічних процесів. У другому розділі розглянуто матричну модель Леслі і Люїса, яка використовується для прогнозування майбутньої вікової структури популяції. Також у цьому розділі розглянуто метод економетричного моделювання. У третьому розділі проведено аналіз динаміки та структури чисельності населення в Україні, оцінку динаміки соціальних виплат, а також проведено обчислювальний експеримент, який дає можливість спрогнозувати чисельність населення та віковий склад населення на найближчі роки.

## SUMMARY

Master's Qualification Thesis «Mathematical Modeling of the Socio-Demographic Processes»: 61 pages, 8 figures, 14 tables, 28 references, 1 supplement.

DEMOGRAPHIC PROCESSES, MATHEMATIC MODELING, THE MATRIX MODEL, MODELING, FORECASTING, A SOCIAL PHENOMENON.

The object of the study is design of demographic, social-demographic processes, prognostication of structural dynamics of age-dependent groups of population, and related to it questions of public welfare.

The aim of the study is the dynamics of population change in Ukraine.

The methods of research are analytical, analytical – synthetic, comparison.

The qualifying work consists of an introduction, three sections, conclusions and a list of references. The first section reveals the basic concepts of mathematical modeling of demographic processes and conducted a brief review of methods of modeling of demographic processes. The second section deals with matrix models and Leslie Lewis used to predict future age structure of the population. This section also deals with econometric modeling technique. The third section analyzes the dynamics and structure of the population in Ukraine, evaluating the dynamics of social transfers and realized experiments that enables to forecast population and age structure of the population in the nearest year.

## ЗМІСТ

Завдання на кваліфікаційну роботу.....	2
Реферат.....	4
Sammary.....	5
Вступ.....	7
1 Основні поняття. Огляд підходів до математичного моделювання демографічних процесів.....	8
1.1 Демографічний процес як соціальне явище та методи його дослідження.....	8
1.2 Методи моделювання динамічних процесів.....	11
1.2.1 Диференціальні моделі динамічних процесів .....	11
1.2.2 Різницеві моделі динамічних процесів .....	14
1.3 Висновки по першому розділу.....	19
2 Математичне моделювання соціально-демографічних процесів.....	20
2.1 Матричні моделі Леслі і Люїса.....	20
2.2 Економетричне моделювання демографічних процесів.....	23
2.3 Висновки по другому розділу.....	31
3 Оцінювання та прогнозування чисельності та вікового складу населення України на основі моделі Леслі і Люїса.....	32
3.1 Аналіз динаміки та структури чисельності населення в Україні....	32
3.2 Оцінка динаміки соціальних виплат в Україні.....	39
3.3 Обчислювальний експеримент.....	42
3.4 Висновки по третьому розділу.....	49
Висновки.....	51
Перелік посилань.....	53
Додаток А Розрахунки чисельності населення у програмі Maple.....	56

## ВСТУП

Актуальність дослідження демографічних процесів зростає з кожним роком, оскільки негативні тенденції демографічної ситуації в Україні відображаються в різкому скороченні чисельності населення, зниженні народжуваності, підвищенні рівня захворюваності та смертності. Все це в свою чергу впливає на економічне, соціальне, культурне середовище життя країни. Тому визначення факторів, які спричиняють негативні тенденції у відтворенні населення є необхідними для врегулювання ситуації. Зокрема на демографічну ситуацію впливає соціальна політика держави: соціальні виплати та послуги, проведення соціальних реформ, які можуть різнобічно впливати на відтворення та рівень життя населення.

Мета роботи полягає в оцінюванні та прогнозуванні чисельності та вікового складу населення України.

Для досягнення поставленої мети необхідно виконати такі завдання:

- охарактеризувати основні поняття демографічного процесу;
- ознайомитися з різноманітністю підходів до моделювання соціально-демографічних процесів;
- проаналізувати демографічну ситуацію в Україні;
- розглянути економетричне моделювання демографічних процесів;
- ознайомитися з матричною моделлю Леслі і Льюїса;
- оцінити та спрогнозувати чисельність та віковий склад населення України.

Об'єкт дослідження – показники демографічного стану в Україні.

Предмет дослідження – динаміка зміни народонаселення в Україні.

В ході виконання дослідження ми використали такі методи: аналіз, порівняння, узагальнення, графічний аналіз.

# 1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ. ОГЛЯД ПІДХОДІВ ДО МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ДЕМОГРАФІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

## 1.1 Демографічний процес як соціальне явище та методи його дослідження

Центральне місце в системі знань про народонаселення займає демографія – наука, що вивчає кількість, територіальне розміщення та склад населення, досліджує закономірності процесу відтворення населення у зв'язку з політичними, соціально-економічними та психологічними чинниками й на основі отриманих знань визначає характерні тенденції, спонукаючи до коригування внутрішньої політики держави [15]. Основними поняттями демографії є демографічна подія, демографічний процес, демографічні знання та демографічна ситуація [8].

Демографічна подія – це подія, яка відбувається в житті окремої людини та має значення для зміни чисельності й структури населення в цілому. Сукупність демографічних подій становлять демографічний процес, в якому поєднуються загальні тенденції розвитку з окремими особливостями на певних етапах. Знання загальних закономірностей розвитку демографічного процесу та їх особливостей у різних соціально-економічних умовах являють собою демографічні знання. Стан демографічних процесів, складу й розміщення населення на певний час на певній території називаються демографічною ситуацією [8].

Демографічний процес як процес руху населення може набувати однієї з трьох форм:

Природного руху – процес, що змінює чисельність та склад населення шляхом його оновлення (смертність та народжуваність) або сприяє цій зміні (шлюбність та розлученість).



Механічного руху – процес зміни чисельності та складу населення за рахунок його територіального переміщення (урбанізація, еміграція, імміграція).

Соціального руху – процес зміни складу населення внаслідок його соціально-економічного та культурного розвитку (зникнення одних верств населення та поява інших) [18].

Природний рух населення характеризують коефіцієнтами народжуваності, смертності та природним приростом населення. Коефіцієнт народжуваності – це відношення кількості народжених протягом календарного періоду до середньорічної кількості наявного населення, розраховане на 1000 осіб. Коефіцієнт смертності – це відношення кількості померлих протягом календарного періоду до середньорічної кількості наявного населення, розраховане на 1000 осіб. Різниця між коефіцієнтом народжуваності та смертності становить природний приріст населення [ 9].

Таким чином, демографічний процес включає в себе процеси народжуваності, смертності, шлюбності, розлучуваності, урбанізації, еміграції та імміграції. Розглянемо детальніше кожен з них.

Народжуваність – це процес народження дітей в сукупності людей, які становлять генерацію жінок, здатних до відтворення потомства [15]. Смертність - масовий демографічний процес припинення життя частини населення. Статистичне вивчення та оцінка смертності здійснюється методом екстенсивного та інтенсивного аналізу [18]. Шлюбність являє собою процес утворення шлюбних пар, що виступає одним з головних чинників формування родин, зміни родинної структури населення та народжуваності [15]. Розлучення – це розпад подружньої пари внаслідок розірвання шлюбу [15].

Міграція – це переміщення людей через кордони певних територій з метою тимчасового перебування або постійного поселення [15]. Існують такі види міграції:

а) маятникова – це щоденне або щотижневе переміщення до місця роботи і назад;

б) сезонна – це регулярне переміщення людей на більш тривалий час з тимчасовим оселенням за місцем навчання, роботи тощо;

в) епізодична – це нерегулярні, спорадичні територіальні переміщення людей в справах бізнесу, туризму, відпочинку [17].

Виокремлюють також внутрішню та зовнішню міграцію. Внутрішня міграція – це територіальне переміщення осіб всередині країни, що поділяється на обласне, внутрішньо обласне, міжрайонне, внутрішньорайонне. Зовнішню міграцію поділяють на внутрішньоконтинентальну та міжконтинентальну. Також виділяють еміграцію (трудова, політична) – виїзд з країни, імміграцію – в'їзд в країну з метою постійного проживання [17].

Закономірності розвитку окремих демографічних процесів та відтворення населення в цілому, фактори впливу на нього, вивчає демографічний аналіз, який здійснюється стосовно часу й території. Методи демографічного аналізу можна поділити на такі групи:

Статистичні методи (демографічна статистика) – методи розрахунку абсолютних, відносних та середніх величин, індексів, ймовірних характеристик інтенсивності демографічних процесів. На основі цього методу розроблено метод демографічних таблиць – це побудова теоретичної моделі процесу відтворення населення на основі таблиць, що містять імовірнісні показники [24, 21].

Математичні моделі застосовуються для встановлення зв'язків демографічних процесів та факторів, які на них впливають [24, 21].

Соціологічні методи застосовуються для аналізу демографічної поведінки та ставлення населення до різних демографічних подій [25, 21].

Графічні методи полягають у поданні інформації у вигляді графіків, схем, малюнків, карт, що дає змогу наочно відобразити закономірності розвитку населення [25, 21].

Окрім цього, для дослідження демографічних процесів використовуються загальні методи, які застосовуються в різних науках, та власне демографічні. До суто демографічних методів належать такі: метод когорт, повздовжній та поперечний аналіз, метод потенційної демографії, метод демографічного моделювання. Метод когорт дозволяє вивчити зміни протягом життя генерації (покоління). Повздовжній та поперечний аналіз дає змогу порівняти особливості кількох генерацій. Методи потенційної демографії та демографічного моделювання здійснюють прогнозування тривалості життя людини у майбутньому [15].

Отже, демографічний процес являє собою сукупність демографічних подій у житті людини. Він може проявлятися у трьох формах: природному, механічному та соціальному русі населення. Основними демографічними процесами виступають народжуваність, смертність, шлюбність та розлучуваність, які відображають демографічну ситуацію в країні. Тому доцільно охарактеризувати основні фактори впливу на демографічні процеси в країні.

## **1.2 Методи моделювання динамічних процесів**

### **1.2.1 Диференційні рівняння динамічних процесів**

Якщо поставлено задачу скласти вихідні диференційні рівняння, то можливі дві ситуації: детальна декомпозиція системи на модулі й окремі ланки можлива, або ні. Істинною будемо називати таку модель або такий математичний опис, у яких відомо, що вони детально відповідають фізичній природі системи.

Якщо декомпозиція на модулі й ланки для системи неможлива, то, не маючи детальної інформації про її фізичну природу, можна одержати лише помилкову модель або помилковий математичний опис, які, однак,

дозволяють досліджувати систему й одержати адекватні результати. У цьому випадку сукупність вихідних диференційних рівнянь моделі одержують через частотний домен, шляхом експериментального зняття частотних характеристик.

Для фізичної системи порядок системи диференційних рівнянь її істинної моделі звичайно в десять і більше разів вище порядку системи диференційних рівнянь її помилкової моделі. Тим обумовлена широка популярність помилкових моделей, і типових ланок, як структурних елементів для їхнього створення [11].

З метою формалізації процесу складання вихідних диференційних систем використовують такі методи, як метод контурних струмів, метод вузлових потенціалів й їхні аналоги, наявні у всіх енергетичних доменах. У результаті їхнього застосування виходить єдина система:

$$\begin{aligned} a_{11}(p)x_1 + a_{12}(p)x_2 + \dots + a_{1k}(p)x_k &= f_1(t), \\ a_{21}(p)x_1 + a_{22}(p)x_2 + \dots + a_{2k}(p)x_k &= f_2(t), \\ a_{k1}(p)x_1 + a_{k2}(p)x_2 + \dots + a_{kk}(p)x_k &= f_k(t), \end{aligned} \quad (1.1)$$

де  $x_1, \dots, x_k$  – узагальнені координати системи, у тому числі помилка –  $x(t)$  і регульована величина –  $y(t)$ ;  $f_1(t), \dots, f_k(t)$  – зовнішні координати, що задають вплив  $g(t)$  і збурення  $f(t)$ .

Для зручності й формалізації рішень систему рівнянь (1.1) можна представити в п'яти стандартних формах: у формі Коші; у просторі станів; обчислену відносно регульованої величини –  $y(t)$ ; обчислену відносно помилки –  $x(t)$ ; у вигляді передатних функцій –  $w(p), F(p), F_x(p)$ .

Матрична форма запису системи диференційних рівнянь вирішених винятково щодо першої похідної координат. Можна вирішити систему диференційних рівнянь представлену у формі Коші:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 + a_1f_1; \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 + a_2f_2; \\ \frac{dx_3}{dt} = a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 + a_3f_3, \end{cases}$$

де  $x_1, x_2, x_3$  – власні координати системи,  $x(t)$  – помилка системи,  $u(t)$  – вплив на об'єкт,  $y(t)$  – вихідна координата;  $a_{11}, \dots, a_{33}$  – постійні коефіцієнти (якщо система не є залежною від параметра),  $T_j$  – суми й добуток постійних часу,  $K_n$  – коефіцієнтів підсилення;  $F_1, F_2, F_3$  – вплив на систему,  $g(t)$  – сигнал завдання,  $F_j(t)$  – перешкоди.

Система диференціальних рівнянь може бути перетворена до одного рівняння шляхом виключення проміжних координат (звичайно вихідну координату виражають через координату завдання):

$$g(t); \varkappa(t); \varkappa(t); \dots; y(t).$$

Результатом подібного перетворення є рівняння руху системи:

$$D(p) y(t) = R(p) g(t) - N(p) F(t),$$

де  $D(p) = a_0p_n + a_1p_{n-1} + \dots + a_{n-1}p + a_n$  – характеристичний поліном;  $R(p) = D(p) - Q(p) = b_0p_m + b_1p_{m-1} + \dots + b_{m-1}p + b_n$  – коефіцієнти цього полінома визначають вплив заданого впливу  $g(t)$  на регульовану координату  $b(t)$ , причому його ступінь менше ступеня характеристичного полінома, тобто  $N(p) = d_0p_k + d_1p_{k-1} + \dots + d_{k-1}p + d_k$  – коефіцієнти полінома визначають вплив перешкоди  $f(t)$  на систему [11].

Якщо система диференціальних рівнянь (1.1) вирішується відносно похибки системи, то виходить рівняння похибки замкнутої системи  $D(p) x(t) = Q(t) g(t) + N(p) f(t)$ , де  $D(p) = a_0p_n + a_1p_{n-1} + \dots + a_{n-1}p +$

$a_n$  – характеристичний поліном;  $Q(p) = D(p) - R(p) = c_0p^n + c_1p_{n-1} + \dots + c_{n-1}p + c_n$  – коефіцієнти полінома визначають вплив заданого впливу  $g(t)$ , на помилку  $x(t)$ ;  $N(p) = d_0p^k + d_1p_{k-1} + \dots + d_{k-1}p + d_k$  – коефіцієнти полінома визначають вплив перешкоди  $f(t)$  на систему [11].

### 1.2.2 Різницеві моделі динамічних процесів

Завдяки простоті структури й наявності багатьох надійних методів оцінювання параметрів різницеві рівняння широко застосовують при моделюванні процесів у техніці, економетриці, біології й інших науках.

Простим прикладом різницевого рівняння є стохастичне рівняння першого порядку

$$y(k) = Y(k - 1) + \varepsilon(k), \quad (1.2)$$

де  $y(k)$  – основна змінна,  $\varepsilon(k)$  – випадкова величина, що відображає вплив різноманітних факторів на основну змінну.

У першу чергу це випадкові збурення, які діють на процес. Найчастіше думають, що випадкова величина має наступний нормальний розподіл:  $\{\varepsilon(k)\} \sim N_n(0, \sigma_\varepsilon^2)$ , тобто вона має нульове середнє та дисперсію  $\sigma_\varepsilon^2$ .

З допомогою рівняння (1.2) описують, наприклад, ціну акції на біржі в якийсь день, що відповідає аргументу  $k$ . Його називають ще рівнянням, що описує процес випадкового кроку. Таку назва воно одержало з тієї причини, що поточне значення основної змінної визначається фактично випадковою змінною.

Воно може бути записане також у вигляді першої різниці  $\Delta y(k) = \varepsilon(k)$ , де  $\Delta y(k) = y(k) - y(k - 1)$ . Більш загальною формою різницевого рівняння (1.2) є наступна  $\Delta y(k) = a_0 + a_1 y(k - 1) + \varepsilon(k)$ , але для того, щоб воно відповідало процесу випадкового кроку необхідно

покласти  $a_0 = a_1 = 0$ , інакше це рівняння вже не буде відповідати своєму призначенню. Вкажемо, що порядок різницевого рівняння визначається числом минулих вимірів змінної, які використовуються в правій частині для пояснення основної змінної.

Скороченою формою різницевого рівняння називають таку, у якій основна змінна (у правій частині) залежить від минулих вимірів цих же змінних, минулих вимірів інших ендогенних змінних, поточних і минулих вимірів екзогенних змінних і збурень.

Рівняння вважається структурованим, якщо в ньому ендогенна змінна залежить від поточного (а не минулого) значення іншої ендогенної змінної.

Позитивною стороною використання різницевих рівнянь є те, що їхні параметри легко обновляються при надходженні нових вимірів, досить просто можна змінити порядок і структуру математичної моделі. При цьому під структурою моделі мають на увазі кількість рівнянь у моделі, їхній порядок, наявність нелінійності і їхній тип, наявність запізнення (лага) і його оцінка.

При використанні дискретних рівнянь незалежну змінну час  $t$  замінюють дискретним часом  $t = kT_s$ , де  $T_s$  – період дискретизації вимірів, що у техніці приймає значення від однієї мікросекунди до десятків секунд, а при моделюванні економічних процесів – від одного дня до одного року, залежно від того яку статистику можна одержати. Період дискретизації, як правило нормують до одиниці, а незалежною змінною залишається  $k$ . При цьому для кожного прикладного завдання дискретна одиниця часу має своє відповідне значення.

Разом з основною змінною для опису процесів використовують перші й другі різниці, наприклад:

$$\begin{aligned}\Delta y(k) &= y(k) - y(k - 1), \\ \Delta y(k + 1) &= y(k + 1) - y(k), \\ \Delta y(k + 2) &= y(k + 2) - y(k + 1).\end{aligned}$$

Наведені перші різниці відображають швидкість зміни основної змінної, що відповідає першій похідній для рівнянь, записаних у безперервному часі, тобто для диференціальних рівнянь.

Інші різниці відображають швидкість зміни в часі перших різниць і записуються так:

$$\begin{aligned}\Delta^2 y(k) &= \Delta(\Delta y(k)) = \Delta[y(k) - y(k-1)] \\ &= [y(k) - y(k-1)] - [y(k-1) - y(k-2)] \\ &= y(k) - 2y(k-1) + y(k-2), \\ \Delta^2 y(k+1) &= \Delta(\Delta y(k+1)) = y(k+1) - 2y(k) + y(k-1).\end{aligned}$$

На практиці другі різниці використовують досить рідко, а різниці вищого порядку не використовуються [11]. Різницеві рівняння, у правій частині яких присутні минулі виміри основної змінної, називають авторегресійними, тобто регресія змінної на саму себе. Рівняння авторегресії  $n$ -го порядку має вигляд:

$$y(k) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i y(k-i) + \varepsilon(k).$$

Якщо для процесу, що моделюється, можна виявити вхідну змінну, то вона записується в правій частині

$$y(k) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i y(k-i) + \sum_{j=0}^q b_j x(k-j) + \varepsilon(k).$$

Якщо – випадковий процес, то таке рівняння називають авторегресією з ковзним середнім (АРКС), при цьому коефіцієнт, як правило приймають рівним одиниці. Гетероскедастичними називають процеси зі змінною



дисперсією, а гомоскедастичними – процеси з постійною дисперсією. Формально для гетероскедастичного процесу можна записати  $\text{var}[\varepsilon(k)] = \sigma_\varepsilon^2 \neq \text{const}$ . Припущення гомоскедастичності означає, що варіація кожної випадкової величини  $\varepsilon(k)$  навколо її математичного очікування залишається постійною величиною незалежно від значень факторів. Тобто,  $\sigma_\varepsilon^2$  не є функцією  $x_{ij}$ . Гетероскедастичність означає, що дисперсія процесу зменшується або збільшується в часі, або є більш складною функцією часу. Тобто, вона може змінюватися по досить складних законах, якій потрібно знайти при створенні моделі процесу. Іноді використовують припущення, коли гетероскедастичність має наступну  $\sigma_{\varepsilon(k)}^2 = k^2 \sigma^2$ , де  $k$  – константа, яку необхідно оцінити за допомогою експериментальних даних й обраного методу оцінювання параметрів. Використання умовного прогнозування має значні переваги перед використанням безумовного.

Нехай оцінюється стаціонарна модель авторегресії з ковзним середнім типу  $y(k) = a_0 + a_1 y(k-1) + \varepsilon(k)$  й необхідно спрогнозувати величину  $y(k+1)$ . Умовним математичним очікуванням  $E_k[y(k+1)] = a_0 + a_1 y(k)$ .

Якщо використати це умовне середнє значення для прогнозування значення  $y(k+1)$ , то дисперсія похибки прогнозу буде визначатися як

$$E_k\{[y(k+1) - a_0 - a_1 y(k)]^2\} = E_k[\varepsilon^2(k+1)] = \sigma^2.$$

Якщо замість умовного прогнозу використовується безумовний, то він відображає середнє значення для послідовності  $\{y(k)\}$  на нескінченному тимчасовому інтервалі, що дорівнює у цьому випадку  $a_0/(1 - a_1)$ .

Завдяки тому факту, що умовний прогноз базується на відомих поточних і минулих значеннях ряду, віддають перевагу умовному прогнозуванню.

Якщо дисперсія послідовності  $\{\varepsilon(k)\}$  непостійна, то тенденцію зміни

цього параметра можна описати за допомогою моделі АРКС. Наприклад, позначимо через  $\{\hat{\varepsilon}(k)\}$  оцінки залишків (похибок) моделі першого порядку  $y(k) = a_0 + a_1 y(k-1) + \varepsilon(k)$ .

Для такого випадку умовна дисперсія основної змінної визначається як

$$\text{var}[y(k+1)|y(k)] = E_k\{[y(k+1) - a_0 - a_1 y(k)]^2\} = E_k[\varepsilon^2(k+1)].$$

До цього моменту вважалося, що  $E_k[\varepsilon^2(k+1)] = \sigma^2$  є постійною величиною. Покладемо тепер, що умовна дисперсія – змінна величина. Одним із простих підходів до опису такої змінної величини є застосування моделі типу АР(q) до квадратів оцінок залишків. Наприклад,

$$\hat{\varepsilon}^2(k) = a_0 + a_1 \hat{\varepsilon}^2(k-1) + a_2 \hat{\varepsilon}^2(k-2) + \dots + a_q \hat{\varepsilon}^2(k-q) + v(k), \quad (1.3)$$

де  $v(k)$  – процес білого шуму.

### 1.3 Висновки по першому розділу

У першому розділі розглянуто демографічний процес, який являє собою сукупність демографічних подій у житті людини. Він може проявлятися у трьох формах: природному, механічному та соціальному русі населення. Основними демографічними процесами виступають народжуваність, смертність, шлюбність та розлучуваність, які відображають демографічну ситуацію в країні.

Також в цьому розділі розглянуто сучасні методи побудови математичних моделей, насамперед диференціальні та різницеві рівняння, які стали особливо популярними в останні двадцять років. Завдяки простоті структури й наявності багатьох надійних методів оцінювання параметрів,

різницеві рівняння широко застосовують при моделюванні процесів у техніці, економетриці, біології та інших науках.

## 2 МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СОЦІАЛЬНО- ДЕМОГРАФІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

### 2.1 Матричні моделі Лесли і Люїса

Матриця є прямокутна таблиця, розміром  $i * j$ , де  $i$  – число рядків,  $j$  – число стовпців, (наприклад  $3 * 4$ ). Кожне з  $i * j$  чисел називається елементом. Якщо в цілому матриця позначається  $A$ , то  $a_{ij}$  – це елемент  $i$  – того рядка,  $j$  – того стовпця  $A$ .

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}.$$

Матриці бувають декількох типів: квадратні, поодинокі, нульові, симетричні. Крім того, існують матриці вектор-стовпець і вектор-рядок, а також що складається з одного елемента - скаляр, наприклад  $= 3$ .

Записувати масиви чисел у вигляді матриць зручно тому, що це дозволяє оперувати з ними так само, як і зі звичайними числами, тобто скалярами. Наприклад, додавання і віднімання двох матриць полягає в додаванні або відніманні всіх відповідних елементів цих матриць. Множення і ділення матриць не настільки прості, але теж представляють цілком певні математичні операції. Матрична алгебра є однією з найважливіших областей сучасної математики і екологам, які використовують системний аналіз необхідно її знати.

Квадратні матриці володіють однією важливою властивістю: для будь-якої такої матриці існують власні числа ( $l$ ) і власні вектори ( $n$ ), які задовольняють рівняння  $A * v = l * v$ , де  $A$  – квадратна матриця,  $v$  – вектор стовпець,  $l$  - скаляр, головне власне число. У загальному випадку, якщо матриця має розмір  $n * n$ , існує  $n$  власних чисел і векторів. Вони грають

важливу роль при з'ясуванні специфічних властивостей вихідної матриці. Існує багато методів їх визначення і, як правило, без ЕОМ це неможливо.

Метод матричного аналізу представляє собою дослідження взаємозв'язків між різноманітними об'єктами за допомогою матричних моделей. Матричні моделі будуються у вигляді таблиць [ 2].

Представлення інформації за допомогою матричних моделей можна вважати основоположним для соціометрії, для різних класів економіко-математичних моделей, наприклад, які зводяться до задач дискретного, лінійного та нелінійного програмування. Крім цього, воно широко використовується в математичній статистиці, теорії графів, теорії ігор [2].

Матричну модель можна розглядати як звичайно-різницевий аналог динамічної моделі. Один з ранніх варіантів матричної моделі був розроблений Льюїсом і Леслі [27] як модель, яка пророкує майбутню вікову структуру популяції за відомою структурою в даний момент часу і гіпотетичним коефіцієнтам виживання і відомої вікової структури. Популяцію розбивають на  $n$  вікових груп .

У постулаті [27] описується приклад побудови демографічної моделі. Нехай функції  $S_i (x_1, \dots, x_n)$ , які описують перехід із  $i$ -тої вікової групи в  $(i + 1) - y$ , являються лінійними функціями чисельності  $i$  -тої вікової групи,  $i = 1, 2 \dots n - 1$ ,  $S_i (0 < S_i \leq 1)$  – коефіцієнти виживаємості, які показують, яка доля осіб  $i$  -тої групи доживає до  $(i + 1) -$  го віку. Тоді для всіх груп, починаючи з другої, буде виконуватися:

$$X_{i+1}(t + 1) = S_i * X_i(t), i = 1, 2, 3, \dots, n - 1.$$

Вектор-стовбець, координатами якого являються чисельності усіх вікових груп, які позначаються  $X(t)$ . Тоді:

$$X(t + 1) = L * X_i(t),$$

$$L = \begin{vmatrix} b_1 & \dots & b_{n-1} & b_n \\ S_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & S_{n-1} & 0 \end{vmatrix},$$

де  $b_i \geq 0, i = 1 \dots n$ ;  $0 < S_j \leq 1, j = 1, 2 \dots n$ ;  $L$  – квадратична матриця, яка має порядок  $n * n$  і називається матрицею Леслі [26].

У роботі [27] згадуються складнощі, які з’являються в додатках моделі Леслі до популяції і які пов’язані з обмеженнями моделі. Допускається, що не вдається розглянути в  $n$ -ній (останній) віковій групі тільки особи останнього репродуктивного віку. Тоді до  $n$ -нної групи відносять всіх старших осіб, а до матриці Леслі додають елементи  $p_n (0 < p_n < 1)$ , які представляють частину осіб  $n$ -нної групи, які виживають за один часовий інтервал. Тоді матрицю  $L$  подають у вступному вигляді:

$$L + \Delta(p_n) = \begin{vmatrix} b_1 & \dots & b_{n-1} & b_n \\ S_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & S_{n-1} & 0 \end{vmatrix},$$

$$X_n(t + 1) = S_{n-1} * X_{n-1}(t) + p_n * X_n(t).$$

В цьому випадку отримують, що деяка частина популяції живе безкінечно довго.

Інша складність виходить з того, що не завжди можна вибрати масштаб часу так, щоб часові проміжки  $t = 1, 2 \dots$  відповідають переходу із однієї вікової групи до іншої. Тоді в [26] разом з величинами  $S_i$  розглядають величини  $p_i (0 < p_i < 1)$ , які представляють долю тих осіб  $i$ -тої групи, які перейшли в наступну вікову групу до моменту часу  $i$ . Тоді матриця  $L$  має вид:

$$L + \Delta(p_1 \dots p_n) = \begin{vmatrix} b_1 + p_1 & b_2 & \dots & b_n \\ S_1 & p_2 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & S_{n-1} & p_n \end{vmatrix}.$$

Особливості демографічних моделей:

а) неможливість проведення активних експериментів над людською популяцією для більш точної побудови моделей;

б) зміна параметрів моделі ( коефіцієнт народжувальності, коефіцієнт смертності і т.д.) визначаються, крім біологічних можливостей, різними соціально-економічними, політичними, психологічними факторами, які є важко прогнозованими;

в) дані беруться на основі виборчих спостережень або статичних показників, що призводять до великих помилок у порівнянні з моделями, застосовуваними, наприклад, в технічних системах;

г) «плавна» зміна чисельності, що затруднює рішення задачі ідентифікації моделі на обмеженому відрізку часу[25].

## **2.2 Економетричне моделювання демографічних процесів**

Заміщення одного об'єкта іншим із метою здобуття інформації про найважливіші властивості об'єкта-оригіналу за допомогою об'єкта-моделі називається моделюванням. Моделювання вивчає об'єкти дослідження математичними засобами за допомогою деяких допоміжних об'єктів, які називаються математичними моделями. Математична модель – це система математичних співвідношень, які описують досліджуваний процес або явище. Побудова моделей складається з таких етапів: створення моделі системи, її розв'язання, аналізу відповідності моделі економічній проблемі та застосування результатів дослідження при прийнятті рішень.

Для дослідження впливу факторів на певний об'єкт використовують модель регресії. При цьому змінна, яка визначається впливом фактору, називається залежною або регресантом, змінна, що визначає її – незалежною змінною або регресором. Якщо в моделі присутній лише один регресор, модель називається парною регресією, якщо два і більше – множинною регресією. Найпростіша регресійна модель виглядає наступним чином [6]:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 * X_i + u_i.$$

Вплив багатьох факторів на результуючу змінну може бути описаний моделлю множинної регресії:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 * X_1 + \beta_3 * X_2 + \dots + \beta_n * X_n + u_i.$$

Оцінені значення залежної змінної можна подати таким чином:

$$\hat{Y}_i = b_1 + b_2 X_i,$$

де  $\hat{Y}_i$  – це оцінені значення в залежності від незалежної змінної.

Різниця між фактичними значеннями регресанта та його оціненими (модельованими) значеннями називається залишком:

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i.$$

Величина  $\hat{Y}_i$  – це значення залежної змінної в спостереженні ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), яке залежить від  $\beta_1 + \beta_2 * X_i$ , де  $\beta_1$  та  $\beta_2$  – постійні величини, які називаються параметрами моделі, а  $X_i$  – це значення пояснювальної змінної в спостереженні  $i$ , та від випадкової величини  $u_i$ . Наявність випадкової величини пояснюється насамперед неможливістю точної відповідності значень залежної змінної значенням пояснювальної змінної [45, 6].

Необхідною умовою побудови моделі є збір, підготовка та обробка даних для моделювання. Підготовка даних передбачає відбір, агрегування та об'єднання даних; очистку (аналіз зв'язків, суттєвих ознак); трансформацію (перетворення даних з метою оптимізації їх структури); попередню обробку даних.



Трансформація даних в свою чергу включає зміну форматів та значень, сортування та групування, об'єднання та розширення, нормування, кодування та ранжування даних.

Для дослідження впливу соціальних виплат при народженні дитини на чисельність народжених ми використовуватимемо нормування даних за допомогою по елементних перетворень, зокрема за допомогою логарифмічного перетворення, що дозволить зменшити варіацію змінних.

Для характеристики даних використовують описову статистику, зокрема [6]:

- середнє значення ряду  $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$ , моду (найчастіше значення вибірки), медіану (величина вибірки, що знаходиться посередині ряду);
- дисперсію  $s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N-1}$  та стандартне відхилення  $\sigma = \sqrt{s_x^2}$ ;
- коефіцієнт варіації  $V = \frac{s_x^2}{\bar{x}}$ ;
- коваріації  $s_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{N-1}$ ;
- кореляцію  $\rho = \frac{s_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$ .

Дисперсія характеризує міру відхилення випадкової величини від середнього значення. Стандартне відхилення – це міра відхилення випадкової величини від математичного сподівання. Коефіцієнт варіації характеризує однорідність сукупності та повинен становити менше 33%. Коваріація вказує на прямий або обернений зв'язок між фактором та результативною ознакою. Кореляція знаходиться в межах від нуля до одиниці та вказує на наявність чи відсутність зв'язку [6].

При оцінюванні вище зазначених характеристик вибірки важливим є отримання незміщених, ефективних та стійких оцінок [6].

Математичне сподівання вибіркової сукупності повинне відповідати математичному сподіванню генеральної сукупності, в іншому випадку їх нерівність призводитиме до зміщеності в оцінці. Зміщеність оцінок може бути наслідком не включення в модель суттєвої змінної та ендогенності

змінних, тобто один або кілька факторів можуть визначатись іншими змінними. Для перевірки на ендогенність використовують тест Hausmana:

$$H_0: cov(x, e) = 0,$$

$$H_1: cov(x, e) \neq 0.$$

Нульова гіпотеза свідчить про відсутність ендогенності, тобто немає зв'язку між факторною ознакою та залишками. Для тестування фактору, який підозрюється на ендогенність, необхідно побудувати модель залежності (1 крок) цього фактору від набору незалежних змінних (інструментальних змінних). Оцінені залишки включаються в оригінальну модель (2 крок) як незалежна змінна разом з іншими факторами. Якщо коефіцієнт нахилу біля залишків відмінний від нуля, то ендогенність присутня, в іншому випадку – зв'язку між залишками та результативною ознакою немає [6].

Окрім цього важливо, щоб оцінка мала найменшу дисперсію у класі незміщених оцінок, тобто відхилення величини від середнього значення вибірки були якнайменшими. В такому разі оцінка буде ефективною. Неefективність спричинена включенням в модель несуттєвих змінних, які насправді не впливають на результуючу величину, а також автокореляцією, яка призводить до того, що залишки корелюють між собою і відповідно оцінки є завищеними. Для тестування на присутність автокореляції використовують тест Durбина-Watsona:

$$DW = \frac{\sum_{i=2}^T (\hat{\varepsilon}_i - \hat{\varepsilon}_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^T \hat{\varepsilon}_i^2}.$$

Значення коефіцієнту знаходиться в межах від 0 до 4. Якщо  $DW < 2$ , то автокореляція відсутня,  $DW = 0$  – присутня позитивна автокореляція,  $DW > 2$  – присутня негативна автокореляція [6].

Неефективні оцінки також можуть бути в разі наявності гетероскедастичності, тобто непостійності дисперсії залишків. Залишки повинні бути незалежними та розподілені за нормальним законом розподілу. Гетероскедастичність вказує на присутність системного фактору, який призводить до того, що залишки не випадково попадають у вибірку. Для тестування на гетероскедастичність використовують White тест:

$H_0: \sigma_i^2 = \sigma^2$ , тобто гетероскедастичність відсутня;

$H_1: \sigma_i^2 \neq \sigma^2$ , тобто гетероскедастичність присутня.

Для тестування необхідно побудувати модель регресії, де оцінені залишки виступатимуть залежною змінною, а всі регресори, їх квадрати, добутки – незалежними змінними. Коефіцієнт детермінації цієї моделі множиться на кількість спостережень. Отримане значення порівнюється з критичним значенням закону розподілу Пірсона. Якщо розраховане значення тесту перевищує критичне – ми відхиляємо нульову гіпотезу про відсутність гетероскедастичності [6].

Стійкість оцінки полягає в тому, що при збільшенні кількості спостережень вибіркового розподілу величини зводиться до справжнього параметра в генеральній сукупності.

Нестійкість оцінок виникає, коли проводиться дослідження нестационарних рядів, тобто в яких середнє значення, дисперсія та коваріація змінюються в різні проміжки часу, що в результаті завищує коефіцієнт детермінації та занижує значення статистики  $DW$ .

Дотримання умов незміщеності, ефективності та стійкості є важливими, оскільки дозволяють правильно інтерпретувати отримані результати моделювання.

Інтерпретація параметрів рівняння регресії здійснюється наступним чином: коефіцієнт нахилу  $\beta_2$  означає, що при збільшенні  $X_i$  на 1 одиницю,

значення  $Y_i$  зміниться на  $\beta_2$  одиниць. Параметр  $\beta_1$  показує прогнозоване значення  $Y_i$  при  $X_i$  рівному нулю [6].

Окрім цього для визначення істотності зв'язку певного фактору з залежною змінною використовується  $t$ -критерій Стюдента, який визначає статистичну значимість параметрів. Для цього припускається нульова гіпотеза  $H_0$  про те, що регресор не впливає на залежну змінну (коефіцієнт нахилу при  $\beta_2$  незалежній змінній дорівнює нулю), та альтернативна гіпотеза  $H_1$  – залежність між факторною та результативною ознакою присутня (коефіцієнт  $\beta_2$  відмінний від нуля):

$$H_0: \beta_2 = 0;$$

$$H_1: \beta_2 \neq 0.$$

Значення  $t$ -критерію Стюдента розраховується за формулою:

$$t = \frac{\beta_n}{\sigma}.$$

Розраховане значення  $t$ -критерію Стюдента порівнюють з критичним значенням, яке визначається з певним рівнем значимості та ступенями вільності. Якщо розраховане значення перевищує критичне, то нульова гіпотеза про відсутність зв'язку відхиляється, приймається альтернативна гіпотеза щодо впливу фактора на результуючу ознаку [6].

Для перевірки відповідності моделі регресії досліджуваному явищу використовують коефіцієнт детермінації (пояснення)  $R^2$ , який показує варіацію регресанта в залежності від регресора, та визначається:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}.$$

Коефіцієнт детермінації знаходиться в межах від нуля до одиниці. Якщо лінія регресії точно відповідає всім значенням спостережень залежної змінної, то  $R^2 = 1$ , якщо зв'язок між факторною та результативною ознакою відсутній,  $R^2 = 0$  [6].

Для перевірки моделі регресії на адекватність застосовується -критерій Фішера:

$$F = \frac{R^2(k-1)}{(1-R^2)/(n-k)}.$$

Нульова гіпотеза  $H_0$  полягає в тому, що зв'язок між факторною та результативною ознакою відсутній:  $H_0: \beta_2 = 0$ . Тоді альтернативна гіпотеза матиме вигляд:  $H_1: \beta_2 \neq 0$ . Розраховане значення порівнюється з критичним значенням критерію, яке визначається з певним рівнем значимості, ступенем свободи  $(k - 1)$ , де  $k$  – кількість параметрів та ступенем свободи  $(n - k)$ , де  $n$  – це кількість спостережень. Якщо розраховане значення перевищує критичне з певним рівнем значимості, то ми відхиляємо нульову гіпотезу на користь альтернативної та можемо стверджувати, що залежна змінна пояснюється факторними ознаками, а оцінена модель пояснює зміну регресора [6].

Метод регресійного аналізу застосовується до даних трьох видів: просторові дані, часові ряди та панельні дані. Ми використовуватимемо панельні дані, які поєднують просторові дані певного явища та часовий ряд цього явища, та складаються з повторних спостережень того ж об'єкта протягом певного періоду часу [6].

Головними підходами до моделювання панельних даних є використання моделей з фіксованим та випадковим ефектом. Виділяють три види моделей з фіксованим ефектом. Стандартне рівняння регресії виглядає наступним чином:

$$Y_{it} = \beta_1 + \sum_{j=2}^k \beta_j X_{ijt} + \sum_{p=1}^s \gamma_p Z_{pi} + \delta t + \varepsilon_{it},$$

де  $Y_{it}$  – це залежна змінна,  $X_{ijt}$  – спостережувані незалежні змінні,  $Z_{pi}$  – не спостережувані незалежні змінні,  $\varepsilon_{it}$  – випадкова величина.

Тренд  $t$  використовується для позначення зміни в часі величин. Величина  $\gamma_p Z_{pi}$  позначається як  $\alpha_i$  та характеризує не спостережуваний ефект. Якщо спостережувані змінні включають всі характеристики спостережуваної одиниці, то  $\alpha_i$  не включається в модель.

Перший вид моделі з фіксованим ефектом базується на розрахунку середнього значення змінних для кожної одиниці спостереження, які потім віднімаються від відповідних значень змінних:

$$\bar{Y}_i = \beta_1 + \sum_{j=2}^k \beta_j \bar{X}_{ij} + \delta \bar{t} + \alpha_i + \bar{\varepsilon}_{ij}.$$

В такому випадку зникає не спостережуваний ефект, а модель називається внутрішньо групова регресія, тому що відображає варіацію залежної змінної відносно середнього значення для всіх спостережень, які стосуються одиниці спостереження:

$$Y_{it} - \bar{Y}_i = \sum_{j=2}^k \beta_j (X_{ijt} - \bar{X}_{ij}) + \delta (t - \bar{t}) + \varepsilon_{ij} + \bar{\varepsilon}_{ij}.$$

Другий вид моделі з фіксованим ефектом називається регресія з першими різницями, оскільки передбачає вирахування не спостережуваного ефекту шляхом виключення спостережень попереднього періоду зі спостережень базового періоду [6]:

$$\Delta \bar{Y}_{it} = \sum_{j=2}^k \beta_j \Delta X_{ijt} + \delta + \varepsilon_{ij} + \bar{\varepsilon}_{it-1}.$$

Ще один вид моделі з фіксованим ефектом безпосередньо відображає не спостережуваний ефект.

### **2.3 Висновки по другому розділу**

У другому розділі розглянуто матричну модель Леслі і Люїса, яка використовується для прогнозування майбутньої вікової структури популяції за пропонованими коефіцієнтами народжуваності і виживання і відомої вікової структури у даний проміжок часу.

Також у цьому розділі розглянуто метод економетричного моделювання. Для моделювання демографічних процесів можна використовувати парну (якщо фактор один) та множинну регресію (якщо два і більше факторів). Постановка задачі, збір, підготовка даних є важливим етапом процесу побудови моделі. Визначення функціональної форми та основних факторів також позначаються на якості, адекватності моделі досліджуваному явищу. Для того, щоб модель регресії відображала досліджуваний об'єкт необхідно дотримуватись незміщеності, ефективності та точності оцінок. Порушення цих умов призводитиме до наявності автокореляції, гетероскедастичності, ендогенності, нестационарності ряду, а тому інтерпретовані результати будуть неправдивими.

### 3 ОЦІНЮВАННЯ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ ЧИСЕЛЬНОСТІ ТА ВІКОВОГО СКЛАДУ НАСЕЛЕННЯ УКРАЇНИ НА ОСНОВІ МОДЕЛІ ЛЕСЛІ І ЛЮІСА

#### 3.1 Аналіз динаміки та структури чисельності населення в Україні

Проаналізуємо основні демографічні процеси в Україні за 2011-2018 роки: чисельність наявного та постійного населення, природний та механічний приріст населення.

Як свідчать дані таблиці 3.1 і таблиці 3.2, з 2011 року по 2018 рік спостерігається скорочення населення, з 45,6 млн. осіб у 2011 році до 41,9 млн. осіб у 2018 році.

Зокрема у структурі наявного населення міське займає більшу частку ніж сільське, становлячи близько 69% загальної чисельності, тоді як частка жителів сіл – 31%.

Характерною особливістю демографічної ситуації в Україні є переважання чисельності жінок над чисельністю чоловіків, зокрема частка жінок становить близько 54%, тоді як частка чоловіків – 46%.

Таблиця 3.1 – Структура чисельності наявного та постійного населення України за 2011-2014 роки

Показник	Роки							
	2011		2012		2013		2014	
	Абсолютне значення, млн. осіб	Питома вага, %	Абсолютне значення, млн. осіб	Питома вага, %	Абсолютне значення, млн. осіб	Питома вага, %	Абсолютне значення, млн. осіб	Питома вага, %
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Чисельність наявного населення	45633637	100	45372692	100	45426249	100	42759661	100
Міське	31380874	68,8	31123007	68,6	31336623	69	29434316	68,8
сільське	14252763	31,2	14249685	31,4	14089626	31	13325345	31,2



## Продовження таблиці 3.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Чисельність постійного населення	45633637	100	45372692	100	45426249	100	42759661	100
Жінки	24476570	53,6	24409948	53,8	24327606	53,55	22971835	53,72
чоловіки	20976712	46,4	20962744	46,2	20918288	46,45	19787826	46,28

Таблиця 3.2 – Структура чисельності наявного та постійного населення України за 2015-2018 роки

Показник	Роки							
	2015		2016		2017		2018	
	Абсолютне значення, млн. осіб	Питома вага, %	Абсолютне значення, млн. осіб	Питома вага, %	Абсолютне значення, млн. осіб	Питома вага, %	Абсолютне значення, млн. осіб	Питома вага, %
Чисельність наявного населення	42590879	100	42414905	100	42216766	100	41983564	100
Міське	29346155	68,9	29243516	68,95	29132191	69	29017892	68,12
сільське	13244724	31,45	13171389	31,05	13084575	31	12965672	31,88
Чисельність постійного населення	42590879	100	42414905	100	42216766	100	41983564	100
Жінки	22872998	53,7	22770325	53,68	22658586	53,67	22528292	53,66
чоловіки	19717881	46,3	19644580	46,32	19558180	46,33	19455272	46,34

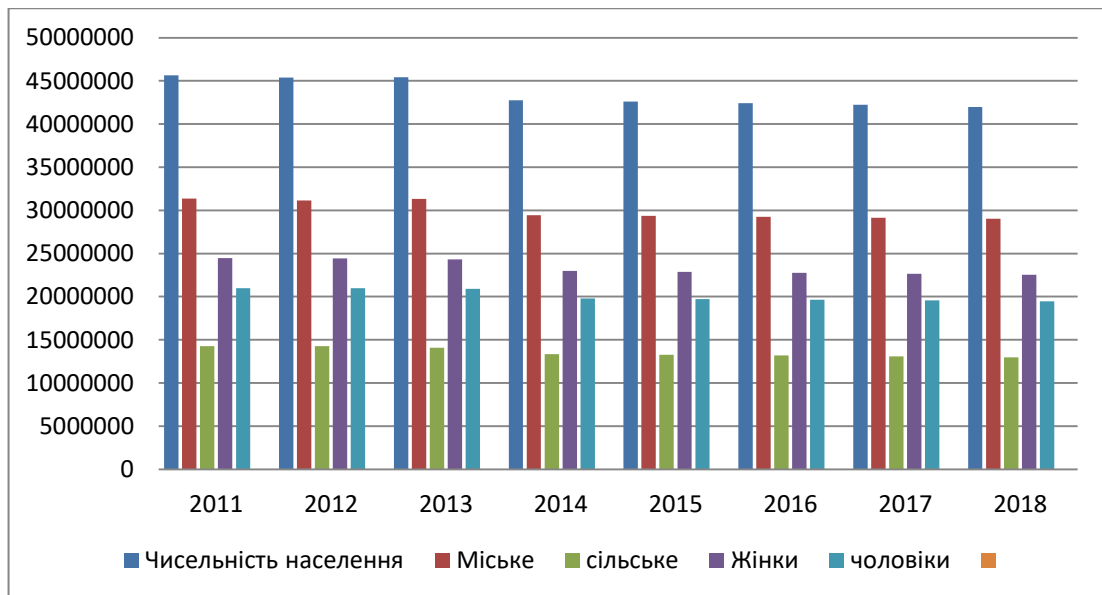


Рисунок 3.1 – Структура чисельності наявного та постійного населення України за 2011-2018 роки

Таблиця 3.3 – Динаміка чисельності населення за основними віковими групами в Україні за 2011-2014 роки

Показник, осіб	Роки								Темп приросту, %		
	2011		2012		2013		2014		2011/ 2012	2012/ 2013	2013 2014
	Абсол ютне значенн я, осіб	Питома вага, %	Абсол ютне значенн я, осіб	Питома вага, %	Абсол ютне значенн я, осіб	Питома вага, %	Абсол ютне значенн я, осіб	Питома вага, %			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0-15 років	6993132	15,4	7047723	15,5	7120088	15,7	6815959	16	0,78	1,02	-4,27
Жінки	3398588	-	3423474	-	3457348	-	3308129	-	0,73	0,99	-4,3
Чоловіки	3594544	-	3624249	-	3662740	-	3507830	-	0,83	1,06	-4,2
16-64 роки	31531710	69,4	31419651	69,25	31196975	69	29267922	68,45	-0,36	-0,7	-6,2
Жінки	16437828	-	16361309	-	16233738	-	15206369	-	-0,46	-0,78	-6,3
Чоловіки	15093882	-	15058342	-	14963237	-	14061553	-	-0,24	-0,63	-6,02
65 і більше	6928440	15,2	6905318	15,25	6928831	15,3	6675780	15,5	-0,33	0,34	-3,65

## Продовження таблиці 3.3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Жінки	4640154	–	4625165	–	4636520	–	4457337	-	-0,32	0,25	-3,86
Чоловіки	2288286	–	2280153	–	2292311	–	2218443	-	-0,36	0,53	-3,22
Всього, осіб	45453282	100	45372692	100	45245894	100	42759661	100	-0,18	-0,28	-5,5

Таблиця 3.4 – Динаміка чисельності населення за основними віковими групами в Україні за 2015-2018 роки

Показник, осіб	Роки								Темп приросту, %		
	2015		2016		2017		2018		2016/ 2015	2017/ 2016	2018/ 2017
	Абсолютне значення, осіб	Питома вага, %	Абсолютне значення, осіб	Питома вага, %	Абсолютне значення, осіб	Питома вага, %	Абсолютне значення, осіб	Питома вага, %			
0-15 років	6856311	16,09	6886960	16,24	6895699	16,34	6862759	16,35	0,45	0,13	-0,48
Жінки	3326461	–	3340551	–	3344868	–	3328827	-	0,4	0,13	-0,48
чоловік и	3529850	–	3546409	–	3550831	–	3533932	-	0,47	0,13	-0,48
16-64 роки	2896570	68,01	2866041	67,57	2835379	67,1	2808625	66,8	-1,1	-1,08	-0,94
Жінки	1503508	–	1486052	–	1468372	–	1452794	-	-1,16	-1,2	-1,07
чоловік и	1393067	–	1379989	–	1367007	–	1355830	-	-0,94	-0,95	-0,8
65 і більше	6768862	15,9	6867534	16,19	6967270	16,5	7034551	16,7	1,45	1,4	0,96
Жінки	4511508	–	4569254	–	4629992	–	4671518	-	1,26	1,31	0,89
чоловік и	2257354	–	2298280	–	2337278	–	2363033	-	1,78	1,67	1,09
Всього, осіб	42590879	100	42414905	100	42216766	100	41983564	100	-0,41	-0,47	-0,55

Як свідчать дані таблиць 3.3 і 3.4 в Україні переважає населення віком від 16 до 64 років, зокрема у 2011 році його частка становить 69,4 %. Позитивною є тенденція до скорочення чисельності населення віком від 16 до 64 років, що займає 66,89% у загальній кількості населення. Водночас частка населення віком до 15 років становить 16,35%. Таким чином, можна зробити висновок про стаціонарний тип статево-вікової піраміди населення та простий тип відтворення, на що вказує приблизна врівноваженість часток населення віком до 14 років та до 65 років.

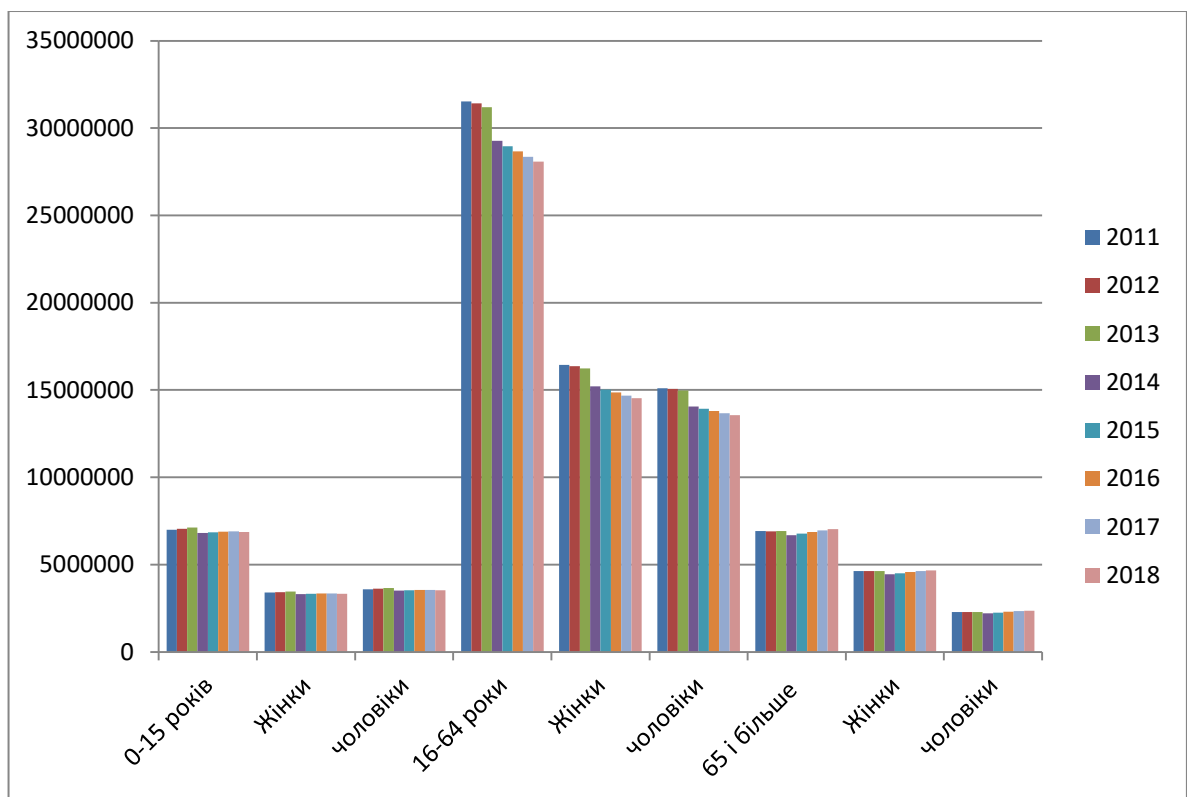


Рисунок 3.2 – Структура населення України за основними віковими групами у 2011-2018 році

Розглянемо природний рух населення в Україні, який відбувався протягом 2011-2018 років.

Таблиця 3.5 – Природний приріст населення України протягом 2011-2014 років

Показник	Абсолютне значення, тис. осіб				Темп приросту, %		
	2011 рік	2012 рік	2013 рік	2014 рік	2012/2011	2013/2012	2014/2013
Кількість народжених	502,6	520,7	503,7	465,9	3,6	-17,5	-7,5
Кількість померлих	664,6	663,1	662,4	632,3	-0,23	-0,11	-4,5
Природний приріст населення	-162,0	-142,4	-158,7	-166,4	12,1	11,45	4,9
Кількість шлюбів	355,9	278,3	304,2	295,0	-21,8	9,3	-3,02
Кількість розлучень	182,5	168,5	164,9	130,7	-7,7	-2,14	-20,74

Таблиця 3.6 – Природний приріст населення України протягом 2015-2018 років

Показник	Абсолютне значення, тис. осіб				Темп приросту, %		
	2015	2016	2017	2018	2016/2015	2017/2016	2018/2017
Кількість народжених	411,8	397,0	364,0	335,9	-3,6	-8,3	-7,7
Кількість померлих	594,8	583,6	574,1	587,7	-1,9	-1,6	2,37
Природний приріст населення	-183,0	-186,6	-210,1	-251,8	1,97	12,6	19,85
Кількість шлюбів	299,0	229,5	249,5	228,4	-23,25	8,7	-8,46
Кількість розлучень	129,4	130,0	128,7	153,9	0,7	-1	19,58

За даними таблиці 3.5 та таблиці 3.6 можна зробити висновок про те, що в Україні від'ємний природний приріст, тобто спостерігається негативна тенденція до депопуляції населення. Скорочення чисельності населення з 2011 року по 2018 рік відбувається у всіх областях України. Відтак кількість народжених у 2018 році зменшилась порівняно з 2011 роком. Зокрема

народжуваність у міській місцевості перевищує народжуваність серед жителів сільської місцевості. За досліджуваний період спостерігається позитивна тенденція до скорочення кількості померлих, як у міській, так у сільській місцевостях. Окрім цього у 2011-2018 роках зменшилась кількість шлюбів з одночасним збільшенням кількості розлучень. Кількість шлюбів та розлучень переважає у міській місцевості.

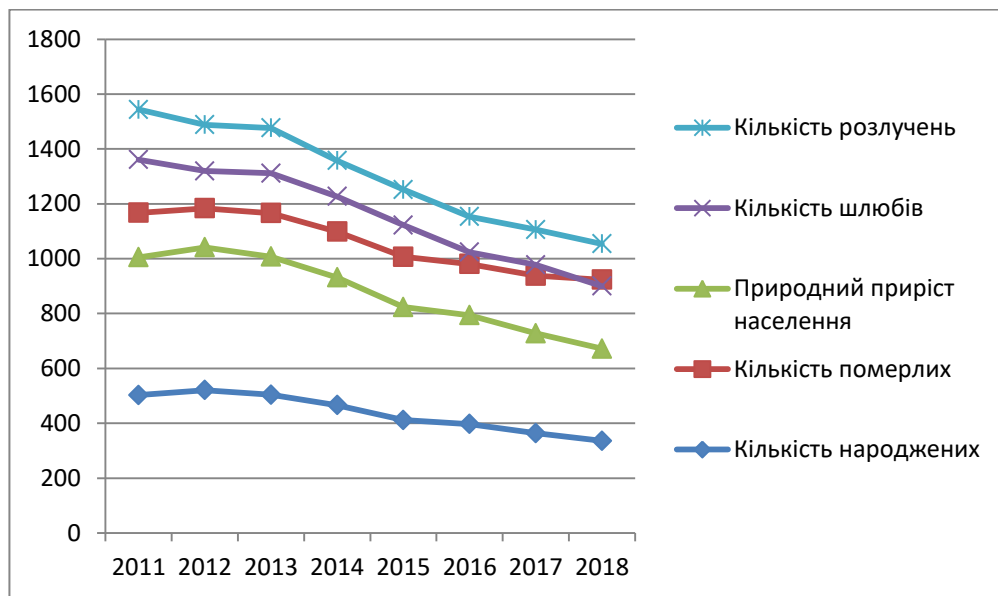


Рисунок 3.3 – Природний приріст населення України протягом 2011-2018 років

Таким чином, на основі вище проаналізованого стану демографічної ситуації можна виділити основні демографічні тенденції в Україні. Відбувається скорочення чисельності населення, зокрема за рахунок негативної тенденції до депопуляції. Для України характерні процеси урбанізації та механічного приросту за рахунок зовнішньої міграції. Спостерігається також низька народжуваність, масова одностатевість українських сімей, нестабільність шлюбів та високий рівень розлучуваності. Старіння населення поєднуються в Україні з високим, за європейськими мірками, рівнем смертності та низькою тривалістю життя.

### 3.2 Оцінка динаміки соціальних виплат в Україні

Розглянемо основні види соціальної допомоги населенню в Україні. Відповідно до Законів України «Про державну допомогу сім'ям з дітьми», «Про державну соціальну допомогу малозабезпеченим сім'ям», «Про державну соціальну допомогу інвалідам з дитинства та дітям-інвалідам», «Про державну соціальну допомогу особам, які не мають права на пенсію та інвалідам», «Про пенсійне забезпечення» можна виокремити такі види соціальної допомоги, які надаються управлінням праці та соціального захисту населення:

- допомога сім'ям з дітьми [7]:
  - а) допомога у зв'язку з вагітністю та пологами;
  - б) одноразова допомога при народженні дитини;
  - в) допомога по догляду за дитиною до досягнення нею трирічного віку;
  - г) допомога на дітей, які перебувають під опікою чи піклуванням;
  - д) допомога самотнім матерям;
  - е) допомога на всиновлених дітей;
- державна соціальна допомога малозабезпеченим сім'ям [9];
- державна соціальна допомога на дітей-сиріт та дітей, позбавлених батьківського піклування, грошового забезпечення батькам-вихователям і прийомним батькам за надання соціальних послуг у дитячих будинках сімейного типу та прийомних сім'ях [9];
- державна соціальна допомога інвалідам з дитинства та дітям-інвалідам [8];
- допомога малозабезпеченій особі, яка проживає разом з інвалідом 1 чи 2 групи внаслідок психічного розладу, на догляд за ним [10];
- компенсація фізичним особам, які надають соціальні послуги [12];
- допомога особам, які не мають права на пенсію та інвалідам [10];

- тимчасова допомога на дітей, батьки яких ухиляються від сплати аліментів;
- субсидія для відшкодування витрат на оплату житлово-комунальних послуг та придбання скрапленого газу, твердого та рідкого пічного побутового палива;
- субвенція для відшкодування витрат підприємствам надавачам послуг пільговій категорії населення;
- компенсації учасникам ліквідації аварії на ЧАЕС [12];
- додаткова допомога на поховання [13];
- компенсація за санаторно-курортне лікування інвалідам війни [13];
- допомога на бензин і транспортне обслуговування інвалідам [10];
- матеріальна допомога інвалідам [11];
- забезпечення інвалідів засобами реабілітації [11].

Таблиця 3.7 – Динаміка соціальних виплат в Україні за 2011-2014 роки

Показник	2011 рік		2012 рік		2013 рік		2014 рік		Темп приросту, %		
	Абсолютне значення, млн. грн.	Питома вага, %	Абсолютне значення, млн. грн.	Питома вага, %	Абсолютне значення, млн. грн.	Питома вага, %	Абсолютне значення, млн. грн.	Питома вага, %	2012/2011	2013/2012	2014/2013
Фактичні видатки	333,5	100	395,7	100	403,5	100	430,1	100	15,7	1,9	6,18
Соціальний захист та соціальне забезпечення	63,5	19,0	75,3	19,0	88,5	21,9	80,5	18,7	15,7	14,9	-9,93



Таблиця 3.8 – Динаміка соціальних виплат в Україні за 2015-2018 роки

Показник	2015		2016		2017		2018		Темп приросту, %		
	Абсолютне значення, млн. грн.	Питома вага, %	Абсолютне значення, млн. грн.	Питома вага, %	Абсолютне значення, млн. грн.	Питома вага, %	Абсолютне значення, млн. грн.	Питома вага, %	2016/2015	2017/2016	2018/2013
Фактичні видатки	402,93	100	489,35	100	566,64	100	686,9	100	17,6	15,8	17,5
Соціальний захист та соціальне забезпечення	103,6	25,7	152,0	31,1	144,42	25,5	153,2	22,1	31,8	-5,25	5,73

За даними таблиці 3.8 можна зробити висновок про скорочення частки соціальних виплат населенню за 2011-2018 роки у фактичних видатках державного бюджету України. Видатки на соціальний захист, не зважаючи на їх скорочення у структурі бюджету, у 2018 році зросли, зокрема загалом на 5,73. Таке зростання можна пояснити підвищенням розміру мінімальних розмірів соціальної допомоги загалом.

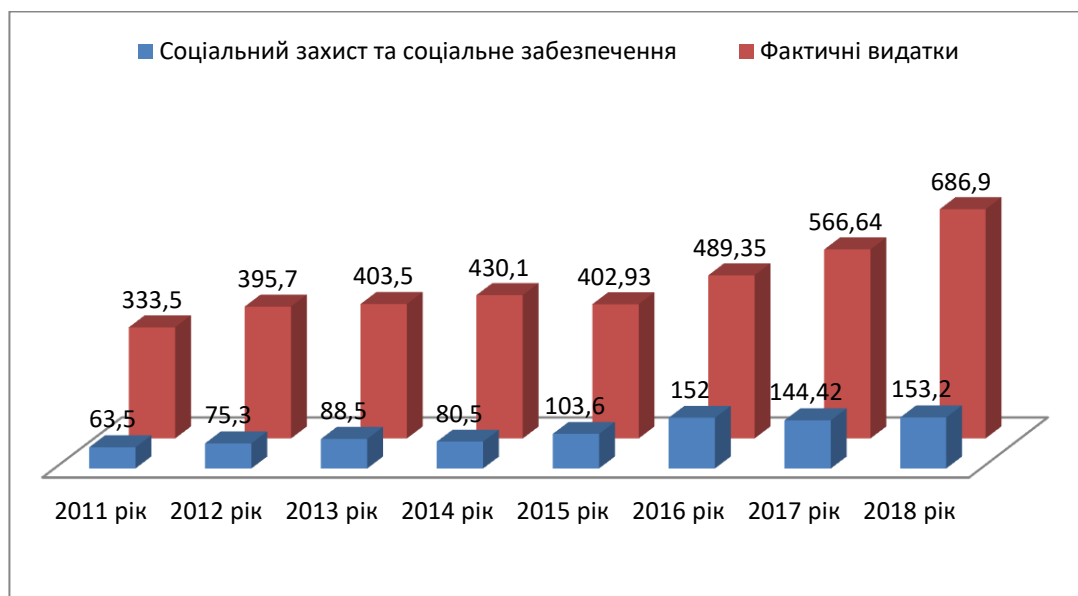


Рисунок 3.4 – Динаміка соціальних виплат в Україні за 2011-2018 роки

Таким чином, підсумувавши вище зазначені тенденції, можна сказати, що витрати на соціальне обслуговування та соціальне забезпечення займають значну частку у державному бюджеті України. Характерним є те, що соціальна допомога сім'ям з дітьми щороку підвищується, зокрема виплати при народженні дитини, що є недостатньо обґрунтованим, оскільки відображає популістський характер соціальної політики в Україні.

Таблиця 3.9 – Середній розмір місячної пенсії та кількість пенсіонерів

Роки	Середній розмір призначеної місячної пенсії пенсіонерам, які перебувають на обліку в органах Пенсійного фонду, грн			Кількість пенсіонерів, тис. осіб	
	Усього	у тому числі:			
		за віком	за інвалідністю		у разі втрати годувальника
2011	1151,9	1156,0	1033,8	940,0	13738,0
2012	1253,3	1252,4	1164,3	1053,8	13820,5
2013	1470,7	1464,3	1359,2	1252,8	13639,7
2014	1526,1	1521,6	1406,5	1303,8	13533,3
2015	1581,5	1573,0	1432,1	1433,1	12147,2
2016	1699,5	1690,3	1545,2	1640,3	12296,5
2017	1828,3	1808,9	1705,9	1803,0	11956,2
2018	2479,2	2556,70	2000,9	2368,0	11725,4

За даними таблиця 3.9 можна зробити висновок про зростання середнього розміру місячної пенсії та скорочення кількості пенсіонерів 2011-2018 роки. Таким чином у 2011 році середній розмір місячної пенсії складала 1151,9 то в 2018 досягла 2479,2, коли кількість пенсіонерів з 13738,0 у 2011 році зменшилась до 11725,4 у 2018, що частково обумовлюється збільшенням пенсійного віку в Україні.

### 3.3 Числові експерименти

Для опису демографічної моделі розбі'ємо населення України на групи відповідно до віку.

Розглянемо перший випадок. Розіб'ємо населення України на групи відповідно до віку, не враховуючи стать. Величину тимчасового інтервалу, що охоплює одну вікову групу, покладемо рівною 10 років. Отже, отримаємо, що населення України складається з 9 вікових груп: 0-9 років, 10-19 років, 20-29 років, 30-39 років, 40-49 років, 50-59 років, 60-69 років, 70-79 років, 80 років і старше.

Для здійснення оцінки і прогнозування чисельності та структурного складу населення України використовуємо офіційні дані Укрстату (використовуємо дані за 2015-2018 роки) [4]. Використовуючи дані статистики за 2015 рік, складемо вектор-стовпець  $X(t)$ , координатами якого є чисельності всіх вікових груп. Поставимо наступне завдання: користуючись теоретичними джерелами та даними Укрстату, спробуємо здійснити прогнозування чисельності населення на 2016 рік. Для цього складемо матрицю  $L$  і знайдемо вектор  $X(t+1) = L * X(t)$ , координатами якого будуть значення прогнозованої чисельності вікових груп на 2016 рік. Знаходимо невідомі елементи матриці  $L$ :

$$L + \Delta(p_1 \dots p_n) = \begin{vmatrix} b_1 + p_1 & b_2 & \dots & b_n \\ S_1 & p_2 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & S_{n-1} & p_n \end{vmatrix},$$

де  $b_i$  – коефіцієнт народжуваності у відповідних вікових групах:

Таблиця 3.10 – Коефіцієнти народжуваності  $b_i$ .

	b1	b2	b3	b4	b5	b6	b7	b8	b9
Роки	0-9 р.	10-19 р.	20-29 р.	30-39 р.	40-49 р.	50-59 р.	60-69 р.	70-79 р.	80 і більше
2010	0	0,0144	0,04505	0,02755	0,0021	0	0	0	0
2011	0	0,01405	0,04495	0,029	0,0023	0	0	0	0
2012	0	0,01435	0,0468	0,0307	0,0025	0	0	0	0
2013	0	0,0136	0,0455	0,0306	0,0026	0	0	0	0
2014	0	0,0135	0,04495	0,0303	0,00275	0	0	0	0
2015	0	0,01365	0,04615	0,0294	0,0028	0	0	0	0
2016	0	0,01265	0,0439	0,02935	0,0029	0	0	0	0
2017	0	0,0112	0,03975	0,02815	0,00295	0	0	0	0
2018	0	0,00985	0,03665	0,02715	0,00305	0	0	0	0

$p_i$  – величини, які означають долю осіб із групи, які не встигли перейти до наступної вікової групи:

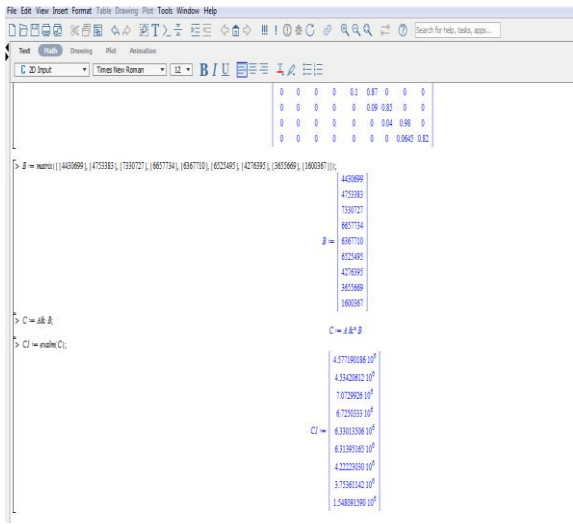
Таблиця 3.11 – Доля осіб, які не встигли перейти до наступної вікової групи  $p_i$ .

	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	$p_5$	$p_6$	$p_7$	$p_8$	$p_9$
Роки	0-9 р.	10-19 р.	20-29 р.	30-39 р.	40-49 р.	50-59р.	60-69р.	70-79р.	80 і більше
2010	0,9	0,87	0,9	0,9	0,86	0,87	0,85	0,96	0,95
2011	0,9	0,87	0,9	0,9	0,89	0,9	0,9	0,95	0,96
2012	0,91	0,87	0,88	0,9	0,89	0,91	0,94	0,95	0,95
2013	0,91	0,88	0,88	0,9	0,9	0,9	0,93	0,94	0,95
2014	0,91	0,88	0,88	0,9	0,9	0,91	0,94	0,92	0,95
2015	0,9	0,88	0,87	0,91	0,9	0,9	0,92	0,91	0,95
2016	0,9	0,89	0,87	0,91	0,9	0,9	0,92	0,89	0,96
2017	0,89	0,89	0,87	0,9	0,9	0,89	0,92	0,88	0,94
2018	0,89	0,9	0,87	0,9	0,9	0,9	0,9	0,89	0,94

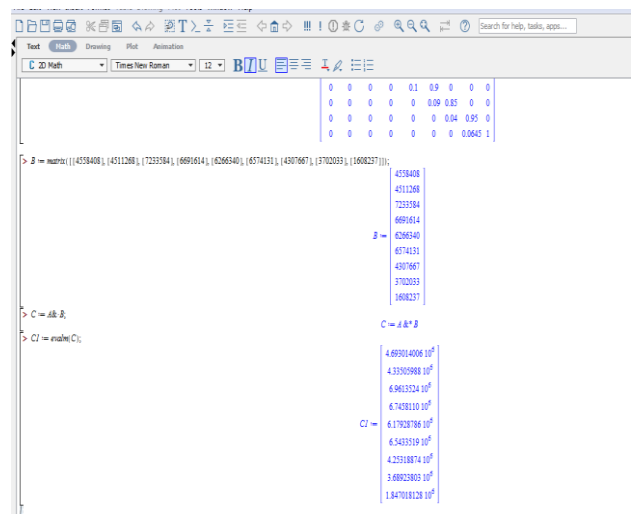
$S_i (0 < S_i \leq 1)$  – коефіцієнт виживаємості, який показує, яка частка осіб  $i$ -тої групи доживе до  $(i + 1)$ -го віку:  $S_1 = S_4 = S_6 = 0,09$ ,  $S_2 = S_3 = S_5 = 0,1$ ,  $S_7 = 0,04$ ,  $S_8 = 0,0645$ .

При розрахунках даних коефіцієнтів були складені відношення, для підрахунків яких були використані офіційні статичні данні [3]. Наявність в теоретичних джерелах даних за відповідними віковими групами дозволило скласти відношення і розрахувати необхідні коефіцієнти за 2011-2018 роки.

Розрахунки були проведені у програмі Maple, з використанням матричної моделі Леслі і Люїса :



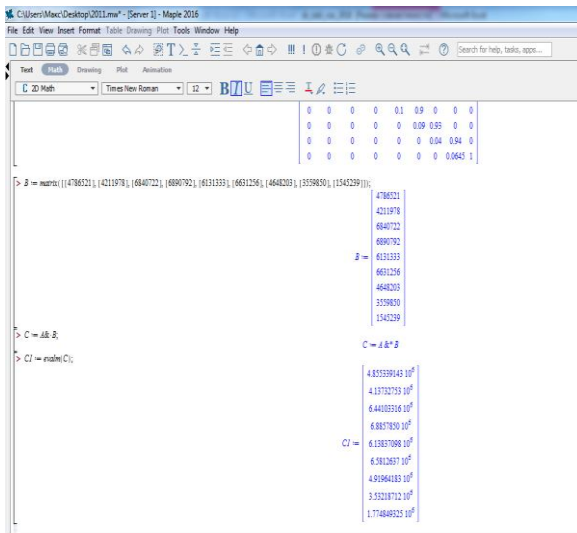
а)



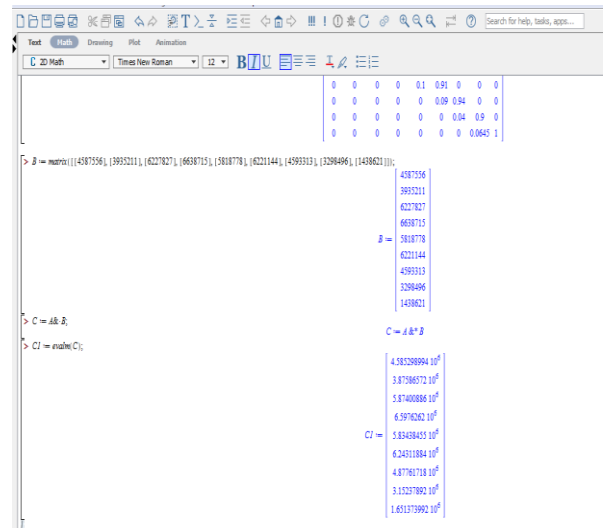
б)

Рисунок 3.5 – Прогнозування чисельності населення:

а) на 2011 рік; б) на 2012 рік;



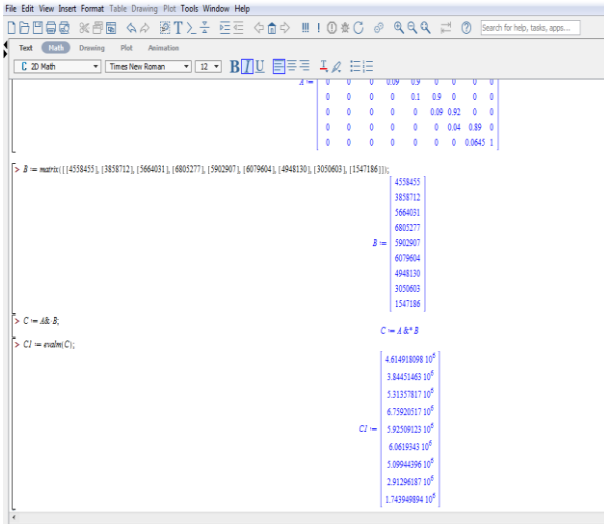
а)



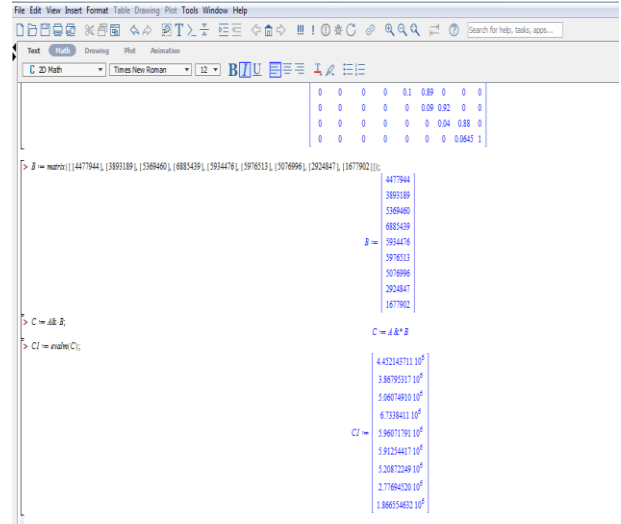
б)

Рисунок 3.6 – Прогнозування чисельності населення:

а) на 2013 рік; б) на 2014 рік;



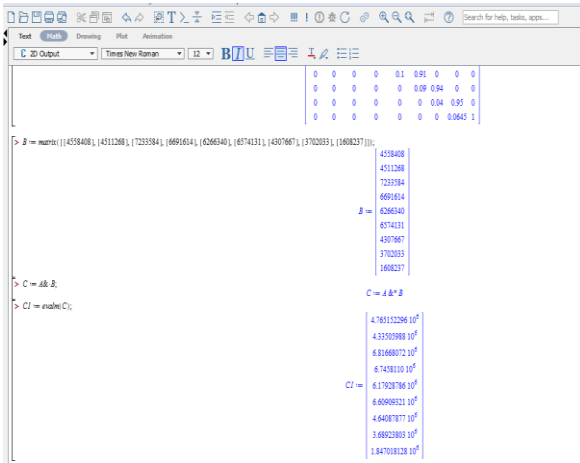
а)



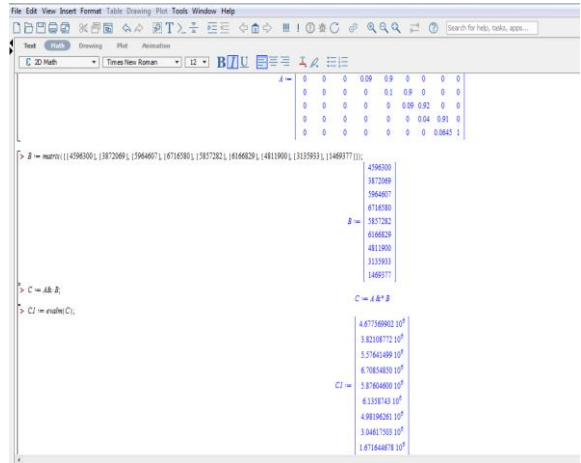
б)

Рисунок 3.7 – Прогнозування чисельності населення:

а) на 2015 рік; б) на 2016 рік;



а)



б)

Рисунок 3.8 – Прогнозування чисельності населення:

а) на 2017 рік; б) на 2018 рік.

Знайдені координати вектора незначно відрізняється від офіційних даних статичник показників за цей період. Отримані результати записуємо до таблиці та порівнюємо їх з офіційними даними.

Таблиця 3.12 – Чисельність і віковий склад населення України на 2011-2014 рр

Возраст	2011		2012		2013		2014	
	прогноз	оф.д.	прогноз	оф.д.	прогноз	оф.д.	прогноз	оф.д.
0-9	4577190	4558408	4693014	4689945	4765152	4786521	4855333	4587556
10-19	4534206	4511268	4335059	4335789	4335059	4211978	4137327	3935211
20-29	7072992	7233584	6961352	7101149	6816680	6840722	6441033	6227827
30-39	6725033	6691614	6745811	6746699	6745811	6890792	6885785	6638715
40-49	6330135	6266340	6179228	6199311	6179287	6131333	6138770	5818778
50-59	6313951	6574131	6543351	6597738	6609093	6631256	6581263	6221144
60-69	4222230	4307667	4253188	4453611	4640878	4648203	4919641	4593313
70-79	3753611	3702033	3689238	3646135	3689238	3559850	3532187	3298496
80 и более	1548091	1608237	1847018	1602315	1847018	1545239	1774849	1438621
Всего	45077439	45453282	45247359	45372692	45628216	45245894	45266188	42759661

Таблиця 3.13 – Чисельність і віковий склад населення України на 2015-2018 рр

Возраст	2015		2016		2017		2018	
	прогноз	оф.д.	прогноз	оф.д.	прогноз	оф.д.	прогноз	оф.д.
0-9	4585298	4596300	4677569	4558455	4614918	4477944	4452143	2563498
10-19	3875865	3872069	3821087	3858712	3844514	3893189	3867953	3982079
20-29	5874008	5964607	5576414	5664031	5313578	5369460	5060749	5086622
30-39	6597626	6716580	6708548	6805277	6759205	6885439	6733841	6922607
40-49	5834384	5857282	5876046	5902907	5925091	5934476	5960717	5977277
50-59	6243118	6166829	6135874	6079604	6061934	5976513	5912544	5854371
60-69	4877617	481900	4981962	4948130	5099443	5076996	5208722	5182186
70-79	3152378	3135933	3046175	3050603	2912961	2924847	2776945	2857581
80 и более	1459899	1469377	1671644	1547186	1743949	1677902	1866554	1787343
Всего	42500193	42590879	42495319	42414905	42275593	42216766	41840158	41983564

Результати порівняння фактичних даних та прогнозованих записуємо у таблицю.

Таблиця 3.14 – Оцінка значущості відмінностей офіційних даних і прогнозованих даних за 2011-2018 роки

Рік	Порівняння			Похибка, % $\frac{ p-f }{f} * 100$
	Погноз, $p$	Фактичні дані, $f$	Різниця, $p - f$	
2011	45077439	45453282	-375843	0,83
2012	45247359	45372692	-125333	0,27
2013	45628216	45245894	382322	0,84
2014	45266188	42759661	2506527	5,86
2015	42500193	42590879	-90686	0,21
2016	42495319	42414905	80414	0,19
2017	42275593	42216766	58827	0,14
2018	41840158	41983564	-143406	0,34

Описана вище модель будувалася на припущенні, що популяція існує ізольовано й не зазнає жодних зовнішніх впливів. Це припущення значно понижує степінь адекватності даної моделі оригіналу. Побудуємо більш складну модель, що враховує зовнішній вплив [27]. Вона буде наступною ланкою в ієрархічному ланцюзі моделей популяцій, побудованому за принципом знизу-вверх (від простої моделі – до більш складної). Для популяції людей характерні зовнішні впливи( еміграції, зміни території..). Враховуючи внутрішній і зовнішній плив на популяцію, використаємо математичну модель, яку описує рівняння:

$$N(t + 1) = N(t) + \Delta t(k_1 * N - k_2 * N^2 - \alpha_1 - \alpha_2 * \delta(t)). \quad (3.1)$$

Обчислення прогнозування чисельності населення за формулою 3.1 виконані у програмі Maple і представлені у додатку А. Різниця між офіційними показниками чисельності населення України і прогнозованими даними, Які отримали при використанні даного рівняння відрізняються у межах 3 %.



### 3.4 Висновки по третьому розділу

У третьому розділі проаналізована динаміка та структура чисельності населення України. З чого можна зробити висновок, що відбувається скорочення чисельності населення. Спостерігається також низька народжуваність, масова одностаттєвість українських сімей, нестабільність шлюбів та високий рівень розлучуваності.

Розглянуто основні види соціальної допомоги населенню України, та динаміку соціальних виплат.

Проведення обчислювального експерименту дає можливість спрогнозувати чисельність та віковий склад населення. Різниця між офіційними показниками чисельності населення України і прогнозованими даними, які отримані при використанні моделі Леслі і Люїса, відрізняються в межах 5 %. Хоча вона не враховує зовнішній вплив.

Використовуючи формулу, яка враховує вплив на популяцію, отримуємо більш точний прогноз, похибка становить близько 3%.

Як бачимо у 2014 році відбувається стрибок, це зумовлюється відомими нам подіями, які відбулися в цей період. Тому, для більш точного прогнозування дані доцільно розбивати на два періоди з 2011 по 2013 рік та з 2015 по 2018 роки.

## ВИСНОВКИ

Демографічний процес являє собою сукупність демографічних подій у житті людини. Він може проявлятися у трьох формах: природному, механічному та соціальному русі населення. Основними демографічними процесами виступають народжуваність, смертність, шлюбність та розлучуваність, які відображають демографічну ситуацію в країні.

Розглянуто сучасні методи побудови математичних моделей, насамперед диференціальні та різницеві рівняння, які стали особливо популярними в останні двадцять років. Завдяки простоті структури й наявності багатьох надійних методів оцінювання параметрів, різницеві рівняння широко застосовують при моделюванні процесів у техніці, економетриці, біології та інших науках.

Розглянуто матричну модель Леслі і Люїса, яка використовується для прогнозування майбутньої вікової структури популяції за пропонованими коефіцієнтами народжуваності і виживання і відомої вікової структури у даний проміжок часу.

Також розглянуто метод економетричного моделювання. Для моделювання демографічних процесів можна використовувати парну (якщо фактор один) та множинну регресію (якщо два і більше факторів). Постановка задачі, збір, підготовка даних є важливим етапом процесу побудови моделі. Визначення функціональної форми та основних факторів також позначаються на якості, адекватності моделі досліджуваному явищу. Для того, щоб модель регресії відображала досліджуваний об'єкт необхідно дотримуватись незміщеності, ефективності та точності оцінок. Порушення цих умов призводитиме до наявності автокореляції, гетероскедастичності, ендогенності, нестационарності ряду, а тому інтерпретовані результати будуть неправдивими.

На основі проаналізованого стану демографічної ситуації можна виділити основні демографічні тенденції в Україні. Відбувається скорочення чисельності населення, зокрема за рахунок негативної тенденції до депопуляції. Для України характерні процеси урбанізації та механічного приросту за рахунок зовнішньої міграції. Спостерігається також низька народжуваність, масова однодітність українських сімей, нестабільність шлюбів та високий рівень розлучуваності. Старіння населення поєднуються в Україні з високим, за європейськими мірками, рівнем смертності та низькою тривалістю життя. З метою покращення демографічної ситуації в Україні постійно збільшуються обсяги соціальних виплат. витрати на соціальне обслуговування та соціальне забезпечення займають значну частку у державному бюджеті України. Характерним є те, що соціальна допомога сім'ям з дітьми щороку підвищується, зокрема виплати при народженні дитини, що є недостатньо обґрунтованим, оскільки відображає популістський характер соціальної політики в Україні.

Проведення обчислювального експерименту дає можливість спрогнозувати чисельність населення та віковий склад населення на наступний рік.

## ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Безтелесна Л., Максимчук Т., Юрчик Г. Удосконалення механізму соціального захисту дітей в Україні // Україна: аспекти праці. Київ, 2012. С. 38–45.
2. Власов М. П., Шимко П. Д. Моделирование экономических процессов. Ростов - на-Дону : Феникс, 2005. 409 с.
3. Державна служба статистики України. Держстат України, 1998-2019. URL: <http://www.ukrstat.gov.ua/> ( дата звернення: 08.11.2019).
4. Дорошенко Л. С. Демографія: Навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. Київ : МАУП, 2005. 112 с.
5. Дорошенко Л. С. Демографія: Практикум. Київ : МАУП, 2007. 80 с.
6. Доугерти К. Введення в економетрику: Пособие. Москва : Инфра, 2009. 465 с.
7. Логофет Д. О., Белова И. Н. Неотрицательные матрицы как инструмент моделтрования динамики популяций: классические модели и современные обобщения: фундаментальная и прикладная математика. Москва, 2007. С. 145–164.
8. Лук'яненко Г. Г., Городніченко Ю. О. Сучасні економетричні методи у фінансах: навчальний посібник. Київ : Літера ЛТД, 2002. 352 с.
9. Махорін Л. Г. Основи демографії: курс лекцій. Житомир : Волинь, 2009. 96 с.
10. Міністерство соціальної політики України. URL: <http://www.mlsp.gov.ua/> (дата звернення: 10.10.2019).
11. Міністерство фінансів України. URL: <http://www.minfin.gov.ua/> (дата звернення: 10.10.2019).

12. Населення України, 2015 рік: демогр. Щорічник /Держ. ком. статистики України, Упр. статистики населення. Л. М. Стельмах (відп. за вип.). Київ : Консультант, 2015. 466 с.
13. Пальян З. О. Демографічна статистика: Навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. Київ : КНЕУ, 2003. 132 с.
14. Прибиткова І. М. Основи демографії: посібник для студентів гуманітарних і суспільних факультетів вищих навчальних закладів. Київ : АртЕк, 1995. 256 с.
15. Про державну допомогу сім'ям з дітьми: Закон України від 21 листопада 1992 р. № 2811. Верховна Рада України. URL: <http://iportal.rada.gov.ua/> (дата звернення: 20.10.2019).
16. Про державну соціальну допомогу інвалідам з дитинства та дітям-інвалідам: Закон України від 01 червня 2000 р № 1768. Верховна Рада України. URL: <http://iportal.rada.gov.ua/> (дата звернення: 20.10.2019).
17. Про державну соціальну допомогу малозабезпеченим сім'ям: Закон України від 30 квітня 2002 р № 226/293/169. Верховна Рада України. URL: <http://iportal.rada.gov.ua/> (дата звернення: 23.10.2019).
18. Про державну соціальну допомогу особам, які не мають права на пенсію та інвалідам: Закон України від 02 червня 2004 р № 261. Верховна Рада України. URL: <http://iportal.rada.gov.ua/> (дата звернення: 20.10.2019).
19. Про пенсійне забезпечення: Закон України від 05 листопада 1991 р №1788. Верховна Рада України. URL: <http://iportal.rada.gov.ua/>
20. Про соціальні послуги: Закон України від 17 січня 2019 р №2671. Верховна Рада України. URL: <http://iportal.rada.gov.ua/> (дата звернення: 23.10.2019).
21. Про статус і соціальний захист громадян, які постраждали внаслідок Чорнобильської катастрофи: Закон України від 19 грудня 1992 р №2001. Верховна Рада України. URL: <http://iportal.rada.gov.ua/> (дата звернення: 20.10.2019).

22. Розподіл постійного населення України за статтю та віком 2011-2018 роки [Електронний ресурс]: Державна служба статистики. Київ. Режим доступу: <https://ukrstat.org/uk/druk/publicat/Arhivu/13/Archprnzb.htm> (дата звернення: 25.10.2019).

23. Рудальов В. Г., Крамер А. І. Математична модель динаміки структурного складу населення // Вісник ВГУ. 2007. №1.

24. Станжицький О. М., Таран Є. Ю., Гординський Л. Д. Основи математичного моделювання: навчальний посібник. Київ : Київський університет, 2006. 96 с.

25. Формування приросту (скорочення) чисельності наявного населення та показники природного руху населення в Україні [Електронний ресурс]: Державна служба статистики Київ, 2016. Режим доступу: <http://database.ukrcensus.gov.ua/PXWEB2007/ukr/publnew1/2017/BL1001201701nat.pdf> (дата звернення: 27.10.2019).

26. Хорольская И. В. Математическое моделирование социально-демографических процессов на примере статистических показателей населения РФ: постулат. 2019. № 1. 7 с.

27. Щерба Г. Зарубіжна трудова міграція з України: сучасні виклики і регіональна специфіка// Україна: аспекти праці. Київ, 2010. Вип. 3. С. 41-46.

## ДОДАТОК А

## Розрахунки чисельності населення у програмі Maple

> restart;

$N2 := 45372692.;$   $N1 := 45453282.;$   $N3 := 45245894.;$   
 $N4 := 42759661.;$   $N5 := 42590879.;$   $N6$   
 $:= 42414905.;$   $N7 := 42216766.;$   $N8 := 41983564.;$   
 $N := 45598179.;$

$$N2 := 4.5372692 \cdot 10^7$$

$$N1 := 4.5453282 \cdot 10^7$$

$$N3 := 4.5245894 \cdot 10^7$$

$$N4 := 4.2759661 \cdot 10^7$$

$$N5 := 4.2590879 \cdot 10^7$$

$$N6 := 4.2414905 \cdot 10^7$$

$$N7 := 4.2216766 \cdot 10^7$$

$$N8 := 4.1983564 \cdot 10^7$$

$$N := 4.5598179 \cdot 10^7$$

>  $s1 := solve(\{N2 = N1 + 1 \cdot (k1 \cdot N1 - k2 \cdot N1 \cdot N1 - a),$   
 $N3 = N2 + 1 \cdot (k1 \cdot N2 - k2 \cdot N2 \cdot N2 - a), N4 = N3$   
 $+ 1 \cdot (k1 \cdot N3 - k2 \cdot N3 \cdot N3 - a)\}, \{a, k1, k2\});$

$$s1 := \{a = 1.793557098 \cdot 10^{11}, k1 = 7898.300526, k2$$
  
 $= 0.00008695449100\}$

>  $a1 := 1.793557098 \cdot 10^{11}; k11 := 7898.300526; k21$   
 $:= 0.00008695449100;$

$$a1 := 1.793557098 \cdot 10^{11}$$

$$k11 := 7898.300526$$

$$k21 := 0.00008695449100$$

$$> N1 + 1 \cdot (k11 \cdot N1 - k21 \cdot N1 \cdot N1 - a1);$$

$$4.53727 \cdot 10^7$$

$$> s2 := \text{solve}(\{N2 = N1 + 1 \cdot (k1 \cdot N1 - k2 \cdot N1 \cdot N1 - a),$$

$$N3 = N2 + 1 \cdot (k1 \cdot N2 - k2 \cdot N2 \cdot N2 - a), N1 = N + 1$$

$$\cdot (k1 \cdot N - k2 \cdot N \cdot N - a)\}, \{a, k1, k2\});$$

$$s2 := \{a = 9.329995279 \cdot 10^9, k1 = 410.3178105, k2$$

$$= 0.000004511312995\}$$

$$> a2 := 9.329995279 \cdot 10^9; k12 := 410.3178105; k22$$

$$:= 0.000004511312995;$$

$$a2 := 9.329995279 \cdot 10^9$$

$$k12 := 410.3178105$$

$$k22 := 0.000004511312995$$

$$> N2 + 1 \cdot (k12 \cdot N2 - k22 \cdot N2 \cdot N2 - a2);$$

$$4.5245896 \cdot 10^7$$

$$> s3 := \text{solve}(\{N3 = N2 + 1 \cdot (k1 \cdot N2 - k2 \cdot N2 \cdot N2 - a),$$

$$N5 = N4 + 1 \cdot (k1 \cdot N4 - k2 \cdot N4 \cdot N4 - a), N4 = N3$$

$$+ 1 \cdot (k1 \cdot N3 - k2 \cdot N3 \cdot N3 - a)\}, \{a, k1, k2\});$$

$$s3 := \{a = -1.450716061 \cdot 10^{10}, k1 = -659.0282265, k2 =$$

$$-0.000007477892881\}$$

$$> a3 := -1.450716061 \cdot 10^{10}; k13 := -659.0282265; k23 :=$$

$$-0.000007477892881;$$

$$a3 := -1.450716061 \cdot 10^{10}$$

$$k13 := -659.0282265$$

$$k23 := -0.000007477892881$$

$$> N3 + 1 \cdot (k13 \cdot N3 - k23 \cdot N3 \cdot N3 - a3);$$

$$4.275965 \cdot 10^7$$



- >  $s4 := \text{solve}(\{N4 = N3 + 1 \cdot (k1 \cdot N3 - k2 \cdot N3 \cdot N3 - a),$   
 $N5 = N4 + 1 \cdot (k1 \cdot N4 - k2 \cdot N4 \cdot N4 - a), N6 = N5$   
 $+ 1 \cdot (k1 \cdot N5 - k2 \cdot N5 \cdot N5 - a)\}, \{a, k1, k2\});$
- $s4 := \{a = 6.705901593 \cdot 10^8, k1 = 31.37700907, k2$   
 $= 3.671259437 \cdot 10^{-7}\}$
- >  $a4 := 6.705901593 \cdot 10^8; k14 := 31.37700907; k24$   
 $:= 3.671259437 \cdot 10^{-7};$
- $a4 := 6.705901593 \cdot 10^8$   
 $k14 := 31.37700907$   
 $k24 := 3.671259437 \cdot 10^{-7}$
- >  $N4 + 1 \cdot (k14 \cdot N4 - k24 \cdot N4 \cdot N4 - a4);$
- $4.25908791 \cdot 10^7$
- >  $s5 := \text{solve}(\{N5 = N4 + 1 \cdot (k1 \cdot N4 - k2 \cdot N4 \cdot N4 - a),$   
 $N6 = N5 + 1 \cdot (k1 \cdot N5 - k2 \cdot N5 \cdot N5 - a), N7 = N6$   
 $+ 1 \cdot (k1 \cdot N6 - k2 \cdot N6 \cdot N6 - a)\}, \{a, k1, k2\});$
- $s5 := \{a = 4.422599398 \cdot 10^8, k1 = 20.67614602, k2$   
 $= 2.417504870 \cdot 10^{-7}\}$
- >  $a5 := 4.422599398 \cdot 10^8; k15 := 20.67614602; k25$   
 $:= 2.417504870 \cdot 10^{-7};$
- $a5 := 4.422599398 \cdot 10^8$   
 $k15 := 20.67614602$   
 $k25 := 2.417504870 \cdot 10^{-7}$
- >  $N5 + 1 \cdot (k15 \cdot N5 - k25 \cdot N5 \cdot N5 - a5);$
- $4.24149051 \cdot 10^7$
- >  $s6 := \text{solve}(\{N6 = N5 + 1 \cdot (k1 \cdot N5 - k2 \cdot N5 \cdot N5 - a),$   
 $N7 = N6 + 1 \cdot (k1 \cdot N6 - k2 \cdot N6 \cdot N6 - a), N8 = N7$   
 $+ 1 \cdot (k1 \cdot N7 - k2 \cdot N7 \cdot N7 - a)\}, \{a, k1, k2\});$

$$s6 := \{a = 2.518326038 \cdot 10^8, k1 = 11.71543107, k2 = 1.363374853 \cdot 10^{-7}\}$$

```
> a6 := 2.518326038 108; k16 := 11.71543107; k26 := 1.363374853 10-7;
```

$$a6 := 2.518326038 \cdot 10^8$$

$$k16 := 11.71543107$$

$$k26 := 1.363374853 \cdot 10^{-7}$$

```
> N6 + 1 · ( k16 · N6 - k26 · N6 · N6 - a6 );
```

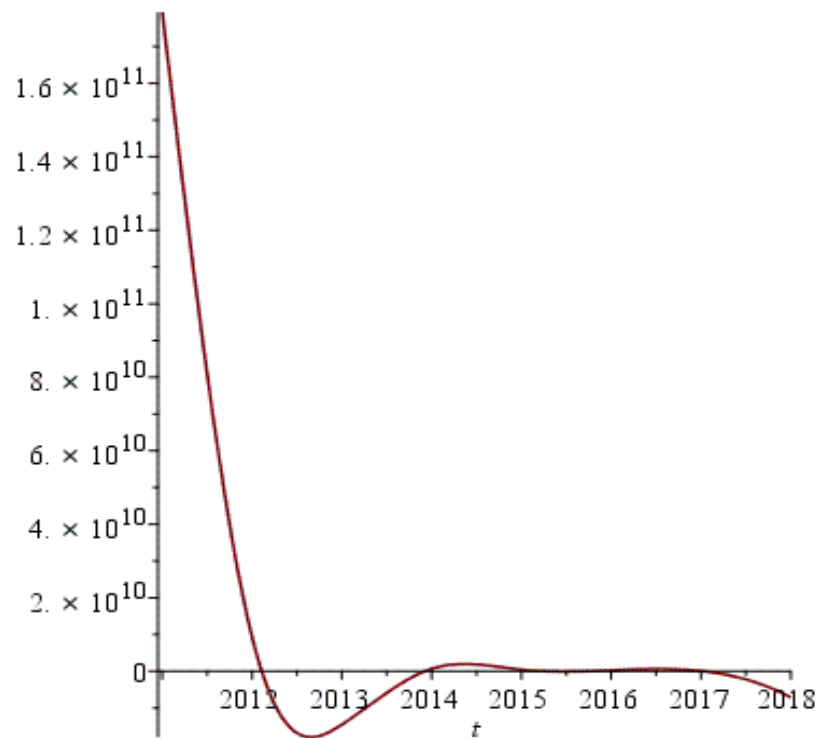
$$4.22167663 \cdot 10^7$$

```
> with( CurveFitting ) :
```

```
> A := t → Spline( [ 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016 ],
  [ 1.793557098 1011, 9.329995279 109,
  -1.450716061 1010, 6.705901593 108,
  4.422599398 108, 2.518326038 108 ], t, degree = 3 );
```

```
A := t → CurveFitting:-Spline( [ 2011, 2012, 2013, 2014,
  2015, 2016 ], [ 1.793557098 · 100000000000,
  9.329995279 · 1000000000, (-1) · 1.450716061
  · 10000000000, 6.705901593 · 100000000,
  4.422599398 · 100000000, 2.518326038 · 100000000 ],
  t, degree = 3 )
```

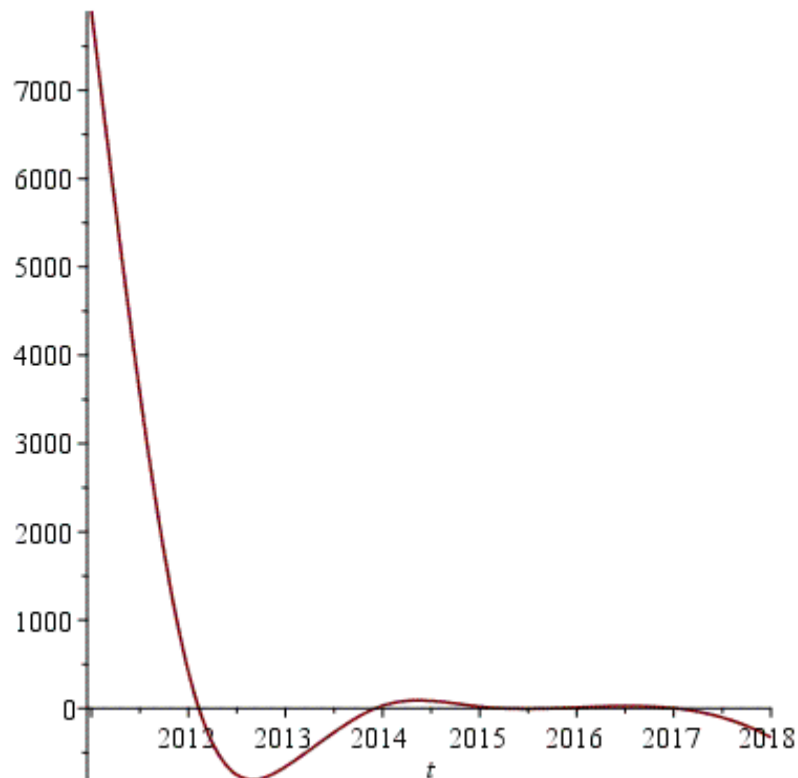
```
> plot( A(t), t = 2011 .. 2018 );
```



```
> K1 := t→Spline([2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016],
  [7898.300526, 410.3178105, -659.0282265,
  31.37700907, 20.67614602, 11.71543107], t, degree
= 3);
```

```
    K1 := t→CurveFitting:-Spline([2011, 2012, 2013, 2014,
  2015, 2016], [7898.300526, 410.3178105,
  -659.0282265, 31.37700907, 20.67614602,
  11.71543107], t, degree = 3)
```

```
> plot(K1(t), t = 2011 ..2018);
```

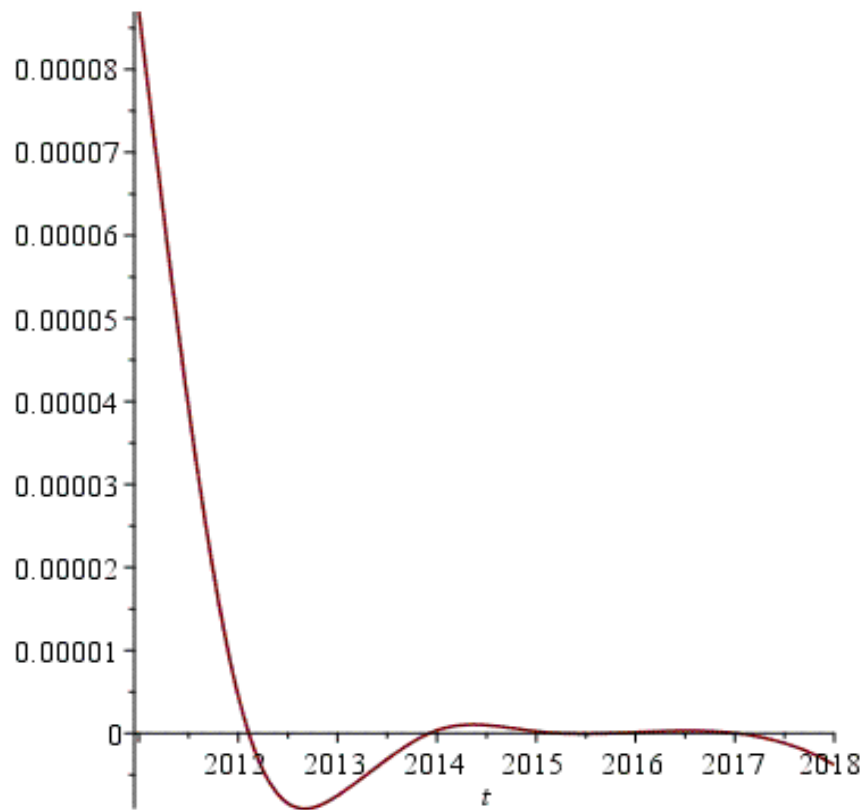


>

```
K2 := t → Spline([2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016],
  [ 0.00008695449100, 0.000004511312995,
    -0.000007477892881, 3.671259437 10-7,
    2.417504870 10-7, 1.363374853 10-7], t, degree = 3)
;
```

```
K2 := t → CurveFitting:-Spline([2011, 2012, 2013, 2014,
  2015, 2016], [0.00008695449100,
  0.000004511312995, -0.000007477892881,
   $\frac{3.671259437}{10000000}$ ,  $\frac{2.417504870}{10000000}$ ,  $\frac{1.363374853}{10000000}$ ], t,
  degree = 3)
```

```
> plot(K2(t), t = 2011 .. 2018);
```



> t := 2011 ..2018;

t := 2011 ..2018

> N(2015) = N(t) + 1 · (K1(t) · N(t) + K2(t) - A(t));