МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра загальної математики

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА

на тему: «ДОСЛІДЖЕННЯ УМОВ НЕРОЗВ'ЯЗНОСТІ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ НА ПОБУДОВУ»

Виконала: студентка 2 курсу, групи 8.1118-з
спеціальності 111 математика
(шифр і назва спеціальності)
освітньої програми математика
О. О. Патер
(ініціали та прізвище)

Керівник доцент кафедри фундаментальної математики, к.ф.-м.н Стєганцев Є. В.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Рецензент доцент кафедри фундаментальної математики, к.ф.-м.н, Панасенко В. Є.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Запоріжжя – 2020

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет математичний

Кафедра загальної математики

Рівень вищої освіти магістр

Спеціальність 111 математика
(шифр і назва)

Освітня програма математика

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри
загальної
математики, к.ф.-м.н., доцент

____________ Зіновєєв І. В.
(підпис)

“____” ______________ 20__ р.

ЗАВДАННЯ

НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТОВІ

Патер Ольга Олександрівна
(прізвище, ім’я та по-батькові)

1. Тема роботи Дослідження умов нерозв’язності геометричних задач на побудову

керівник роботи Стєганцев Євгеній Вікторович, к.ф.-м.н., доцент
(прізвище, ім’я та по-батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від « 29 » травня 2019 р. № 812-с

2. Строк подання студентом роботи 26.12.2019

3. Вихідні дані до роботи 1. Постановка задачі.
2. Перелік літератури.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)
1. Постановка задачі.
2. Основні теоретичні відомості з теми геометричних задач на побудову.

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов’язкових креслень)
презентація

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		Завдання видав	Завдання прийняв

7. Дата видачі завдання 30.05.2019

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	24.06.2019	
2.	Збір вихідних даних.	10.07.2019	
3.	Обробка методичних та теоретичних	06.09.2019	
	джерел.		
4.	Розробка першого розділу.	26.10.2019	
5.	Розробка другого розділу.	28.11.2019	
6.	Оформлення і нормоконтроль	23.12.2019	
	кваліфікаційної роботи.		
7.	Захист кваліфікаційної роботи.	10.01.2020	

Студент ____________ О. О. Патер
(підпис) (ініціали та прізвище)

Керівник роботи ____________ Є. В. Стєганцев
(підпис) (ініціали та прізвище)

Нормоконтроль пройдено

Нормоконтролер ____________ О. Г. Спиця
(підпис) (ініціали та прізвище)

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Дослідження умов нерозв’язності геометричних задач на побудову»: 61 с., 5 рис., 1 табл., 18 джерел.

БІСЕКТРИСА ТРИКУТНИКА, ЗВІДНИЙ МНОГОЧЛЕН, ЛІНІЙКА, ПОДВОЄННЯ КУБА, ПОЛЕ РАЦІОНАЛЬНИХ ЧИСЕЛ, ТРИКУТНИК, ТРИСЕКЦІЯ КУТА, ХАРАКТЕРИСТИЧНІ ТОЧКИ ТРИКУТНИКА, ЦИРКУЛЬ.

Об’єкт дослідження – нерозв’язні геометричні задачі на побудову.

Мета роботи: дослідження умов нерозв’язності геометричних задач на побудову.

Методи дослідження – аналітичний, описовий.

У кваліфікаційній роботі розглядається звідність многочленів над полем раціональних чисел. Досліджуються геометричні задачі на побудову за допомогою циркуля та лінійки. Досліджено та проаналізовано побудову трикутника за його трьома даними характеристичними точками або довжинами. Наведено приклади нерозв’язних задач про подвоєння куба та трисекції кута.

Дана кваліфікаційна робота є корисною при вивченні курсу як аналітичної геометрії так і курсу геометрії в цілому.

SUMMARY

Master’s Qualification Thesis «Research of the Conditions of the Irresolubility of the Geometrical Construction Problems»: 61 pages, 5 figures, 1 table, 18 references.

BISECTRIX OF TRIANGLE, CALIBER COMPASS, CHARACTERISTIC POINT OF TRIANGLE, DUPLICATION OF CUBE, DRAWING RULER, RATIONAL FIELD, REDUCIBLE POLYNOMIAL, TRIANGLE, TRISECTION OF ANGLE.

The object of the study is the Irresolubility of the Geometrical Construction Problems.

The aim of the study is Research of the Conditions of the Irresolubility of the Geometrical Construction Problems.

The methods of research are analytic, descriptive.

Qualification work considers the reducibility of polynomials over the field of rational numbers. Geometric problems of construction using compass and ruler are investigated. The construction of a triangle by its three given characteristic points or lengths is investigated and analyzed. The problem of doubling the cube and the trisection of the corner is solvable.

This qualification is useful for studying both analytical geometry and geometry as a whole.

ЗМІСТ

ВСТУП

Математики стародавньої Греції вперше запровадили побудови за допомогою циркуля та лінійки, та ряд проблем у геометрії Евкліда накладають це обмеження. Стародавні греки розвинули багато побудов, хоча у деяких випадках не мали на це змоги. Гаус продемонстрував, що деякі многокутники можна побудувати, але не всі. Принципова неможливість побудови, щодо деяких найвідоміших проблем, були доведені П'єром Ванцелем в 1837 році, за допомогою математичної теорії полів.

Не зважаючи на наявні доведення неможливості побудови деякі люди завзято намагалися вирішити ці питання. Більшість з цих питань легко вирішити за умови, що інші геометричні перетворення допускаються: наприклад, подвоєння куба можна зробити за допомогою геометричних побудов, але це не можливо, якщо використовувати лише лінійку і циркуль.

З точки зору алгебри, довжина може бути побудована тоді й лише тоді, коли є числом, що можна побудувати, та кут можна побудувати лише за умови того, що його косинус — це число, яке можна побудувати. Число може бути побудоване тоді й лише тоді, якщо його можна записати з використанням чотирьох базових арифметичних операції та лише квадратного кореня, але не кореня іншого степеня.

Математики стародавньої Греції вперше використали побудову за допомогою лінійки та циркуля, та відкрили як будувати суму, різницю, добуток, відношення та квадратний корінь даних довжин. Також вони могли конструювати половину даного кута, квадрат чиєї площі у два рази більший за інший квадрат, квадрат, що має площу таку ж як даний багатокутник, та правильний багатокутник із трьома, чотирма або п'ятьма сторонами (або такий, що має удвічі більше сторін ніж даний багатокутник). Але вони не могли побудувати третину кута, за виключенням окремих випадків, або квадрат із такою ж площею, що і дане коло, або правильний багатокутник з іншою кількістю сторін. Не могли вони, також, побудувати грань куба, чий об'єм був удвічі більший за об'єм куба з даною гранню.

Гіппократ та Менехм показали, що поверхня куба може бути подвоєна шляхом знаходження перетинів гіпербол та парабол, але вони не можуть бути побудовані циркулем та лінійкою. У п'ятому столітті до нашої ери, Гіппократ використовував криву, що він називав квадратриса, як для розділення на три загального кута та квадратури круга, а Нікомед у другому столітті до нашої ери показав, як використовувати конхоїду для поділу довільного кута на три; але ці методи також не можуть бути використані лише з циркулем та лінійкою.

Не було ніякого прогресу у вирішенні цих питань протягом двох тисячоліть, аж до 1796 року, поки Гаус показав, як побудувати правильний багатокутник з 17 сторонами; через п'ять років він навів достатні умови побудови правильного багатокутника з n сторонами.

У 1837 П'єр Ванцель опублікував доведення неможливості поділу на три частини довільного кута або подвоєння об'єму куба. Це доведення засноване на неможливості побудови кубічних коренів від довжин. Ще він показав, що достатні умови Гауса для побудови правильних багатокутників також є і необхідними.

Потім у 1882 році Ліндеманн показав, що це трансцендентне число, а отже не можливо побудувати за допомогою лінійки та циркуля квадрат із такою ж площею, що і дане коло.

Усі побудови за допомогою лінійки та циркуля складаються з повторюваних додавань п'яти базових конструкцій, що використовують точки, лінії та кола, які вже були побудовані раніше. А саме: побудова прямої, що проходить через дві задані точки; побудова кола з заданим центром, що проходить через задану точку; побудова точки, що є точкою перетину двох заданих, не паралельних ліній; побудова однієї чи двох точок перетину кола з прямою лінією (якщо вони перетинаються); побудова однієї чи двох точок на перетині двох кіл (якщо вони перетинаються).

Наприклад, для двох заданих різних точок ми можемо побудувати пряму або будь-яке з двох кіл (послідовно, використовуючи кожну точку як центр, а іншу точку, як точку на колі). Якщо накреслити обидва кола, то дві нові точки будуть утворені на перетині кіл. Креслення ліній між двома початковими точками та однією з цих нових точок завершує побудову рівностороннього трикутнику.

Таким чином, у будь-якій геометричній задачі на побудову задано початковий набір символів (точок та ліній), алгоритм дій, та певні результати. З цієї точки зору, геометрія еквівалентна до аксіоматичної алгебри, з точністю до заміни елементів на символи. Ймовірно, Гаус перший зрозумів це, та використав це для доведення неможливості деяких побудов; і лише через значний проміжок часу Гільберт винайшов повну систему геометричних аксіом.

1 ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ НЕОБХІДНІ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ УМОВ НЕРОЗВ'ЯЗНОСТІ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ НА ПОБУДОВУ

1.1 Многочлени над полем раціональних чисел

В елементарній математиці розглядаються найпростіші методи розкладання многочлена $f(x)$ з раціональними коефіцієнтами на незвідні множники в полі раціональних чисел. Так як ці методи пов'язані зі знаходженням раціональних коренів многочленів, то ми детально розглянемо питання знаходження раціональних коренів.

Отже, нехай

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots a^n, (a_0 \neq 0) \quad (1.1)$$

– многочлен n степеня (n≥1) з раціональними коефіцієнтами. Без обмеження спільності висновків можна припустити, що всі коефіцієнти многочлена (1.1) – цілі числа. Дійсно, якщо б многочлен $f(x)$ мав дробові коефіцієнти, то, помноживши $f(x)$ на спільний знаменник коефіцієнтів, ми б отримали многочлен з цілими коефіцієнтами і з тими ж коренями, що і $f(x)$. Розрахування раціональних коренів многочлена (1) базується на наступній теоремі [19].

Теорема 1 Якщо нескоротний дріб $\frac{l}{m}$ (l, m – цілі числа) є раціональним коренем многочлена (1), то l є дільником вільного члена a_n, а m – дільником старшого коефіцієнтаa_0.

Доведення. Згідно визначення кореня многочлена ми можемо написати, що

$$a_0\frac{l^n}{m^n} + a_1\frac{l^{n-1}}{m^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{l}{m} + a_n = 0$$

або, помноживши обидві частини останнього рівняння на m^n:

$$a_0 l^m + a_1 l^{n-1} m + \cdots + a_{n-1} l m^{n-1} + a_n m^n = 0.$$

Звідси

$$a_0 l^n = -m(a_1 l^{n-1} + \cdots + a_n m^{n-1}), \qquad (1.2)$$

$$a_n m^n = -l(a_0 l^{n-1} + \cdots + a_{n-1} m^{n-1}). \qquad (1.3)$$

Права частина рівності (1.2) ділиться, очевидно, на m. Відповідно, на m має ділитись і ліва частина рівності (1.2), тобто $a_0 l^n$. Але в силу нескоротності дробу $\frac{l}{m}$ число l^n взаємно просте з m. Тому a_0 має ділитись на m. Аналогічно міркуємо і відносно рівності (1.3). Її права частина ділиться на l. Відповідно, $a_n m^n$ має також ділитись на l. Звідси a_n ділиться на l, так як m^n взаємно просте з l [5].

Відмітимо один наслідок з даної доведеної теореми.

Наслідок. Многочлен

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

зі старшим коефіцієнтом, який дорівнює 1, і з цілими коефіцієнтами $a_1, \dots, a_n$ може мати в якості раціональних коренів тільки цілі корені.

Насправді, за попередньою теоремою знаменник $m > 0$ раціонального кореня $x_0 = \frac{l}{m}$ має буди дільником старшого коефіцієнта, тобто дорівнюватиме 1. Звідси $x_0 = l$, а отже корінь x_0 є цілим числом.

Таким чином, випробовуючи різні дроби $\frac{l}{m}$ $(m > 0)$ зі знаменником l, що ділять a_n, і зі знаменником m, що ділять старший коефіцієнт a_0, ми знайдемо раціональні корені многочлена (1) або переконаємось, що многочлен (1.1) взагалі не має раціональних коренів. Однак ці випробування можна значно скоротити, якщо скористатись наступним твердженням.

Теорема 2 Якщо нескоротний дріб $\frac{l}{m}$ $(m > 0)$ є раціональним коренем многочлена (1.1), то для будь-якого цілого числа k число $f(k)$ ділиться на $l - km$ за умови, що $l - km \neq 0$.

Доведення. Помноживши многочлен (1) на m^n, одержуємо:

$$m^n f(x) = a_0(mx)^n + ma_1(mx)^{n-1} + \cdots + m^n a_n,$$

або, вважаючи $mx = y$:

$$m^n f(x) = \varphi(y) = a_0 y^n + ma_1(y)^{n-1} + \cdots + m^n a_n.$$

Так як $\frac{l}{m}$ – корінь многочлена $f(x)$, то ціле число l має бути коренем многочлена $\varphi(y)$, а силу чого ми можемо написати, розглядаючи $\varphi(y)$ над кільцем цілих чисел, що

$$\varphi(y) = (y - l)q(y),$$

де є також многочлен над кільцем цілих чисел. Звідси

$$\frac{\varphi(km)}{l-km} = \frac{m^n f(k)}{l-km} = -q(km) \tag{1.4}$$

має бути цілим числом; іншими словами, $m^n f(k)$ ділиться на $l - km$. Але легко побачити, що m і l – взаємно прості.

Тепер теорема стає очевидною – добуток $m^n f(k)$ ділиться на $l - km$, а m взаємно просте з $l - km$; отже, $f(k)$ ділиться на $l - km$. На прикладі розглянемо як знайти раціональні корені многочлена.

Приклад 1 Знайти раціональні корені многочлена

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 13x - 24$$

В цьому многочлені всі коефіцієнти цілі числа і старший коефіцієнт дорівнює одиниці. Отже, якщо многочлен $f(x)$ має раціональні корені, то згідно з наслідком теореми 1 корені мають бути цілими. На основі теореми 1 робимо висновок, що цілі корені многочлена $f(x)$ мають бути дільниками його вільного члена – 24. Таким чином, цілі корені слід шукати серед чисел

$$l = 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 8, -8, 12, -12, 24, -24. \qquad (1.5)$$

Ці числа можна розглядати як дроби $\frac{l}{m}$ з $m = 1$; звідси на основі другої теореми робимо висновок, що для цілого кореня $x_0 = \frac{l}{1} = l$ число $f(k)$ має ділитись на $l - k$, де k – довільне ціле число, відмінне від l. Візьмемо $k = 1$ і $k = -1$. Так як $f(1) = -20$ і $f(-1) = -42$, то 1 і -1 не можуть бути коренями даного многочлена, і тому залишається дослідити числа

$$l = 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 8, -8, 12, -12, 24, -24. \qquad (1.6)$$

Розглянемо, для яких чисел (1.6) $f(1)$ ділиться на $l - 1$ і $f(-1)$ діляться на $l + 1$. Не складно зрозуміти, що тільки числа $l = 2, -3, -4, 6$ задовольняють цю умову [16].

Так як $f(2) = -60 \neq 0$, то залишається дослідити $l = -3, -4, 6$. Число $f(2) = -30$ має ділитись на $l - 2$, якщо l – цілий корінь многочлена $f(x)$. Але цю умову подільності задовольняють тільки -3 і -4. Підставляючи у многочлен замість x значення -3 і -4, бачимо, що $f(-3) = 0$ і $f(-4) = 180$. Таким чином, даний многочлен $f(x)$ має тільки один раціональний корінь $x_0 = -3$.

Приклад 2 Знайти раціональні корені многочлена

$$f(x) = 24x^5 + 10x^4 - x^3 - 19x^2 - 5x + 6.$$

За теоремою 1 знаменник m раціонального кореня $x_0 = \frac{l}{m}$ многочлена $f(x)$ має бути дільником 24, а чисельник l – дільником 6. Ми можемо знаменник m вважати позитивним, відносячи знак до чисельника l. Узгоджуючи все це складемо наступну таблицю можливих значень x_0.

Таблиця 1.1 – Можливі значення x_0

l	***m***	***x₀***	***l***	***m***	***x₀***	***l***	***m***	***x₀***
1	1	1	3	2	$\frac{3}{2}$	1	6	$\frac{1}{6}$
-1	1	-1	-3	2	$-\frac{3}{2}$	-1	6	$-\frac{1}{6}$
2	1	2	1	3	$\frac{1}{3}$	1	8	$\frac{1}{8}$
-2	1	-2	-1	3	$-\frac{1}{3}$	-1	8	$-\frac{1}{8}$
3	1	3	2	3	$\frac{2}{3}$	3	8	$\frac{3}{8}$
-3	1	-3	-2	3	$-\frac{2}{3}$	-3	8	$-\frac{3}{8}$
6	1	6	1	4	$\frac{1}{4}$	1	12	$\frac{1}{12}$
-6	1	-6	-1	4	$-\frac{1}{4}$	-1	12	$-\frac{1}{12}$
1	2	$\frac{1}{2}$	3	4	$\frac{3}{4}$	1	24	$\frac{1}{24}$
-1	2	$-\frac{1}{2}$	-3	4	$-\frac{3}{4}$	-1	24	$-\frac{1}{24}$

Числа 1 та -1 не можуть бути коренями многочлена $f(x)$, так як $f(1) = 15$ і $f(-1) = -21$. Далі, користуючись теоремою 2, можна вилучити ще ряд можливих значень x_0. А саме, перевіримо, для яких $\frac{l}{m}$ число $f(1) = 15$ ділиться

на $l - m$ і число $f(-1) = -21$ ділиться на $l + m$. Легко знаходимо, що ці умови подільності задовольняють тільки числа $x_0 = 2,\ -2,\ 6,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2},$ $-\frac{2}{3},\ -\frac{1}{4},\ -\frac{3}{4},\ \frac{1}{6}.$

Так як $f(2) = 840$ і $f(-2) = -660$, то 2 і -2 вилучаються і залишається дослідити тільки числа

$$6, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{6}. \tag{1.7}$$

Прибираємо з ряду (1.7) ті числа $\frac{l}{m}$, для яких $f(2) = 840$ не ділиться на $l - 2m$. Потім прибираємо $\frac{l}{m}$, для яких $f(-2) = -660$ не ділиться на $l + 2m$. В результаті залишаться $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}.$

Перевіримо ці значення безпосереднім випробовуванням – підставимо *x* замість ці значення в многочлен *f(x)*:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{2}{3}\right) = f\left(\frac{3}{4}\right) = 0,$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{4},$$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = -162.$$

Звідси ми бачимо, що даний многочлен має тільки наступні раціональні корені: $x_0 = \frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}$, і ми можемо написати розкладання $f(x)$ в добуток незвідних (в полі раціональних чисел) многочленів

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{3}{4}\right)(24x^2+24x+24)$$

або

$$f(x) = (2x-1)(3x+2)(4x-3)(x^2+x+1).$$

Квадратний тричлен $x^2 + x + 1$ незвідний, так як він не має раціональних коренів. В деяких випадках при обчисленні раціональних коренів можуть бути корисними наступні твердження:

а) многочлен $f(x)$ з цілими коефіцієнтами не має цілих коренів, якщо для деяких цілих s і t $f(2s)$ і $f(2t+1)$ – непарні числа.

Доведення. Припустимо протилежне – нехай $f(x)$ має цілий корінь x_0, тоді

$$f(x) = (x - x_0)q(x).$$

Звідси

$$f(2s) = (2s - x_0)q(2s) \tag{1.8}$$

та

$$f(2t+1) = (2t+1-x_0)q(2t+1). \tag{1.9}$$

З рівності (1.8) випливає в силу непарності $f(2s)$, що число $2s - x_0$ має бути непарним. Так як $2s$ є парним, то звідси випливає, що x_0 має бути непарним числом. З іншого боку, з рівності (1.9) випливає, що $2t + 1 - x_0$ має бути непарним, звідки завдяки непарності $2t + 1$ випливає, що x_0 має бути парним [9]. Отже, одне і те ж число x_0 виявляється одночасно парним і непарним, що абсурдно.

б) многочлен $f(x)$ з цілими коефіцієнтами не має раціональних коренів, якщо можна вказати два таких цілих значення k_1 і k_2 незалежної змінної x, що $k_1 - k_2 > 2$ і $f(k_1) = \pm 1$ і $f(k_2) = \pm 1$.

Доведення. Припустимо, що многочлен $f(x)$ при вказаних умовах має раціональний корінь $x_0 = \frac{l}{m}$. Тоді за другою теоремою $f(k_1) = \pm 1$ має ділитись на $l - k_1 m$ і $f(k_2) = \pm 1$ має ділитись на $l - k_2 m$. Звідси виходить, що

$$l - k_1 m = \pm 1 \text{ та } l - k_1 m = \pm 1.$$

Віднявши від другої рівності першу, ми отримаємо:

$$(k_1 - k_2)m = \pm 2 \text{ або } (k_1 - k_2)m = 0.$$

Але рівність $(k_1 - k_2)m = 0$ виключається, так як $k_1 \neq k_2$ та $m > 0$. Таким чином, має місце тільки перша рівність. З цієї рівності видно, що 2 має ділитись на $k_1 - k_2$, що неможливо, так як за умовою $k_1 - k_2 > 2$ [10].

Приклад 3. Знайти раціональні корені многочлена

$$f(x) = x^6 + x^5 - x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 7x + 105.$$

Згідно з наслідком теореми 1 цей многочлен може мати в якості раціональних чисел лише цілі корені. Зрозуміло, що $f(0)$ і $f(1)$ – тут непарні числа: $f(0) = f(1) = 105$. Згідно з першим твердженням даний многочлен не має цілих коренів і тим самим не має раціональних коренів [8].

Приклад 4 Знайти раціональні корені многочлена

$$f(x) = 2x^4 - 7x^3 - x^2 - 18x + 25.$$

Вважаючи, що $x = 1$ і $x = 4$, виходить: $f(1) = 1$ і $f(4) = 1$. Ми бачимо, що для цього многочлена умови другого твердження виконуються. Отже, даний многочлен не має раціональних коренів.

1.2 Розкладання многочлена на незвідні множники над полем раціональних чисел. Ознака незвідності

На основі попереднього пункту розглянемо прийоми різних многочленів $f(x)$ з раціональними коефіцієнтами на множники, незвідні в полі раціональних чисел.

Для многочленів другого і третього степеня питання розкладання на множники розв'язується просто. А саме, якщо многочлен другого степеня

$$f(x) = ax^2 + bx + c \tag{1.10}$$

з раціональними коефіцієнтами звідний в полі раціональних чисел, то він, очевидно, буде розкладатись в добуток двох лінійних множників:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

(x_1 і x_2 – раціональні числа), внаслідок чого $f(x)$ буде мати два раціональних кореня x_1 і x_2, якщо многочлен (1.10) має хоча б один раціональний корінь x_1, то многочлен буде розкладатись в полі раціональних чисел в добуток двох лінійних множників [9].

Приблизно таку ж роль відіграють раціональні корені і для многочлена третього степеня

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \tag{1.11}$$

з раціональними коефіцієнтами: многочлен (1.11) звідний в полі раціональних чисел тоді і тільки тоді, коли він має щонайменше один раціональний корінь.

Насправді, якщо многочлен (1.11) звідний в полі раціональних чисел, то в його розкладанні має бути хоча б один лінійний множник $px + q$ з раціональними коефіцієнтами p, q. Цей множник має раціональний корінь $x_0 = -\frac{q}{p}$. Очевидно, що $x_0 = -\frac{q}{p}$ буде також коренем і многочлена (1.11).

Знову ж таки, якщо многочлен (1.11) має раціональний корінь x_0, то

$$f(x) = (x - x_0)q(x),$$

звідки $f(x)$ звідний в полі раціональних чисел.

Працювати з многочленами більш високого степеня складніше – якщо многочлен n-го степеня $(n \geq 4)$ з раціональними коефіцієнтами має раціональний корінь x_0, то цей многочлен буде ділитись на $x - x_0$. Обернене, однак, не вірно. Наприклад, многочлен

$$f(x) = x^5 - x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x + 1$$

не має раціональних коренів і тим не менш він звідний в полі раціональних чисел:

$$f(x) = (x^2 - x - 1)(x^3 - 2x - 1).$$

Для многочленів четвертого степеня можна вказати достатньо зручний прийом розкладання на множники, пов’язаний з поняттям кубічної резольвенти [19].

Теорема 3 Многочлен четвертого степеня

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d \tag{1.12}$$

з раціональними коефіцієнтами, який не має раціональних коренів, тоді і тільки тоді звідний в полі раціональних чисел, коли його резольвента має такі раціональні корені y_0, що

$$\sqrt{2y_0+\frac{a^2}{4}-b}\text{ та }\sqrt{y_0^2-d}$$

є раціональними числами.

Доведення. Нехай резольвента

$$(ay-c)^4=\left(2y+\frac{a^2}{4}-b\right)(y^2-d) \tag{1.13}$$

має раціональний корінь y_0 і $\sqrt{2y_0+\frac{a^2}{4}-b}$, $\sqrt{y_0^2-d}$ – раціональні числа. Тоді на основі цього ми можемо написати:

$$f(x)=(x^2+\frac{ax}{2}+y_0)^2-(\alpha x+\beta)^2,$$

де

$$\alpha=\pm\sqrt{2y_0+\frac{a^2}{4}-b},\;\; \beta=\pm\sqrt{y_0^2-d}$$

– раціональні числа. Але різницю двох квадратів, як відомо, можна представити у вигляді добутку суми на різницю. Отже,

$$f(x)=\left[x^2+\left(\frac{a}{2}+\alpha\right)x+(y_0+\beta)\right]\cdot\left[x^2+\left(\frac{a}{2}-\alpha\right)x+(y_0-\beta)\right],$$

тобто многочлен $f(x)$ виявився звідним в полі раціональних чисел.

Нехай $f(x)$ звідний в полі раціональних чисел. Так як за умовою $f(x)$ не має раціональних коренів, то многочлен $f(x)$ буде розкладатись в добуток двох квадратних тричленів з раціональними коефіцієнтами:

$$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d=(x^2+p_1x+q_1)(x^2+p_2x+q_2)$$

або

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d =$$
$$= x^4 + (p_1 + p_2)x^3 + (p_1p_2 + q_1 + q_2)x^2 + (p_1q_2 + p_2q_1)x + q_1q_2.$$

Порівнюючи коефіцієнти ліворуч і праворуч при однакових степенях x, отримуємо:

$$p_1 + p_2 = a,\ \ p_1p_2 + q_1 + q_2 = b,\ \ p_1q_2 + p_2q_1 = c,\ \ q_1q_2 = d. \qquad (1.14)$$

Виходячи з рівності (1.14) нескладно переконатись, що резольвента (1.13) має раціональним коренем

$$y_0 = \frac{1}{2}(q_1 + q_2)$$

і $\sqrt{2y_0 + \frac{a^3}{4} - b}$, $\sqrt{y_0^2 - d}$ є раціональними числами. Насправді,

$$A = 2y_0 + \frac{a_2}{4} - b = (q_1 + q_2) + \frac{(p_1+p_2)^2}{4} - (p_1p_2 + q_1 + q_2) =$$
$$\frac{p_1^2 - 2p_1p_2 + p_2^2}{4} = \left(\frac{q_1 - q_2}{2}\right)^2,$$
$$C = y_0^2 - d = \left(\frac{q_1+q_2}{2}\right)^2 - q_1q_2 = \frac{q_1^2 - 2q_1q_2 + q_2^2}{4} = \left(\frac{q_1-q_2}{2}\right)^2,$$
$$B = ay_0 - c = (p_1 + p_2) \cdot \frac{q_1+q_2}{2} - (p_1q_2 + p_2q_1) = \frac{p_1q_1 + p_2q_2 - p_1q_2 - p_2q_1}{2} =$$
$$= \frac{(p_1-p_2)(q_1-q_2)}{2},$$

звідки рівняння (1.13) при $y = y_0 = \frac{q_1+q_2}{2}$ перетворюється на очевидну тотожність

$$\left[\frac{(p_1-p_2)(q_1-q_2)}{2}\right]^2 = 4\left(\frac{p_1-p_2}{2}\right)^2 \left(\frac{q_1-q_2}{2}\right)^2.$$

Отже, якщо многочлен (1.12) звідний в полі раціональних чисел, то його резольвента (1.13) має раціональний корінь:

$$y_0 = \frac{q_1+q_2}{2},$$

$$\sqrt{2y_0 + \frac{a^2}{4} - b} = \sqrt{A} = \frac{p_1-p_2}{2}, \quad \sqrt{y_0^2} = \sqrt{C} = \frac{q_1-q_2}{2}$$

– раціональні числа, так як $\frac{p_1-p_2}{2}$ і $\frac{q_1-q_2}{2}$ раціональні.

Звертаючись до многочлена $f(x)$ вище четвертого степеня, відмітимо, що слід завжди починати з обчислення раціональних коренів многочлена. Якщо $f(x)$ має хоча б один раціональний корінь x_0, то $f(x) = (x - x_0)f_1(x)$, далі зводимо до розкладання на множники многочлена $f_1(x)$, який має найменшу степінь. Якщо ж $f(x)$ не має раціональних коренів, то можна використати наступний метод.

Коефіцієнти многочлена

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \qquad (a_n \neq 0)$$

над полем раціональних чисел завжди можна вважати цілими, так як в протилежному випадку ми б помножили $f(x)$ на спільний знаменник його коефіцієнтів [14].

В цьому припущенні назвемо многочлен $f(x)$ примітивним, якщо найбільший спільний дільник всіх його коефіцієнтів дорівнює одиниці.

Розглянемо дві леми, відомі під назвою лем Гауса.

Лема 1 Добуток двох примітивних многочленів є також примітивним многочленом.

Доведення. Нехай

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$
$$\delta(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m$$

– примітивні многочлени. Припустимо, всупереч твердженню леми, що їх добуток

$$\varphi(x)\delta(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_{n+m}x^{n+m}$$

не примітивний. Тоді всі коефіцієнти

$$c_0 = a_0b_0,$$
$$c_1 = a_0b_0 + a_1b_1,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.,$$
$$c_{i+j} = a_0b_{i+j} + a_1b_{i+j-1} + \cdots + a_{i-1}b_{j+1} + a_ib_j + a_{i+1}b_{j-1} + \cdots + a_{i+j}b_0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.,$$
$$c_{n+m} = a_nb_m$$

добутку $\varphi(x)\delta(x)$ будуть мати найбільший спільний дільник d, відмінний від одиниці. Нехай p – просте число, дільник d. Тоді, очевидно, p буде дільником всіх коефіцієнтів $c_0, c_1, c_2, \dots c_{n+m}$ добутку $\varphi(x)\delta(x)$. Однак, p не може бути дільником всіх коефіцієнтів $\varphi(x)$, тому що в протилежному випадку $\varphi(x)$ не був би примітивним. Точно так же p не може бути дільником всіх коефіцієнтів $\delta(x)$. Таким чином, нехай a_i – перший коефіцієнт многочлена $\varphi(x)$, який не є діленим p, і b_j – перший коефіцієнт $\delta(x)$, який не є діленим p. Розглянемо коефіцієнт

$$c_{i+j} = a_0b_{i+j} + \cdots + a_{i-1}b_{j+1} + a_ib_j + a_{i+1}b_{j-1} + \cdots + a_{i+j}b_0 \,. \tag{1.15}$$

В правій частині рівності (1.15) всі члени, крім a_ib_j, діляться на p, так як $a_0, \dots, a_{i-1}, b_{j-1}, \dots, b_0$ ще діляться на p. Але член a_ib_j на p не ділиться, так як

a_i і b_j не діляться на p. Звідси випливає, що права частина рівності (1.15) не ділиться на p. Виходить суперечність з нашим припущенням про те, що всі коефіцієнти добутку $\varphi(x)\delta(x)$, зокрема c_{i+j}, діляться на p. Ця суперечність і доводить лему.

За допомогою леми 1 доведемо другу лему, яка є основною в даному методі.

Лема 2 Якщо многочлен $f(x)$ з цілими коефіцієнтами звідний в полі раціональних чисел, то він розкладається в добуток двох многочленів найменшого степеня з цілими коефіцієнтами.

Доведення. Нехай многочлен

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \qquad (a_n \neq 0, n \geq 2)$$

розкладається в полі раціональних чисел наступним чином на два множники меншого степеня:

$$f(x) = g(x)h(x).$$

Якщо всі коефіцієнти многочленів $g(x)$ і $h(x)$ – цілі числа, то доводити нічого. Тому нехай $g(x)$ і $h(x)$мають дробові коефіцієнти. Позначимо через m_1 спільний знаменник коефіцієнтів $g(x)$ і через m_2 спільний знаменник коефіцієнтів $h(x)$. Тоді

$$g(x) = \frac{1}{m_1}g_1(x) \text{ і } h(x) = \frac{1}{m_2}h_1(x),$$

де $g_1(x)$ і $h_1(x)$ – многочлени уже з цілими коефіцієнтами.

Далі, позначимо через d_1 найбільший спільний дільник коефіцієнтів $g_1(x)$ і через d_2 найбільший спільний дільник коефіцієнтів $h_1(x)$. Ми можемо в такому випадку написати, що

$$g(x) = \frac{1}{m_1} g_1(x) = \frac{d_1}{m_1} \varphi(x),$$

$$h(x) = \frac{1}{m_2} h_1(x) = \frac{d_2}{m_2} \delta(x),$$

де $\varphi(x)$ і $\delta(x)$ – примітивні многочлени. Звідси

$$f(x) = \frac{d_1 d_2}{m_1 m_2} \varphi(x)\delta(x),$$

або, вважаючи $\frac{d_1 d_2}{m_1 m_2} = \frac{r}{s}$, де $\frac{r}{s}$ – нескоротний дріб:

$$f(x) = \frac{r}{s} \varphi(x)\delta(x).$$

Якщо тепер

$$\varphi(x)\delta(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n, \tag{1.16}$$

то з рівності (1.16) слідує, що

$$a_0 = \frac{rc_0}{s},\ a_1 = \frac{rc_1}{s}, \dots, a_n = \frac{rc_n}{s}.$$

Так як a_0 – ціле число, то rc_0 має ділитись на s. Але в силу нескорочуваності дробу $\frac{r}{s}$ числа r і s взаємно прості. Отже, c_0 має ділитись на s. Точно так же знаходимо, що діляться на. Звідси бачимо, що s спільний дільник коефіцієнтів добутку $\varphi(x)\delta(x)$. За лемою 1 многочлен $\varphi(x)\delta(x)$ має бути примітивним. Тим самим s має дорівнювати одиниці і тому

$$f(s) = r\varphi(x)\delta(x),$$

тобто ми дістали розкладання многочлена $f(x)$ в добуток многочленів з цілими коефіцієнтами вище нульового степеня [19].

Тепер на прикладі розглянемо метод розкладання довільного многочлена на незвідні множники над полем раціональних чисел.

Приклад. Розкладемо многочлен

$$f(x) = x^5 + x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 4x + 2$$

на множники в полі раціональних чисел.

Не складно переконатись, що даний многочлен $f(x)$ раціональних коренів не має. Таким чином, якщо многочлен $f(x)$ звідний в полі раціональних чисел, то він має розкладатись на два множники другого та третього степеня. За лемою 2 коефіцієнти цих множників мають бути цілими числами, при чому старші коефіцієнти мають дорівнювати одиниці, так як старший коефіцієнт $f(x)$ дорівнює одиниці. Отже, якщо многочлен $f(x)$ звідний, то його множник другого степеня має бути вигляду

$$g(x) = x^2 + px + q,$$

де p, q – деякі цілі числа.

Звідси випливає, що при будь-якому цілому m число $f(m)$ має ділитись на $g(m)$. Цією умовою ми і скористаємось для знаходження многочлена $g(x)$.

Так як $f(0) = 2$ і $f(-1) = -1$, то для $g(0)$ і $g(-1)$ можливі тільки наступні комбінації значень:

а) $g(0) = 1$ і $g(-1) = 1$,

б) $g(0) = 1$ і $g(-1) = -1$,

в) $g(0) = -1$ і $g(-1) = 1$,

г) $g(0) = -1$ і $g(-1) = -1$,

д) $g(0) = 2$ і $g(-1) = 1$,

е) $g(0) = 2$ і $g(-1) = -1$,

є) $g(0) = -2$ і $g(-1) = -1$,

ж) $g(0) = -2$ і $g(-1) = -1$.

Розглянемо першу комбінацію $g(0) = 1$ і $g(-1) = 1$. Маємо:

$$g(0) = q = 1, \qquad g(-1) = 1 - p + q = 1,$$

звідки

$$p = q = 1 \text{ і } g(x) = x^2 + x + 1.$$

Ділимо $f(x)$ на $x^2 + x + 1$ і переконуємось, що $f(x)$ на цей квадратний тричлен ділиться:

$$f(x) = (x^2 + x + 1)(x^3 + 2x + 2).$$

Таким чином, ми отримали розкладання $f(x)$ в полі раціональних чисел на незвідні множники і решту комбінацій не потрібно розглядати. В багатьох випадках завдяки критеріям незвідності можна одразу виявити незвідність багатьох многочленів в полі раціональних чисел. Розглянемо один із найпоширеніших критеріїв.

Ознака незвідності Ейзенштейна. Нехай $f(x)$ – многочлен з цілими коефіцієнтами. Якщо всі його коефіцієнти, крім старшого, діляться на деяке просте число, а вільний член, який ділиться на, не ділиться на, то многочлен незвідний в полі раціональних чисел [14].

Доведення. Допустимо протилежне – припустимо, що многочлен

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

звідний в полі раціональних чисел. Тоді за раніше доведеною лемою 2 многочлен $f(x)$ розкладеться в добуток двох многочленів $g(x)$ і $h(x)$ нижчого степеня з цілими коефіцієнтами:

$$f(x) = g(x)h(x). \tag{1.17}$$

Нехай

$$g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_kx^k, \text{ де } (b_k \neq 0, 0 < k < n),$$
$$h(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_lx^l, \text{ де } (c_l \neq 0, 0 < l < n).$$

Тоді з рівності (1.17) слідує, що

$$\begin{gathered} a_0 = b_0c_0, \\ a_1 = c_0b_1 + c_1b_0, \\ a_2 = c_0b_2 + c_1b_1 + c_2b_0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_k = c_0b_k + c_1b_{k-1} + \cdots + c_kb_0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_n = b_kc_1. \end{gathered}$$

За умовою вільний член $a_0 = b_0c_0$ многочлена $f(x)$ ділиться на просте число p. Звідси на p має ділитись p_0 або c_0. Але p_0 і c_0 не можуть одночасно ділитись на p, так як a_0 не ділиться на p^2. Візьмемо рівність

$$a_1 = c_0b_1 + c_1b_0.$$

Її ліва частина a_1 за умовою ділиться на p, а в правій частині член c_1b_0 ділиться на p, так як в цей член входить b_0, яке ділиться на p. Звідси випливає, що другий член в правій частині c_0b_1 ділиться на p. Але c_0 не ділиться на просте число p. Тому має ділитись на p. Переходячи до наступної рівності

$$a_2 = c_0b_2 + c_1b_1 + c_2b_0,$$

таким же чином переконуємось, що b_2 ділиться на p і так далі. Нарешті, з рівності

$$a_k = c_0b_k + c_1b_{k-1} + \cdots + c_kb_0,$$

випливає, що ділиться b_k на p. Тепер звернемось до рівності $a_n = b_kc_1$. Так як b_k ділиться на p, то a_n має ділитись на p. Виходить суперечність з умовами ознаки, згідно з якими старший коефіцієнт a_n многочлена $f(x)$ не ділиться на p. Цим правдивість ознаки і доведена.

1.3 Розв'язання задач на побудову за допомогою циркуля та лінійки

Теорія геометричних побудов за допомогою циркуля та лінійки була зумовлена численними безуспішними спробами розв'язати за допомогою такої побудови три найдавніші задачі: трисекція кута, подвоєння куба, квадратура кола.

Значення цієї теорії історично полягає в тому, що вона дала один з перших доведень неможливості в математиці, виконати його за допомогою точного огляду множини об'єктів, які можна побудувати, користуючись тільки циркулем та лінійкою. Обидва математичні результати, які в даній теорії виходять одночасно, але можуть досягатись різними засобами, в математиці двадцятого століття відіграють особливу роль.

Розв'язання основної задачі теорії побудови циркулем та лінійкою, полягає в точному описі множини побудов, які можна здійснити, і в описанні алгоритма, який дає можливість розв'язати будь-яку конкретну задачу або дізнатись, що дана задача нерозв'язна, є по суті алгебраїчною; це розв'язання не могло бути досягнуто до появи необхідних алгебраїчних засобів. Перша їх поява є працею юного Гауса про правильні многокутники, які можна побудувати за допомогою циркуля та лінійки. Ця робота вже містила в початковому вигляді основи нової алгебраїчної теорії для деяких полів частинного виду, причому ці алгебраїчні припущення представляли собою найбільш глибоку частину роботи [1].

Таким чином, теорія побудови по суті складається з трьох частин. Перша – чисто геометрична – має заключати в собі аналіз поняття «побудова за допомогою циркуля та лінійки», так щоб це поняття було визначено чітко та однозначно. Ця перша частина є основою для другої, в якій задача переводиться на алгебраїчну мову і будується в алгебраїчних термінах. Цей переклад не є чисто механічним перефразуванням: він призводить до появи нових математичних об'єктів, які складно або неможливо було б виразити на геометричній мові. З іншого боку, саме поява цих нових об'єктів дозволяє в результаті розв'язати задачу. Нарешті, третя частина теорії є власне алгебраїчною, найбільш глибокою і найбільш складною: в ній розв'язується алгебраїчна задача, до якої була приведена відповідна геометрична задача – теорія побудови.

Геометрична частина теорії.

Постановка задачі. Розглядаючи поняття «побудови за допомогою циркуля та лінійки» слід чітко дати відповіді на питання «Що побудувати?», «Які вихідні данні?», «Якими засобами можна користуватись?». Насамперед, мається на увазі, що всі побудови проводяться на обраній один раз площині. Для відповіді на перше питання необхідно проаналізувати наявні конкретні задачі. Цей аналіз показує, що головною метою розв'язання завжди є побудова кінцевого числа точок (на площині). Сама по собі задача не завжди формулюється так. Однак не складно перевірити, що будь-яка задача зводиться до такої. Наприклад, для знаходження деякого кола достатньо побудувати його центр і одну з його точок; для знаходження прямої достатньо побудувати будь-які дві точки; задача трисекції кута зводиться до побудови двох точок, через які проходять прямі, які ділять кут на три рівні частини. Задача побудови трикутника (за будь-якими даними) зводиться до задачі побудови трьох його вершин. Взагалі задача побудови многокутника зводиться до задачі побудови його вершин; але додатково потрібно вказати, які відрізки, з'єднуючі пари точок, мають входити в число сторін многокутника. Задача подвоєння куба зводиться до задачі побудови двох точок, які стоять одна від одної на заданій відстані (ребро куба, об'єм якого вдвічі більший об'єму даного куба). Кількість прикладів можна примножити. Можуть бути задачі, для розв'язання яких потрібно знайти нескінченну кількість точок. Однак, якщо вони не зводяться до задачі про знаходження скінченного числа точок, ми не будемо їх розглядати [11].

Ми не розглядатимемо також займатись питаннями про додаткові перетворення, які потрібно отримати, коли шукана кінцева система точок побудована (наприклад, знайди пари точок, які є суміжними вершинами шуканого многокутника). Зазвичай ці зведення виходять прямим геометричним розглядом креслення.

Отже, ми приймаємо наступну відповідь на перше питання: метою будь-якої задачі на побудову є знаходження скінченного числа точок на площині. Тепер відповідь на друге питання напрошується сама собою: в якості вхідних даних у нас також має бути скінченна множина точок на площині. Насправді, для побудови кута достатньо побудувати його вершину і дві точки на сторонах; для побудови кола достатньо побудувати три його точки або центр і одну точку; для побудови квадрата достатньо побудувати чотири його вершини.

Отже, ми приймаємо наступну відповідь на друге питання: вихідними даними будь-якої задачі на побудову є система скінченного числа точок на площині.

Перейдемо до третього питання. Відповідь на нього очевидна, побудова має виконуватись за допомогою циркуля та лінійки. Зручно описувати процес побудови індуктивно. Ми починаємо зі скінченного числа точок на площині і хочемо отримати скінченне число точок на площині; процес побудови полягає в тому, що до вже існуючої системи точок ми додаємо за відомими правилами ще деякі. Після чого обираємо серед всіх точок ті, які забезпечують розв'язання нашої задачі. Друга частина, звичайно, визначається специфікою задачі; нас цікавить за якими правилами додаються точки [3].

Назвемо кроком побудови додавання однієї нової точки до вже існуючих. Знаходження однієї нової точки здійснюється в результаті проведення деяких операцій; за визначенням, в побудові циркулем та лінійкою крок може складатись з декількох наступних операцій (до того ж операція а) і б) може повторюватись декілька разів, а операція в) – лише один раз):

а) проведення прямої через пару точок існуючої множини. (Ця множина є результатом попереднього кроку або представляє початково задану систему точок.)

б) проведення кола з центром в одній з точок існуючої множини і проходженням через деяку іншу точку цієї множини. (Такі прямі і кола ми назвемо побудовами на основі існуючої множини точок.)

в) вибір однієї точки перетину побудованих прямих і кіл між собою і додавання однієї точки до існуючих множин. Замість операції в, яка представляє собою вибір певної точки, іноді необхідно користуватись операцією г).

г) вибір «довільної» точки і додавання її до наявної множини.

Конкретизуємо вживання слова «довільний». За визначення означає, що точку можна обрати «довільно», або на деякому відрізку прямої, або на певній ділянці дуги кола, або ж на певній частині площини, обмеженої відрізками або дугами, і, можливо, яка прямує в нескінченність. При цьому всі прямі і кола мають бути побудовані на даному кроці, а кінці відрізків і дуг мають бути точками існуючої множини. Можна вважати, що «довільна» точка не має лежати на кінцях відрізків і дуг або на межі згаданої частини площини [1].

Побудова за допомогою циркуля і лінійки називається послідовністю, яка складається зі скінченного числа описаних кроків.

Ще раз підкреслимо, що при такому визначенні частина реального геометричного змісту даної задачі може залишитись в стороні. Наприклад, залишиться в стороні питання про відомості даної задачі і бажаної відповіді до побудови скінченного числа точок і вибору із побудованої множини точок, необхідних для остаточного розв'язання задачі; залишається в стороні лише дослідження питань типу: які з побудованих точок є суміжними вершинами в шуканому многокутнику тощо. Ці питання відносяться скоріше до «аналізу побудови», а не до рішення проблеми можливості виконати необхідну побудову [15].

Отже, нехай задана деяка скінченна множина точок із площини; ми вважаємо, що точку A можна побудувати (за допомогою циркуля та лінійки), якщо існує така побудова, що (незалежно від проміжних «довільних» виборів точок) система точок, одержаних в результаті цієї побудови, містить точку A. Задачу на побудову ми вважаємо розв'язною, якщо множина точок, які слід знайти для розв'язання цієї задачі, складається тільки з таких точок, які можна побудувати тільки за допомогою циркуля та лінійки.

Тепер ми можемо сформулювати і «основне питання теорії побудови за допомогою циркуля та лінійки». Дано скінченну кількість точок на площині. Які точки можна побудувати, виходячи з них?

Ми вже згадували, що існує точна відповідь на це питання (тобто умови, необхідні і достатні для можливості побудови точки); важливу роль відіграє також частинна відповідь, яка вказує необхідні умови для того, щоб точку можна було побудувати.

Переклад задачі на алгебраїчну мову.

Основна лема. Нам знадобляться деякі відомості з теорії полів: визначення числового поля, кінцеве розширення і степінь кінцевого розширення [9].

Крім того, вважатимемо, що знаком з геометричним зображенням комплексних чисел точками площини, при якому число $a + b_i$ (a, b – дійсні числа) зображується точкою з координатами (a, b) у фіксованому один раз назавжди прямокутної системи координат.

Це зображення буде відігравати в подальшому основну роль. Саме ми ототожнимо площину, на якій проводяться всі наші побудови, з полем комплексних чисел. Говорячи про додавання, множення та інших алгебраїчних операціях над точками, ми будемо мати на увазі відповідні операції над числами, які зображуються цими точками. Опис всіх точок, які можна отримати з даних за допомогою побудови циркулем та лінійкою, рівносильно опису всіх відповідних цим точкам чисел. Ми будемо говорити, наприклад, про належність точки до деякого поля і т. д.

Отже, нехай в числі даних задачі міститься задача двох точок на площині. Виберемо одну з точок в якості початку координат 0 , наступній припишемо координати $(1,0)$ (тобто число 1). Крім цих двох точок в дані задачі можуть входити ще деякі точки. Проведемо в точці 0 перпендикуляр до прямої, з’єднуючої 0 і 1, і відкладемо одиничний відрізок по ньому від початку координат. Всі ці побудови виконуються за допомогою циркуля та лінійки; результатом побудови є деяка декартіва система координат, яку ми і будемо використовувати для порівняння з точками комплексних чисел [15].

Тепер ми розглянемо будь-яку (абсолютно довільну) побудову циркулем та лінійкою. В процесі цієї побудови будується множина точок. Символом A_n ми позначимо множину n точок, яка виходить на черговому кроці побудови. Наступний крок складається з додавання до множини A_n ще однієї точки, тобто в переході до множини A_{n+1}. Позначимо символом K_n найменше підполе поля комплексних чисел, яке містить число i, всі числа із множини A_n і з кожним числом містить спряжене з ним число. Першим важливим результатом є наступна основна лема, яка встановлює зв’язок між геометричними операціями над точками і алгебраїчними операціями на відповідними їм числами.

Лема.

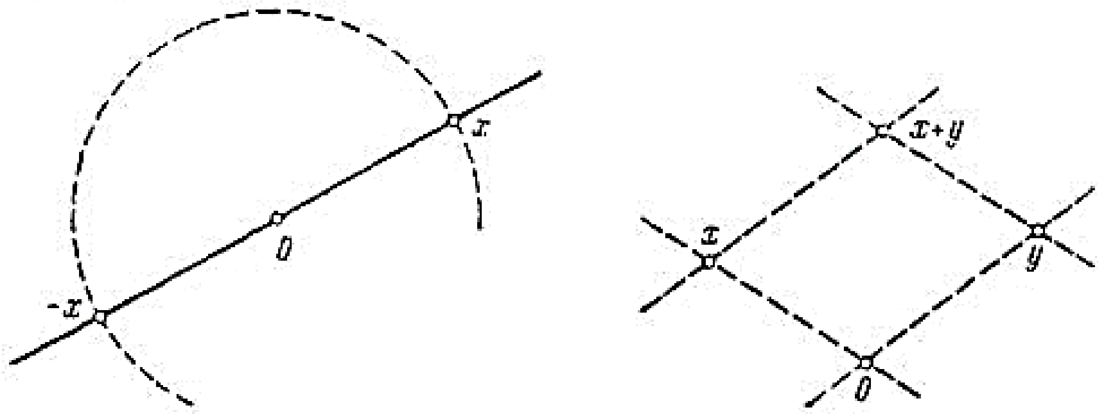
а) будь-яку точку поля K_n можна побудувати циркулем та лінійкою, на основі множини точок A_n;

б) якщо перехід від множини A_n до множини A_{n+1} полягає в додаванні точки, отриманої перетином пари прямих, пари кіл або прямої з колом, побудованих на основі точок A_n, то $K_{n+1} = K_n$ або $K_{n+1} = K_n(\sqrt{z})$, де число z належить полю K_n і не є в ньому повним квадратом. До того ж для будь-якого такого числа можна побудувати циркулем і лінійкою число $\sqrt{z}$;

в) якщо перехід від множини A_n до множини A_{n+1} полягає в додаванні точки, яка лежить на даному відрізку прямої або на даному колі, або в даній частині площини, то цю точку можна обрати так, щоб $K_{n+1} = K_n(\sqrt{z})$, де $z \in K_n$.

Доведення. Почнемо з твердження а). Нехай $z_1, \dots, z_n$ – всі точки сукупності A_n (які, як і раніше, ми будемо ототожнювати з існуючими комплексними числами). За визначенням поля K_n будь-який елемент виходить з чисел $i, z_1, \dots, z_n$, в результаті скінченного числа операцій додавання, віднімання, множення, ділення і знаходження спряженого числа. Тому достатньо встановити наступний результат: якщо дані дві точки x, y, то за допомогою циркуля і лінійки можна побудувати точки $-x$; $x + y$; $\overline{x}$; $x - 1$; xy. (Можливість побудувати число i ми вже відмітили: пригадаємо, що серед чисел $z_1, \dots, z_n$ міститься одиниця – вона була обрана з початкових даних.)

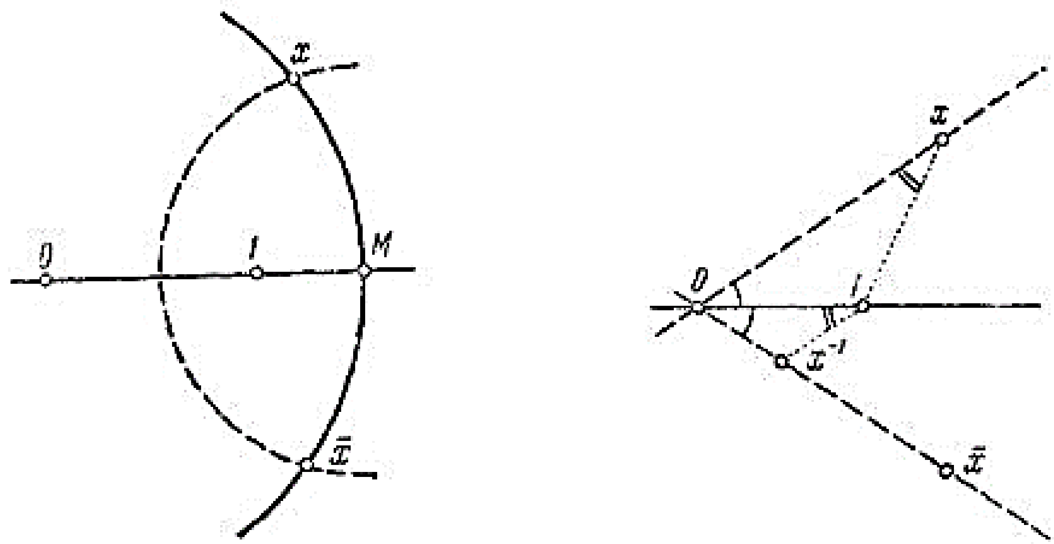
Цей результат достатньо просто перевірити. Для побудови точки $-x$ потрібно провести через O та x пряму і циркулем відкласти відрізок від O до x на цій прямій в іншу сторону від точки O (рисунок 1.1(а)). Для побудови точки $x + y$ потрібно провести через точку x пряму, паралельну Oy, а через точку y – пряму, паралельну Ox (рисунок 1.1(б)). Їх перетин і дасть $x + y$, якщо ці прямі не співпадають, тобто якщо точки x, y, O не лежать на одній прямій. Якщо ж ці три точки лежать на одній прямій, то задача знову зводиться до відкладання (циркулем) даних відрізків на даній прямій.



а) б)

Рисунок 1.1

Для побудови точки x^{-1} достатньо побудувати окремо її аргумент і модуль. Побудова аргумента зводиться до побудови кола, яке проходить через точку x, з центром на початку координат, знаходженні його точки перетину з прямою і знаходженні дуги від однієї з цих точок до точки x в іншу сторону по колу (це дає $\overline{x}$, рисунок 1.2 (а)). Побудова $|x|^{-1}$ – це побудова четвертого пропорційного відрізку $|x|, 1, 1$. Добре відомо, як його будувати циркулем та лінійкою. Потім відрізок $|x|^{-1}$ потрібно відкласти на прямій $0\overline{x}$ від точки 0 в сторону точки x (рисунок 1.2 (б)).

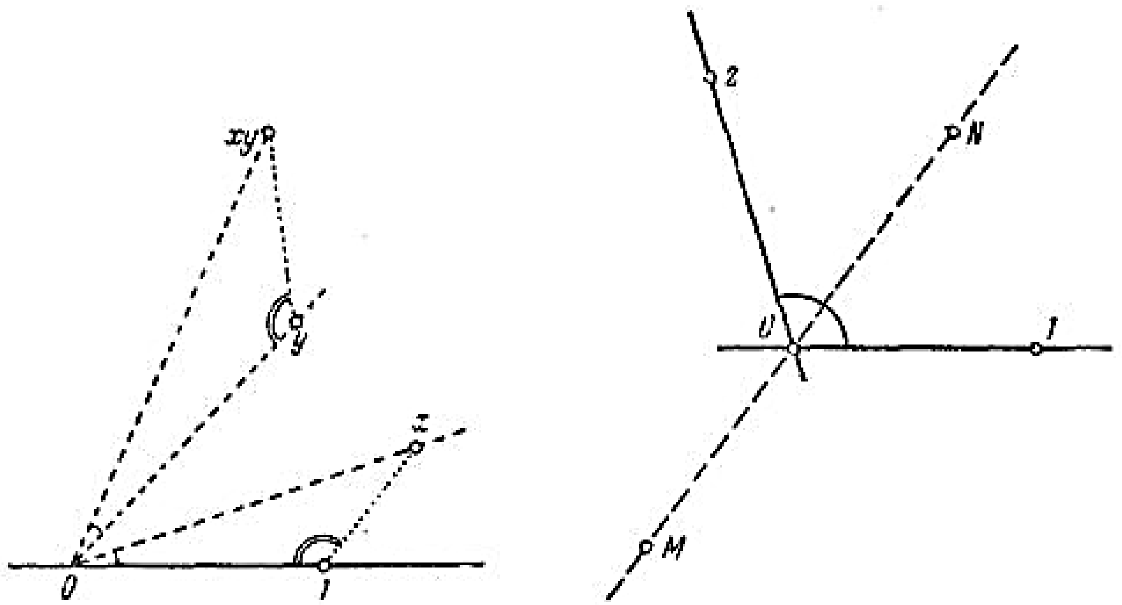


а) б)

Рисунок 1.2

Побудова точки (x, y) зводиться до аналогічної побудови суми двох кутів (аргументів точок x, y) і побудови відрізка $|xy|$, тобто четвертого пропорційного відрізкам 1, $|x|, |y|$ (рисунок 1.3 (а)).

Таким чином ми довели твердження а) нашої теореми. Доведення твердження б) теореми зручно починати з другої її частини, тобто встановити, що якщо дана точка z (і, звичайно, 1), то можна циркулем та лінійкою побудувати $\sqrt{z}$. Побудова зрозуміла: потрібно розділити аргумент точки z навпіл і відкласти відрізок довжиною $\sqrt{|z|}$ (середнє пропорційне значення між відрізками $|z|$ та 1; воно будується за допомогою циркуля та лінійки) від точки O в обидві сторони по прямій, кут нахилу якої до дійсної осі 01 дорівнює половині аргумента числа z (точки M і N, рисунок 1.3 (б)).



а) б)

Рисунок 1.3

Складніше встановити першу частину твердження б). Насамперед потрібно навчитись записувати рівняння прямої і кола на комплексній площині. Однак можна, на деякий час, домовитись розподіляти дійсні і уявні частини комплексного числа, позначати їх символами X, Y. Це і будуть координати відповідної точки. Рівняння прямої, яка проходить через дві точки $(x_1,\ y_1)$ і $(x_2,\ y_2)$ множини A_n, подано у вигляді

$$(X - x_1)(y_2 - y_1) - (Y - y_1)(x_2 - x_1) = 0. \tag{1.18}$$

Тобто у вигляді

$$aX + bY + c = 0,$$

де коефіцієнти a, b, c легко розраховуються через координати точок $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$. Далі, рівняння кола з центром в точці (d, e) із множини A_n, яка проходить через деяку точку (x, y) цієї сукупності, можна записати у вигляді

$$(X - d)^2 - (Y - e)^2 = r^2, \tag{1.19}$$

де $r^2 = (x - d)^2 + (y - e)^2$.

Коефіцієнти рівнянь (1.18) і (1.19) – дійсні числа. Ми стверджуємо, що всі вони належать полю K_n. Для доведення цього достатньо зауважити, що разом з будь-яким числом x в полі K_n міститься також його дійсна частина $Re\ x$ і уявна частина $Im\ x$, тому що $Re\ x = \frac{x+\overline{x}}{2}$, $Im\ x = \frac{x-\overline{x}}{2i}$. Числа ж в рівняннях (18) і (19), як ми вже побачили, раціонально виражаються через дійсні і уявні частини координат точок із множини A_n.

Тепер для знаходження точок перетину ми маємо розв'язати (в дійсних числах) одну з трьох систем рівнянь:

$$\begin{cases} aX + bX + c = 0, \\ a'X + b'X + c' = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} aX + bY + c = 0, \\ (X - d)^2 + (Y - e)^2 = r^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (X - d)^2 + (Y - e)^2 = r^2, \\ (X - d')^2 + (Y - e')^2 = r'^2. \end{cases}$$

Обрати одне розв'язання цієї системи і приєднати одержані числа X, Y до поля K_n – підсумком і буде поле K_{n+1}. Перевірку цього твердження можна одержати за допомогою того факту, що якщо в полі K_{n+1} містяться дійсні числа a, b, то містяться також і числа $a \pm bi$.

Але розв'язання першої системи рівнянь належить полю K_n; іншими словами, в даному випадку $K_{n+1} = K_n$. Розв'язання двох інших систем зводиться до розв'язання одного квадратного рівняння з коефіцієнтом в полі K_n Приєднання кореня цього рівняння до поля зводиться до приєднання кореня квадратного із дискримінанта цього рівняння. Якщо дискримінант z є повним квадратом, то $K_{n+1} = K_n$. В іншому випадку $K_{n+1} = K_n(\sqrt{z})$. Твердження б) доведено.

Перевіримо твердження в). Ми покажемо навіть, що точки, які задовольняють умови б) всюди щільно лежать на відрізках і дугах.

Нехай, даний відрізок прямої, який з'єднує дві точки x, y з поля K_n, тоді середина цього відрізка також належить полю K_n, тому що вона є точкою $x + \frac{y}{2}$. Застосовуючи це твердження до двох половин відрізка, потім до його четвертин і т. д., виходить, що всередині будь-якого відрізка прямої, взятого між точками x, y, міститься точка з поля K_n. Тим самим становлено, що довільний вибір точки на відрізку прямої, яка проходить через дві точки з поля K_n, завжди можна здійснити, не виходячи за межі цього поля [9].

Нехай тепер дане коло C, побудоване на основі множини точок A_n,і на ньому виділена дуга L, кінцями якої є точки, які належать множині A_n. Як ми вже розглядали, рівняння кола C, побудованого на основі множини точок A_n можна записати у вигляді (1.19), де d, e і r^2 – дійсні числа, які належать полю K_n. Далі, будь-яке раціональне число k належить полю K_n (тому що $1 \epsilon K_n$). Тепер розглянемо всі можливі точки перетину кола C з прямими, паралельними осі абсцис і розташованими на раціональній відстані від цієї осі, тобто з прямими $Y = k$, де k – довільне раціональне число. Зрозуміло, що ці точки перетину всюди щільно розташовані на колі C і, окрема, на дузі L. Але кожна така точка перетину має в якості своїх координат X, Y розв'язок системи

$$(X-d)^2+(Y-e)^2=r^2,\ Y{=}k,$$

і тому ця точка перетину належить полю вигляду $K_n\left(\sqrt{z}\right)$, де $z \in K_n$. Отже, вибір довільної точки дуги L завжди можна здійснити так, щоб обрана точка належала полю $K_n\left(\sqrt{z}\right)$, і тому або $K_{n+1}=K_n$, або $K_{n+1}=K_n\left(\sqrt{z}\right)$, де $z \in K_n$.

Випадок, коли потрібно обрати точку всередині області, частково обмеженої прямими і дугами, не складний. Достатньо, наприклад, відмітити, що всередині області завжди можна знайти точку з раціональними координатами, тобто точку, яка належить полю K_n. Таким чином наша лема повністю доведена.

Висновки. Доведена лема в деякому сенсі розв'язую основне питання побудови за допомогою циркуля і лінійки. Для точного формулювання відповіді введено декілька нових понять.

Позначимо літерою A систему заданих точок, в літерою K – поле, яке відповідає цій системі (пригадаємо, що воно містить задані точки, число i та всі спряжені до всіх своїх елементів; до того ж це поле є найменшим з вказаних властивостей). Для будь-якого поля L його квадратним розширенням назвемо поле вигляду $L\left(\sqrt{z}\right)$, де число $z \in L$ не є повним квадратом в полі L. Назвемо кінцеве розширення K' поля K допустимим, якщо воно виходить з поля K в результаті скінченного ланцюжка квадратичних розширень:

$$K\ =\ K_0\ \subset K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_n=K';$$

$$K_{i+1}=K_i\left(\sqrt{z_i}\right), z_i \subset K_i \quad (i=0,1,\ldots,n-1).$$

Тепер відповідь на основне питання теорії побудови можна сформулювати так: для того щоб точку можна було побудувати циркулем та лінійкою, виходячи із сукупності точок А, необхідно і достатньо, щоб точка містилась в деякому допустимому розширенні поля K. Цей результат є простим перефразуванням доведеної вище леми [7].

Тепер слід розібратись в тому, як застосувати цей результат до конкретних геометричних задач. Для можливості такого застосування слід перш за все розв'язати відповідну алгебраїчну задачу. Це означає, що ми вважатимемо шукані точки (тобто ті, які потрібно побудувати) невідомими і скласти для них систему рівнянь, виходячи з умов задачі (в коефіцієнти цих рівнянь увійдуть числа, які відповідають цим точкам). Після цього ми маємо або записати корені рівнянь (тобто шукані точки) у вигляді деяких виразів, які містять в скінченному числі операцій додавання, віднімання, множення, ділення та добування квадратного кореня, застосовані до початково заданих чисел, або встановити, що таких виразів не може існувати.

В першому випадку ми зможемо геометрично отримати відповідь на задачу, будуючи за допомогою циркуля та лінійки корені нашої системи рівнянь. Другий випадок цікавіший, тому що виникає питання нового типу: як встановити, що корені даної системи рівнянь не належать допустимому розширенню даного поля?

Алгебраїчний розгляд. Відповідь на поставлене питання не проста. Більш того, якщо не накладати ніяких обмежень на систему рівнянь, яка може вийти в результаті, то навіть не вдасться висловити ніяких спільних припущень з цього приводу. Тому ми введемо наступну умову на даний клас задач: їх розв'язання має зводитись до розв'язання системи рівнянь вигляду:

$$\begin{cases} F_1(x_1, \ \dots \ , x_n) = 0, \\ F_2(x_1, \ \dots \ , x_n) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ F_m(x_1, \ \dots \ , x_n) = 0, \end{cases} \tag{1.20}$$

де x_i – невідомі точки, а F_i – многочлени від змінних x_i, коефіцієнти яких входять в поле K, які відповідають початково заданій системі точок.

Якщо геометрична задача правильно поставлена, зокрема якщо початкових даних достатньо, то вона має допускати тільки скінченне число відповідей. В алгебрі доводиться, що тоді система рівнянь (20) можна значно спростити, зводячи її методом виключення до виду

$$\begin{cases} \Phi_1 x_1 = 0, \\ \Phi_1 x_2 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \Phi_n x_n = 0, \end{cases} \tag{1.21}$$

де на цей раз $\Phi_i x_i$ – многочлени з коефіцієнтом в поле, кожен з яких залежить лише від однієї змінної [1].

Правда при цій степені многочленів Φ_1 можуть значно вирости в порівняння зі степенями многочленів F_i і, що ще гірше, у системи (1.21) можуть з'явитися нові розв'язки. Але перші складнощі можуть виникнути лише при практичному рахунку, а другі ми не будемо приймати до уваги, як раніше, вважаючи, що розібравшись у можливості побудови коренів системи (1.21), то відібрати з них розв'язки , які дають відповідь на геометричну задачу, буде вже справою доступною.

В свою чергу, побудова коренів системи (1.21) зводиться до побудови коренів многочленів від однієї змінної з коефіцієнтом в полі K. Нехай $\Phi(x)$ – такий многочлен. Якщо нам вдасться розкласти його на два множники $\Phi(x) = \Phi_1(x)\Phi_2(x)$, ні один з яких не є постійною величиною, і обидва ці множники мають коефіцієнти з поля K, то достатньо буде дослідити питання побудови коренів кожного з цих множників окремо. Многочлен $\Phi(x)$, який не можна розкласти на множники таким чином називається незвідним над полем K. Слід чітко розуміти, що незвідність многочлена істотно залежить від поля, над яким цей многочлен розглядають. Над полем комплексних чисел, наприклад, будь-який многочлен вище першого степеня звідний, – цей результат раніше називали «основною теоремою алгебри».

Отже, при прийнятих обмеженнях ми прийшли до наступного питання. Даний незвідний многочлен з коефіцієнтами в полі K. Чи містяться його корені в деякому допустимому розширенні поля K?

Питання не зовсім чітко поставлене: деякі корені можуть бути в допустимому розширені, а інші ні. Тут допущення незвідності дозволяє встановити наступний результат.

Теорема 4 Якщо один з коренів незвідного многочлена над полем K належить допустимому розширенню поля K, то і решта коренів належить допустимому розширенню. (Звідси випливає, якщо хоч який-небуть з коренів цього многочлена не належить допустимому розширенню, то і решті належить ця властивість.)

Ми не зможемо навести тут доведення цієї теореми в загальному випадку. Воно вимагає введення достатньо складних алгебраїчних понять і по суті належить до теорії Галуа. При розгляданні конкретних прикладів, найчастіше зустрічатимуться незвідні многочлени третього степеня [12].

Випадок многочленів третього степеня. Нехай $\Phi(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ – незвідний многочлен третього степеня з коефіцієнтом в полі K, тобто такий многочлен, який не

можна розкласти на добуток двох многочленів з коефіцієнтами з поля K, один з яких має степінь 1, а другий – 2. Ми доведемо, що жоден з його коренів не може належати допустимому розширенню K. Але для початку покажемо, що доречна наступна теорема.

Теорема 5 Якщо один з коренів многочлена належить деякому допустимому розширенню поля, то два інших кореня також належать допустимому розширенню.

Доведення. Нехай ланцюжок квадратичних розширень

$$K = K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset K_n = K'$$

обраний так, що його довжина (число n) є найменшою можливістю з усіх довжин ланцюжків, які приводять до допустимих розширень поля K, які містять який небудь корінь многочлена Φ. З незвідності многочлена Φ випливає, що $n \geq 1$. Відповідний корінь (який міститься в полі K') позначимо символом $x_1 = a + b\sqrt{z}$, де $K_n = K_{n-1}(\sqrt{z})$; $a, b, z \in K_{n-1}$. Так як $x_1 \in K_{n-1}$, то $b \neq 0$. Тепер маємо,

$$0 = \Phi\left(a + b\sqrt{z}\right) = \Phi_1(a,b,z) + \Phi_2(a,b,z)\sqrt{z};$$
$$\Phi\left(a - b\sqrt{z}\right) = \Phi_1(a,b,z) + \Phi_2(a,b,z)\sqrt{z};$$

де Φ_1 і Φ_2 – деякі многочлени від трьох змінних з коефіцієнтами в полі K. Тому числа $\Phi_1(a,b,z)$ і $\Phi_2(a,b,z)$належать полю K_{n-1}; тоді з першої рівності випливає, що $\Phi_1(a,b,z) = \Phi_2(a,b,z) = 0$ (тому що $\sqrt{z} \in K_{n-1}$..), і з другої рівності випливає, що $\Phi\left(a - b\sqrt{z}\right) = 0$. Тим самим показано, що число

$x_2 == a - b\sqrt{z} \in K_n$ є другим коренем рівняння $\Phi(x) = 0$ (відмінним від x_1, так як $b \neq 0$). Після цього знайти третій корінь зовсім не складно:

$$x_3 = -p - (x_1 + x_2) = -p - 2a.$$

Очевидно, що він теж належить допустимому розширенню K. Теорема доведена. Зауважимо, що достатньо додати до цього доведення одну фразу, щоб встановити доречність наступного припущення.

Теорема 6 Якщо $\Phi(x)$ – незвідний многочлен третього степеня з коефіцієнтами поля K, то жоден його корінь не належатиме допустимому розширенню поля K.

Насправді $x_3 = -p - 2a \in K_{n-1}$, що суперечить визначенню числа n (нагадаємо, що $n \geq 1$, і тому поле K_{n-1} визначено).

Таким чином, доведення першої теореми оперує з порожньою множиною об’єктів: многочленів третьої степені, які задовольняють умови теореми 5, взагалі не існує.

Тим не менш ніяких логічних невідповідностей наші міркування не містять: «умовна» теорема 5 зберігає свою силу незалежно від негативного результату теореми 6 і ми виділимо окремо цю теорему, оскільки вона показує, які міркування застосовують для доведення теореми 5 в загальному випадку. З іншого боку, вказаний спосіб доведення теореми 6 не підлягає узагальненню на випадок довільного степеня, і сама ця теорема замінюється більш складною по формі теоремою Гауса [17].

Теорема Гауса. Ми назвемо так наступну теорему, яку виведемо з теореми 1.

Теорема 7 Якщо корені незвідного над полем K многочлена $\Phi(x)$ належать допустимому розширенню, то степінь цього многочлена дорівнює 2^n, де $n \geq 1$ – деяке ціле число.

З цієї теореми знову випливає, що корені незвідних многочленів степеня 3 взагалі не можуть належати допустимим розширенням, тому що $3 \neq 2^n$ при жодному значенні n.

2 КЛАСИЧНІ НЕРОЗВ’ЯЗНІ ГЕОМЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ НА ПОБУДОВУ

2.1 Побудова трикутника за трьома даними характеристичними точками або довжинами

Дослідимо задачі на побудову трикутника за його декількома заданими елементами, а саме за його трьома висотами, медіанами або бісектрисами. Розглянемо це питання з двох сторін: чи визначається трикутник заданими елементами (тобто чи існує хоча б одне розв’язання задачі); якщо розв’язання існує, чи єдине воно (чи однозначно визначається трикутник).

Ми знаємо, що трикутник однозначно задається своїми сторонами (за третьою ознакою рівності трикутників). Однак, довільно задаючи довжини сторін, ми можемо і не отримати трикутник. Не за всіма своїми елементами трикутник побудується однозначно. Наприклад, за стороною AB, висотою h, проведеною до цієї сторони, і радіусом R описаного навколо трикутника кола, ми можемо отримати два різних трикутника ACB та ADB (рисунок 2.1) [7].

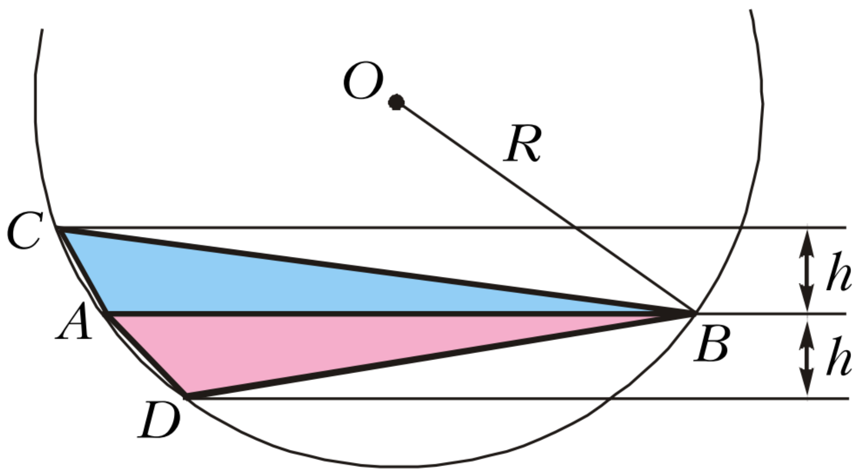


Рисунок 2.1

Розглянемо чи визначається трикутник однозначно своїми висотами. Позначимо a, b, c довжинами сторін трикутника, $h_a\ h_b, h_c$ – довжинами висот, опущених на відповідні сторони, S – площа трикутника. Для зручності введемо позначення $\eta_a = \frac{1}{h_a}, \eta_b = \frac{1}{h_b}, \eta_c = \frac{1}{h_c}$.

Оскільки

$$S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2},$$

то

$$a : b : c = \eta_a : \eta_b : \eta_c.$$

Останнє співвідношення дозволяє зробити висновок: трикутник з висотами $h_a\ h_b, h_c$ існує, якщо з відрізків довжин η_a, η_b, η_c можна побудувати трикутник. Іншими словами, величини η_a, η_b, η_c, так же, як і довжини сторін a, b, c мають задовольняти нерівність трикутника [4].

Розглянемо чи визначається трикутник однозначно своїми медіанами. В шкільному курсі геометрії доводиться, що за медіанами довільного трикутника можна побудувати трикутник. Відповідно, якщо трикутник з заданими довжинами медіан m_a, m_b, m_c мають задовольняти нерівності

$$m_a + m_b > m_c,$$
$$m_b + m_c > m_a,$$
$$m_c + m_a > m_b.$$

Для дослідження питання про однозначність побудови трикутника за його трьома медіанами зручно скористатись відомим співвідношенням, який пов’язує довжини медіан з його сторонами a, b, c:

$$2m_a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2,$$
$$2m_b^2 = 2(c^2 + a^2) - b^2,$$

$$2m_c^2 = 2(a^2 + b^2) - c^2.$$

Розглянемо, чи визначається трикутник своїми бісектрисами. Припустимо, що трикутник з деякими заданими довжинами трьох бісектрис існує. В даному випадку доведемо, що трикутник своїми бісектрисами визначається однозначно. А саме доведемо наступну ознаку рівності трикутників.

Теорема 8 Якщо три бісектриси одного трикутника відповідно рівні трьом бісектрисам другого трикутника, то ці трикутники рівні.

Доведення. Нехай трикутники $\Delta 1$ та $\Delta 2$ мають відповідного рівні бісектриси. Достатньо розглянути два випадки: 1) всі сторони одного трикутника не менше відповідних сторін другого трикутника; 2) рівно одна сторона одного трикутника менше відповідної сторони другого трикутника [6].

У першому випадку, якщо всі відповідні сторони трикутників рівні, то ці трикутники рівні за третьою ознакою рівності трикутників. Припустимо, що у трикутників є нерівні відповідні сторони. Відмітимо, що трикутники не можуть бути подібними з коефіцієнтом подібності відмінним від 1. В іншому випадку бісектриси одного з трикутників були б більшими відповідних бісектрис другого. Отже, у трикутників є нерівні кути. Не применшуючи спільності, будемо вважати, що сторони трикутника Δ_1, не менше відповідних сторін трикутника Δ_2. Оскільки у трикутників Δ_1 та Δ_2 є нерівні кути, то у трикутника Δ_1 є кут φ_1, менший від відповідного кута φ_2 в трикутнику Δ_2. Якщо кут φ_1 в трикутнику Δ_1 утворений сторонами $p_1,\ q_1$, а кут φ_2 в трикутнику Δ_2 утворений сторонами p_2, q_2, то для довжин бісектрис $l_1,\ l_2$ цих кутів маємо:

$$l_1 = \frac{2cos\frac{\varphi_1}{2}}{\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}}, \quad l_2 = \frac{2cos\frac{\varphi_2}{2}}{\frac{1}{p_2}+\frac{1}{q_2}}.$$

Так як $\varphi_2 > \varphi_1, p_2 \geq p_1, q_2 \leq q_1,$ то $l_2 < l_1 -$ суперечність. Отже, в даному випадку трикутники можуть мати тільки рівні відповідні сторони.

Розглянемо другий випадок. Без обмеження спільності трикутників можна вважати, що сторони $a_1,\ b_1, c_1$ трикутника Δ_1 відповідають сторонам $a_2,\ b_2, c_2$ трикутника Δ_2, при чому $a_1 < a_2,\ b_1 \geq b_2, c_1 \geq c_2$. Скориставшись формулою, яка пов'язує довжину бісектриси з довжинами сторін трикутника, маємо

$$l_{a_1}^2 = b_1 c_1\left(1 - \frac{a_1^2}{(b_1+c_1)^2}\right),$$
$$l_{a_2}^2 = b_2 c_2\left(1 - \frac{a_2^2}{(b_2+c_2)^2}\right).$$

Враховуючи ці нерівності та формули маємо $l_{a_2}^2 < l_{a_1}^2$ – протиріччя. Ознака рівності трикутників за трьома бісектрисами доведена [2].

Залишається відкритим питання чи існує трикутник, довжини бісектрис якого рівні трьом наперед заданим додатним числам l_a, l_b, l_c. Виявляється такий трикутник існує.

Теорема 9 Для будь-яких додатних чисел l_a, l_b, l_c існує єдиний трикутник з бісектрисами, довжини яких рівні l_a, l_b, l_c.

Доведення. Пригадаємо, що бісектриси l_a, l_b, l_c та сторони a, b, c будь-якого трикутника пов'язані співвідношенням

$$l_a^2 = bc\left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right),$$
$$l_b^2 = ac\left(1 - \frac{b^2}{(a+c)^2}\right),$$
$$l_c^2 = ab\left(1 - \frac{c^2}{(a+b)^2}\right).$$

Введемо допоміжні змінні δ, η, λ, p:

$$p = a + b + c,$$
$$\delta = \frac{a}{p},$$

$$\eta = \frac{b}{p},$$
$$\lambda = \frac{c}{p}.$$

Після чого отримаємо співвідношення такого вигляду

$$\frac{l_a^2(1-\delta)^2\delta}{1-2\delta} = p^2\eta\lambda\delta,$$
$$\frac{l_b^2(1-\eta)^2\eta}{1-2\eta} = p^2\eta\lambda\delta,$$
$$\frac{l_c^2(1-\lambda)^2\lambda}{1-2\lambda} = p^2\eta\lambda\delta.$$

Відмітимо, що речова функція $\varphi = \frac{(1-x)^2}{1-2x}$ на інтервалі $x\epsilon\left(0;\frac{1}{2}\right)$ – неперервна і монотонно зростаюча.

Тепер попередні рівності можна переписати так:

$$\delta = f\left(\frac{t}{l_a^2}\right),$$
$$\eta = f\left(\frac{t}{l_b^2}\right),$$
$$\lambda = f\left(\frac{t}{l_c^2}\right),$$

де $t = p^2\eta\lambda\delta$. Оскільки

$$\delta + \eta + \lambda = \frac{a}{p} + \frac{b}{p} + \frac{c}{p} = a + b + \frac{c}{p} = 1,$$

отримуємо рівняння

$$f\left(\frac{t}{l_a^2}\right) + f\left(\frac{t}{l_b^2}\right) + f\left(\frac{t}{l_c^2}\right) = 1.$$

В його лівій частині стоїть зростаюча функція, при $t \to 0$ прямуюча до 0, а при $t \to +\infty$ – до $\frac{3}{2}$. Це означає, що розв'язок рівняння $t = t_0$ існує і єдиний. Знаючи $t = t_0$, знаходимо $\delta_0, \eta_0, \lambda_0$ після чого знаходимо p_0 з відношення $p_0 = \sqrt{\frac{1}{\delta\eta\lambda}}$ і, нарешті, отримуємо $a_0 = \delta_0 p_0$, $a_0 = \eta_0 p_0$, $a_0 = \lambda_0 p_0$. Таким чином за довжинами бісектрис l_a, l_b, l_c довжини сторін a, b, c трикутника визначаються однозначно. Теорема доведена.

Підсумовуючи всі результати, робимо висновок, що трикутники рівні, якщо вони мають рівні висоти, рівні медіани, рівні бісектриси. Трикутник визначається своїми трьома лінійними елементами: трьома сторонами, трьома висотами, трьома медіанами чи трьома бісектрисами. Побудувати трикутник за допомогою циркуля та лінійки відносно не важно. Однак, виявляється задача побудови трикутника за даними довжинами бісектрис його кутів від вершини до протилежної сторони нерозв'язна за допомогою циркуля та лінійки [15].

Розглянемо питання про нерозв'язність для окремих значень довжин бісектрис. Зручно вважати, що дві з них рівні, тому що тоді вдається звести задачу до дослідження кубічного многочлена. Візьмемо за основу наступну теорему: якщо довжини бісектрис двох кутів в трикутнику рівні, то ці кути також рівні, отже трикутник рівнобедрений.

Задача. Побудувати рівнобедрений трикутник за даними довжинами бісектрис його кутів від вершин до протилежних сторін.

Нехай даний трикутник з півпериметром p і кутами α, β, γ, тоді довжина бісектриси кута α дорівнює

$$l_\alpha = 2p\,\frac{\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}. \tag{2.1}$$

Подібні формули справджуються і для l_β і l_γ.

В даному випадку $\beta = \gamma$; відрізки l_α та l_β задані. Можна вважати, що $l_\beta = l$; довжину відрізка l_α для зручності позначимо просто буквою l. Якби ми могли просто побудувати циркулем та лінійкою шуканий трикутник, то ми могли б побудувати також відрізок довжиною $\sin\frac{\beta}{2}$. З формули (2.1) виведемо, що число $\sin\frac{\beta}{2}$ є коренем кубічного многочлена над полем $Q(l)$ і при деяких раціональних значеннях величини цей многочлен незвідний. Таким чином дана задача нерозв'язна.

Застосуємо формулу (2.1) до l_β і знайдемо відношення $\frac{l_\alpha}{l_\beta} = l$, враховуючи, що $\alpha = \beta$. Тоді маємо

$$l = \frac{\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{sin\frac{\beta}{2}cos\frac{\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\beta\sin\beta} = \frac{\sin\frac{3\beta}{2}}{2\cos\beta}. \tag{2.2}$$

Ми знову використали те, що трикутник рівнобедрений і це означає що $\frac{a}{2} = \frac{\pi}{2} - \beta$. Припустимо $\sin\frac{\beta}{2} = x$; тоді $\sin\frac{3\beta}{2} = 3x - 4x^3; \cos\beta = 1 - 2x^2$. Із рівності (2.2) витікає, що x є коренем рівняння $4x^3 - 4lx^2 - 3x + 2l = 0$.

Зручно взяти $l = 3$ і ввести заміну змінної, проклавши $y = 2x - 2$. Число y є коренем рівняння $y^2 - 15y - 10 = 0$. Як і раніше для доведення незвідності многочлена $y^2 - 15y - 10$ достатньо встановити, що він не має раціонального кореня. Нехай такий корінь є, і він дорівнює $\frac{p}{q}$, де p, q – взаємно прості числа . Тоді $p^2 = 5q^2(3p + 2q)$, відповідно $p = 5r$, де r – ціле число, так що $25r^2 = q^2(15r + 2q)$. Але остання рівність неможлива, тому що q не ділиться на 5.

Відомо, що побудувати трикутник за трьома бісектрисами з допомогою циркуля та лінійки неможливо. А чи можна побудувати трикутник за трьома бісектрисами, якщо крім циркуля та лінійки дозволяється використовувати трисектор, за допомогою якого будь-який кут можна розділити на три рівні частини?

Відповідь негативна. Існує один і тільки один трикутник, у якого бісектриси рівні 2, 3 і 6, але побудувати його за допомогою циркуля, лінійки та трисектора неможливо. Більш того, навіть при використанні n-сектора (прилад, який дозволяє розділити кут на будь-яке натуральне число n рівних частин) у поєднанні з циркулем та лінійкою дана задача нерозв'язна. Далі розглянемо доведення цієї нерозв'язності.

Для початку відмітимо, що для будь-яких трьох додатних чисел існує один і тільки один трикутник, для якого ці числа є довжинами бісектрис [4]. Далі, не існує алгоритма, який дозволяє за даними трьома бісектрисами побудувати трикутник циркулем та лінійкою [7].

Тепер безпосередньо розглянемо питання про побудову трикутника за допомогою циркуля, лінійки та трисектора за трьома бісектрисами.

Теорема 10 Існує такий многочлен f від чотирьох змінних з цілими коефіцієнтами, що для будь-якого трикутника з довжинами сторін a, b, c і довжинами бісектрис l_a, l_b, l_c виконується рівність $f(a, l_a, l_b, l_c.) = 0$.

Доведення**.** Візьмемо спочатку такий многочлен g від чотирьох змінних з цілими коефіцієнтами, що $g(l_a, a, b, c) = 0$ для будь-якого трикутника. Такий многочлен виписати нескладно, використовуючи формулу для довжин бісектрис через довжини сторін:

$$l_a^2b^2 + 2l_a^2bc + l_a^2c^2 + bca^2 - b^3c - 2b^2c^2 - bc^3.$$

Таким чином в будь-якому трикутнику

$$\begin{gathered} l_a^2b^2 + 2l_a^2bc + l_a^2c^2 + bca^2 - b^3c - 2b^2c^2 - bc^3, \\ l_b^2a^2 + 2l_b^2ac + l_b^2c^2 + acb^2 - a^3c - 2a^2c^2 - ac^3, \\ l_c^2a + 2l_c^2ab + l_c^2b^2 + abc^2 - a^3b - 2a^2b^2 - ab^3. \end{gathered}$$

Отже, такий многочлен f від чотирьох змінних з цілими коефіцієнтами існує. На основі цього ми можемо зробити висновок про неможливість побудови трикутника за допомогою циркуля, лінійки та трисектора за трьома бісектрисами.

2.2 Подвоєння куба

Розглянемо задачу на подвоєння куба, тобто побудову, за умови використання лише лінійки та циркуля, грані куба, об'єм якого удвічі більший за об'єм куба з даною гранню. Застосуємо розглянуту загальну теорію до даної геометричної задачі. Головним нашим інструментом буде розглянута раніше теорема Гауса. Дану задачу переведемо на алгебраїчну мову, складемо рівняння шуканих точок, з'ясуємо їх степінь і незвідність. Якщо степінь не дорівнює 2^n, а многочлен незвідний, то шукану точку неможливо побудувати за допомогою циркуля і лінійки [18].

Задача. Заданий куб (довжиною свого ребра). Потрібно побудувати другий куб (тобто його ребро), об'єм якого вдвічі більший об'єму даного куба.

Початок досліджень очевидний. Дані дві точки (ребро куба). Як завжди приймаємо їх за точки 0 і 1 на комплексній площині. Довжина ребра подвоєного куба дорівнює дійсному значенню $\sqrt[3]{2}$; для побудови точки $\sqrt[3]{2}$ ми маємо дослідити многочлен $x^3 - 2$. Степінь його дорівнює трьом, і якщо він незвідний над основним полем $K = Q(i)$ (Q – поле раціональних чисел), то задача подвоєння куба нерозв'язна. Доведемо, що многочлен $x^3 - 2$ дійсно незвідний.

Якби многочлен $x^3 - 2$ був звідний над полем $Q(i)$, то один з множників обов'язково був би першого степеня. Якби відповідний корінь не був дійсним, то виділився б і другий множник першого степеня зі спряженим коренем, а третій множник був би лінійним і мав би вже дійсні корені. Це міркування можна застосувати для будь-якого многочлена третього степеня з дійсними коефіцієнтами: якщо такий многочлен звідний над полем $Q(i)$, то один з множників лінійний і має дійсний, і навіть раціональний корінь [9].

Але многочлен $x^3 - 2$ не має раціонального кореня, тому що єдине дійсне значення $\sqrt[3]{2}$ ірраціональне.

Пригадаємо доведення цього. Припустимо, що $\sqrt[3]{2} = pq$, де p і q – взаємно прості числа. Тоді $p^3 = 2q^3$, так що число p має бути парним; нехай

$p = 2p_1$, тоді $4p_1^3 = q^3$і, відповідно, число q також має бути парним, а це суперечність з тим, що p і q взаємно прості.

Цікаво, що на останній стадії розв'язання геометричної задачі нам довелось скористатися чисто арифметичними міркуваннями, хоча поки і не дуже складними.

Це не можливо, оскільки корінь кубічний від двох, хоча б алгебраїчно, не може бути обчислений з цілих чисел за допомогою операцій додавання, віднімання, множення, ділення, та виділення квадратного кореня. З цього випливає, що його мінімальний многочлен з раціональними коефіцієнтами має степінь 3. Отже степінь не дорівнює 2^n, а многочлен незвідний, то шукану точку неможливо побудувати за допомогою циркуля і лінійки, тож відповідна задача на побудову нерозв'язна [13].

2.3 Трисекція кута

Розглянемо задачу про поділ заданого кута на три рівні частини за допомогою циркуля та лінійки, тобто трисекція кута. Інакше кажучи, необхідно побудувати трисектриси кута – промені, що ділять кут на три рівні частини [7].

Задача. Даний кут φ; побудувати $\frac{1}{3}\varphi$.

Задати кут φ – значить побудувати три точки: точку 0 – його вершину, точку 1 на одній з його сторін, яку ми приймемо за дійсну вісь, і точку z, яка лежить на другій стороні і має модуль $|z| = 1$ (рисунок 2.2).

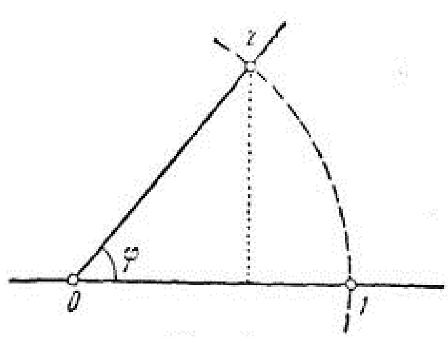


Рисунок 2.2

Очевидно, $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Таким чином, поле K, яке відповідає заданій системі точок, має вигляд $K = Q(i, \cos\varphi + i\sin\varphi)$. Побудувати кут $\frac{\varphi}{3}$ – означає побудувати число $\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}$ або, що рівносильно, побудувати число $\cos\frac{\varphi}{3}$. В силу відомих формул тригонометрії,

$$\cos\varphi = \left(2\frac{\varphi}{3} + \frac{\varphi}{3}\right) = \cos 2\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3} - \sin 2\frac{\varphi}{3}\sin\frac{\varphi}{3} = \left(2\,cos^2\frac{\varphi}{3} - 1\right)cos\frac{\varphi}{3} -$$
$$-2\,sin\frac{\varphi}{3}\;cos\frac{\varphi}{3}\;sin\frac{\varphi}{3} = 2\,cos^2\,\frac{\varphi}{3}\; - \cos\frac{\varphi}{3} + 2\;\left(1 - cos^2\frac{\varphi}{3}\right)cos\frac{\varphi}{3}$$

або

$$\cos\varphi = 4\,cos^2\,\frac{\varphi}{3} - 3\cos\frac{\varphi}{3}.$$

Таким чином, число $\cos\frac{\varphi}{3}$ є коренем рівняння

$$4x^3 - 3x - \cos\varphi = 0. \qquad (2.3)$$

Отже, ми маємо побудувати корінь рівняння (2.3)

Перед нами знову многочлен третього степеня; ми маємо розібратись, чи звідний він над полем $K = Q(i, \cos\varphi + i\sin\varphi)$. При деяких значеннях φ він, безумовно, звідний; наприклад, при $\varphi = \frac{\pi}{2}, K = Q(i)$:

$$4x^3 - 3x - \cos\frac{\pi}{2} = 4x^3 - 3x = x(4x^2 - 3).$$

Це відповідає добре відомій обставині: прямий кут можна розділити на три рівні частини за допомогою циркуля та лінійки [11].

Можна надати точний зміст наступному твердженню, яке встановлює в деякому сенсі протилежний результат: при загальному значенні φ многочлен

$4x^3 - 3x - \cos\varphi$ незвідний над полем $K = Q(i, \cos\varphi + i\sin\varphi)$. Слово «загальний» в цьому реченні можна визначити різними способами, але ми обмежимося зазначенням конкретного значення кута φ, який не можна циркулем та лінійкою розділити на три рівні частини. Це – кут $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Для доведення слід встановити, що при $\varphi = \frac{\pi}{3}$ многочлен, який стоїть в лівій частині рівняння (2.3), незвідний над полем

$$Q(i, \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = Q\left(i, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = Q(i, \sqrt{3}).$$

тобто ліва частина рівняння

$$8x^3 - 6 - 1 = 0 \tag{2.4}$$

є незвідним многочленом над полем $Q(i, \sqrt{3})$. Якщо ми доведемо, що многочлен $8x^3 - 6 - 1$ незвідний над полем раціональних чисел Q, то звідси випливає, що він незвідний і над полем $Q(i, \sqrt{3})$, тому що будь-яке допустиме розширення поля $Q(i, \sqrt{3})$ є допустимим розширенням поля Q.

Розв'язуючи задачу на подвоєння куба ми вже встановили, що для доведення незвідності кубічного многочлена над полем раціональних чисел достатньо встановити, що у нього немає раціональних коренів. Припустимо, що такий корінь є; покладемо $2x = \frac{p}{q}$, де p, q – цілі взаємно прості числа. З рівності (2.4) знаходимо

$$p^3 - 3pq^2 = q^3.$$

Так що q^3 ділиться на p і, значить, $p = \pm 1$. Тоді q задовольняє рівність $q^3 \pm 3q^2 \mp 1 = 0$; так як q – ціле число, то воно має бути дільником вільного члена цього рівняння, тож якщо цілий корінь є, то він дорівнює ± 1. Але, очевидно, відповідні значення $x = \pm\frac{1}{2}$ не є розв'язками рівності (2.4). Відповідно, вони зовсім не мають раціональних розв'язків [13].

Отже, циркулем і лінійкою неможливо розділити на три рівні частини кут $\frac{\pi}{3} = 60°$, тобто неможна побудувати кут $\frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{3} = 20°$.

ВИСНОВКИ

Математики Стародавнього світу, як правило, багато задач розв'язували геометричним способом, використовуючи різні спеціальні прилади. Наприклад, вони могли за допомогою циркуля і лінійки порівняно легко побудувати суму і різницю двох відрізків, поділити кут навпіл, помножити відрізок на звичайний дріб. Використовуючи ці побудови можна було геометрично отримувати розв'язки лінійних і деяких квадратних рівнянь. Але на той час були сформульовані задачі, які неможливо розв'язати за допомогою циркуля і лінійки. Ми розглянули знамениті задачі давнини. Багато років світ вивчав і досліджував їх. Вони зіграли важливу роль в становленні геометрії. Ми показали, що ці задачі неможливо розв'язати лише за допомогою циркуля та лінійки. В даній кваліфікаційній роботі ми розглянули ці задачі, причини їх виникнення і методи їх розв'язання.

В роботі було розглянуто різні методи наближених побудов задач побудови трикутника за його трьома бісектрисами, трисекції кута та подвоєння куба. Наведено способи побудов нерозв'язних задач. До деяких із них наведено наслідки, задачі, які випливають з побудови даних, нерозв'язних за допомогою циркуля і лінійки задач.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Адлер А. Теория геометрических построений: пер. з нем. 3-е изд. : Ленинград : Учпедгиз, 1940. 384 с.
2. Бевз Г. П. Геометрія трикутника: навч. посібник. Київ : Генеза, 2005. 120 с.
3. Воронец О. М. Геометрия циркуля // *Квант*. 1984. № 3. С. 29 – 40.
4. Жуков А. Однозначно ли определяется триугольник // *Квант*. 2003. № 1. С. 6 – 11.
5. Кузьмин Р. О., Фадеев Д. К. Алгебра и арифметика комплексных чисел. Ленинград : Учпедгиз, 1939. 185 с.
6. Кушнир И. А. Триугольник и тетраедр в задачах: кн. для учителя. Киев : Советская школа, 1991. 208 с.
7. Манин Ю. И. О разрешимости задач на построение с помощью циркуля и линейки // *Энциклопедия элементарной математики. Книга IV. Геометрия*. Москва : Физматлит, 1963. 227 с.
8. Окунев Л. Я. Высшая алгебра: учебник. Москва : Учпедгиз, 1937. 314 с.
9. Окунев Л. Я. Кольцо многочленов над полем рациональных функций // *Энциклопедия элементарной математики. Книга II. Алгебра*. Москва : Физматлит, 1951. 310 с.
10. Окунев Л. Я. Основы современной алгебры. Москва : Учпедгиз, 1941. 205 с.
11. Петерсен Ю. Методы и теории решения геометрических задач на построение. Москва : типография Е. Лиснера та Ю. Романа, 1892. 114 с.
12. Постников М. М. Теория Галуа. Москва : Физматгиз, 1963. 220 с.
13. Прасолов В. В. Три класические задачи на построение. Удвоение куба, трисекция угла, квадратура круга. Москва : Наука, 1992. 80 с.

14. Проскуряков И. В. Числа и многочлены. 2-е изд. Москва : Просвещение, 1965. 282 с.
15. Ф. Клейн. Лекции по избранным вопросам элементарной геометрии: пер. с нем. Казань : Казанский университет, 1989. 124 с.
16. Шапиро Г. М. Высшая алгебра. 4-е изд. Москва : Полиграфкнига, 1938. 388 с.
17. Широков П. А. Краткий очерк основ геометрии Лобачевского. Москва : Наука, 1938. 76 с.
18. Щетников А. И. Как были найдены некоторые решения трех классических задач древности? // *Математическое образование*. 2008. № 4. С. 3 – 15.
19. Энциклопедия элементарной математики: под ред. Вебер Г., Вельштейн И. Т. 1 : Элементарная алгебра и анализ. Одесса : Матезис, 1906. 625 с.