

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

**МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра загальної математики**

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА

на тему: **«ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА МОДЕЛЬ
НЕОДНОРІДНОЇ СТРУКТУРИ ДЛЯ
В'ЯЗКОПРУЖНОГО ВИПАДКУ»**

Виконала: студентка 2 курсу, групи 8.1118
Спеціальності 111 математика
(шифр і назва спеціальності)

освітньої програми математика

А.В. Паназдир

(ініціали та прізвище)

завідувач кафедри фундаментальної
математики, доцент, д.т.н.

Керівник

Гребенюк С.М.

(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Рецензент

декан математичного факультету,
професор, д.т.н. Гоменюк С.І.

(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет математичний

Кафедра загальної математики

Рівень вищої освіти магістр

Спеціальність 111 математика

(шифр і назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри загальної
математики, к.ф.-м.н., доцент

Зіновєєв І.В.

(підпис)

« 30 » Травня 2019 р.

З А В Д А Н Н Я
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТЦІ

Паназдир Альоні Вікторівні

(прізвище, ім'я та по батькові)

1. Тема роботи Диференціальна модель неоднорідної структури
для в'язкопружного випадку

керівник роботи Гребенюк Сергій Миколайович, д.т.н., доцент

(прізвище, ім'я та по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від « 19 » 05 2019 року № 811-с

2. Строк подання студентом роботи 19.12.2019

3. Вихідні дані до роботи 1. Постановка задачі.

2. Перелік літератури.

3. Перелік задач до розв'язання.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)

1. Постановка задачі.

2. Основні теоретичні відомості.

3 Застосування диференціальних співвідношень в в'язко пружних процесах.

4. Практичне застосування.

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень)

Презентація

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання 23.05.2018

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	03.06.2019	
2.	Збір вихідних даних.	08.07.2019	
3.	Обробка методичних та теоретичних джерел.	14.08.2019	
4.	Розробка першого та другого розділу.	24.09.2019	
5.	Розробка третього розділу.	29.10.2019	
6.	Оформлення та нормоконтроль кваліфікаційної роботи.	14.12.2019	
7.	Захист кваліфікаційної роботи.	16.01.2020	

Студент _____
(підпис)

_____ А.В. Паназир

Керівник роботи _____
(підпис)

_____ С.М. Гребенюк

Нормоконтроль пройдено

Нормоконтролер _____
(підпис)

_____ О.Г. Спиця
(ініціали та прізвище)

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Диференціальна модель неоднорідної структури для в'язкопружного випадку»: 52 с., 10 рис., 22 джерел.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА МОДЕЛЬ, В'ЯЗКОПРУЖНІСТЬ, ДЕФОРМАЦІЯ, ЗАКОН ГУКА, МОДЕЛЬ ТІЛА ФОЙГХТА, МОДЕЛЬ ТІЛА МАКСВЕЛА, ПРУЖНІСТЬ, РЕОЛОГІЧНІ МОДЕЛІ, ГОМОГЕНІЗАЦІЯ.

Об'єкт дослідження – диференціальні співвідношення в'язкопружності.

Мета роботи: застосувати диференціальні співвідношення до моделювання в'язкопружності у неоднорідних матеріалах.

Метод дослідження – аналітичний.

Кваліфікаційну роботу присвячено побудові моделей і виведенню диференціальних співвідношень в'язкопружних процесів. У роботі досліджено диференціальні моделі Максвела та Фойгхта. На основі моделі Максвела побудовано модель деформування волокнистого композиційного матеріалу, у якого матриця в'язкопружна, а волокно – пружне. Отримано співвідношення для двох ефективних характеристик гомогенізованого матеріалу і з їх використанням записано в'язкопружний закон деформування композиту.

SUMMARY

Master's qualifying Thesis «Differential Model of Inhomogeneous Structure for Viscoelastic Case»: 52 pages, 10 figures, 22 references.

DIFFERENTIAL MODEL, VISCOELASTIC, DEFORMATION, HOOKE'S LAW, VOIGT MODEL, MAXWELL MODEL, ELASTICITY, REOLOGICAL MODELS, HOMOGENIZATION.

The object of the study is differential viscosity ratio.

The aims of the study apply differential equations to viscoelasticity modeling in non-homogeneous materials.

The method of research is analytical.

This thesis is devoted to the construction of models and the derivation of differential equations of viscoelastic processes. Differential Maxwell and Voigt models are investigated in this paper. On the basis of the Maxwell model, a model of deformation of fibrous composite material, whose matrix is viscoelastic, and fiber is elastic, is constructed. A correlations for two effective characteristics of a homogenized material were obtained. The viscoelastic deformation law of a composite was recorded with their use.

ЗМІСТ

Завдання на кваліфікаційну роботу.....	2
Реферат.....	5
Summary.....	6
Вступ.....	7
1 Диференціальні та інтегральні співвідношення лінійної теорії в'язкопружності.....	8
1.1 Математичні моделі деформування тіл	8
1.2 В'язкопружні деформації матеріалів.....	19
1.3 Інтегральні співвідношення теорії в'язкопружності.....	20
1.4 Різницеві ядра у інтегральних рівняннях в'язкопружності.....	22
1.5 Диференціальні моделі в'язкопружності.....	26
2 Визначальні співвідношення лінійної вязкопружності. Основні реологічні моделі.....	30
2.1 Основні відомості про реологічні моделі	30
2.2 Реологічне тіло Максвела	32
2.3 Модель тіла Кельвіна (тіло Фойгта).....	36
3 Застосування диференціальних співвідношень до моделювання в'язкопружних процесів неоднорідних тіл.....	42
Висновки.....	50
Перелік посилань.....	51

ВСТУП

У комплексі сучасних досліджень міцності матеріалів та конструкцій, природно-техногенних комплексів, тощо все більша увага звертається на аспект моделювання. Композитні та полімерні матеріали, природно-техногенні комплекси (гірські масиви, шляхопроводи, газопроводи) часто поводять себе як неоднорідні в'язкопружні тіла, тому для дослідження їхнього напружено-деформованого стану часто недостатньо обмежитись використанням лише пружної моделі однорідного тіла. Причому розглядувані матеріали можуть бути як початково неоднорідними, так і ставати такими внаслідок впливу зовнішнього середовища (дія температурного, електромагнітного полів, зміна вологонасиченості, консистенції породи, тощо). Питання адекватного моделювання неоднорідних структур стають усе більш актуальними як у теоретичному відношенні, так і в прикладному аспекті, оскільки з'ясування поведінки досліджуваних структур безпосередньо впливає на ефективність та безпеку експлуатації як окремих матеріалів та конструкцій, так і цілих природно-техногенних комплексів. Ефективне використання результатів фізичного та математичного моделювання також вимагає від фахівців з механіки твердого деформівного тіла розуміння основних аспектів основних моделей МТДТ (пружної, пружно-пластичної та в'язкопружної). Викладення основних математичних моделей механіки деформівного твердого тіла, що різною мірою використовуються при описанні поведінки суцільних середовищ, є метою даної роботи.

1 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ СПІВВІДНОШЕННЯ ЛІНІЙНОЇ ТЕОРІЇ В'ЯЗКОПРУЖНОСТІ

1.1 Математичні моделі деформування тіл

Створенням математичних моделей деформування одне із головних завдань механіки деформованого твердого тіла. Розглянемо один із її розділів – теорію пружності. Теорія пружності – розділ механіки суцільних середовищ, що вивчає деформації і напруження в тілах, котрі перебувають у спокої або рухаються під дією навантажень. Головною задачею цієї теорії є запис математичних рівнянь, розв'язання яких дозволяє відповісти на такі запитання: який матимуть вигляд деформації конкретного тіла, якщо до нього прикласти у відомих місцях навантаження заданої величини. Та якими будуть при цьому напруження в тілі.

З теорією пружності тісно пов'язані питання, чи тіло зруйнується, чи витримає певні навантаження, але не входить у її компетенцію.

Існує достатньо прикладів від визначення деформацій і напружень в навантаженій балці на опорах, до розрахунку цих же параметрів в корпусі літака, ракети, підводного човна, у колесі вагона, в броні танка чи при ударі снаряда, в гірському масиві при прокладенні штольні, в каркасі висотної будівлі і так далі.

У випадку інженерних задач, напруження і деформації в конструкціях розраховують за спрощеними теоріями. До таких теорій належать:

а) *опір матеріалів*, основним завданням якого є розрахунок стрижнів і балок, а також, оцінка напружень, що виникають у зонах контактної взаємодії твердих тіл;

б) *будівельна механіка* займається розрахунком стрижневих систем (наприклад, мостів);

в) *теорія оболонок* є самостійною, добре розвиненою галуззю науки про деформації і напруження, предметом дослідження якої є тонкостінні оболонки (циліндричні, конічні, сферичні, і складніші форми).

Розв'язати задачу теорії пружності означає звести її до інтегрування системи диференціальних рівнянь у частинних похідних, які визначають поведінку пружного тіла у внутрішніх точках. Також до цих рівнянь додаються умови на поверхні, що обмежує тіло. Дані умови визначають задання або зовнішніх поверхневих сил, або переміщень точок поверхні тіла. Залежно від цього зазвичай формулюють один із трьох типів крайових задач. Далі розглянемо ці типи.

Перша крайова задача – кінематична. В об'ємі тіла відшукуються складові переміщень, що набувають на поверхні певних значень. В умові на поверхні тіла в такий спосіб задаються рівняння поверхні й значення складових переміщень на ній.

Друга крайова задача – статична. У цьому випадку на поверхні тіла не накладені жодні обмеження на переміщення і задаються значення складових поверхневих навантажень.

У випадку, коли поверхня тіла збігається з координатними площинами, граничні умови можуть бути сформульовані безпосередньо в напруженнях. Тоді достатньо вказати рівняння поверхні й задати значення складових напружень на ній.

Третя крайова задача – змішана. У цьому випадку на одній частині поверхні тіла задаються кінематичні умови, а на іншій – статичні.

Цими трьома задачами не вичерпується вся розмаїтість граничних умов.

У залежності від поведінки тіла після зняття навантаження розрізняють деформації:

а) пружну (або оборотну), якщо тіло після усунення впливів, що спричинили деформацію, повністю відновлює свою початкову форму і розміри (внаслідок накопиченої потенціальної енергії);

б) залишкову (або необоротну), коли після усунення прикладених сил або інших впливів тіло не відновлює свою початкову форму і розміри (робота зовнішніх сил переходить у теплоту). Залишкові деформації у свою чергу поділяються на пластичні, викликані зростанням напруження і в'язкі (повзучість), що відбуваються під навантаженням з перебігом часу.

Деформації виникають з причин різної фізичної природи. Пружні деформації однозначно пов'язані з напруженням. Прирощення пластичних деформацій також пов'язано зі зміною напруження, але незворотно. Разом ці обидві деформації, які пов'язані зі зміною напруження, називаються «миттєвими». Температурні деформації пов'язані зі зміною температури тіла. Деформації радіаційного розпухання пов'язані з отриманою матеріалом дозою радіації. Деформації повзучості (в'язкопружні деформації) є такими, зміна яких пов'язана з прирощенням часу.

Деформація повзучості пов'язана з рухом дислокацій, дифузією втілених атомів, перебудовою міжзеренних зв'язків і проявляється з плином часу.

У полімерах деформація визначається зміною конфігурації довгих полімерних ланцюгів та поперечних зв'язків між ними. Наявність далеких взаємодій обумовлює протяжність у часі розвитку деформацій. Для полімерів типовою є в'язкопружна деформація.

Деформаційні властивості матеріалів характеризуються модулями пружності. Класичною моделлю лінійної пружності є ідеальна пружина. Хоча для загального випадку тензор модулів пружності, що лінійно пов'язує між собою тензори напружень і деформацій є тензором четвертого рангу. Однак, при розгляді простіших задач, як наприклад, стержень при одновісному розтягуванні, задача зводиться до застосування закону Гука.

У своїй найпростішій формі закон Гука записується для визначення деформації довгого тонкого стрижня або пружини

$$F = kx, \quad (1.1)$$

де F – сила, k – коефіцієнт жорсткості, x – подовження.

Ця формула не враховує зміни поперечних розмірів стрижня при розтягу. Крім того коефіцієнт жорсткості – це властивість стрижня, а не властивість матеріалу, з якого він виготовлений.

У узагальненому вигляді закон Гука не може бути перевірений безпосереднім досвідом, у його справедливості переконуються шляхом перевірки тих висновків, які можуть бути отримані з узагальненого закону Гука аналітично.

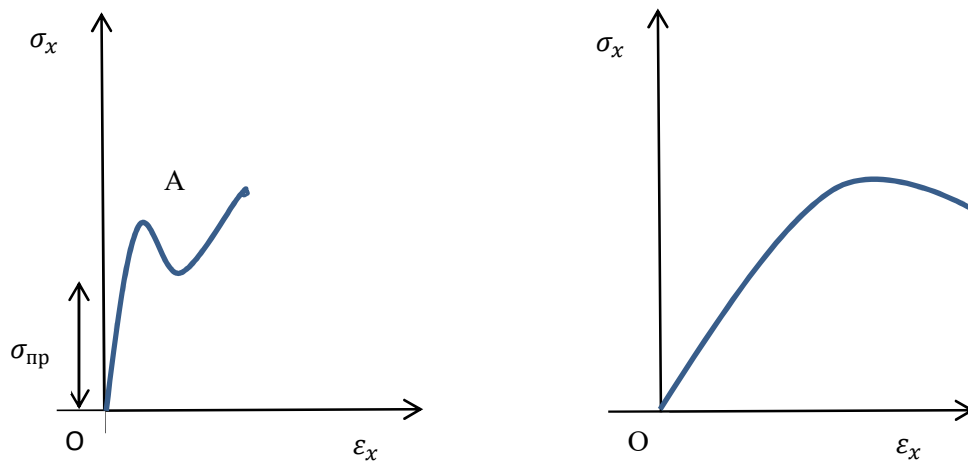


Рисунок 1.1 – Діаграма розтягування

На рисунку 1.1 показана так звана діаграма розтягування, що виражає залежність між розтягуючим (нормальним) напруженням і відносним подовженням стрижня в цьому напрямі. Вигляд цієї діаграми різний для різних матеріалів. Діаграма вигляду а) характерна для металів, що мають пластичні властивості, наприклад для м'яких сталей з малим умістом вуглецю. Початкова ділянка OA цієї діаграми є прямолінійною, тобто існує пряма пропорційність між напруженням і відносним подовженням в одному напрямі. Для матеріалів,

що не мають або майже не мають пластичних властивостей, тобто матеріалів крихких, таких, наприклад, як тверді леговані сталі, чавун, камінь, діаграма розтягування не має початкової прямолінійної ділянки. Але в більшості випадків ця ділянка може бути приблизно замінена прямою. Тому можна вважати, що при випробуванні стрижня на розтягування в межах малих подовжень для переважної більшості матеріалів справедлива така лінійна залежність між деформаціями і напруженнями:

$$\varepsilon_i = \frac{\sigma_i}{E}. \quad (1.2)$$

де E – модуль пружності (модуль Юнга, модуль пружності першого роду, модуль пружності при розтягуванні, для сталей $E \approx 2 \cdot 10^{11}$ Па).

Модуль пружності – це фізична константа матеріалу, яка визначається експериментально. Також експериментально встановлений закон, що пов'язує лінійні деформації в поздовжньому і поперечному напрямках. Тіло, що зазнає розтягування уздовж осі x , одночасно зазнає стиснення в перпендикулярних напрямках:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x. \quad (1.3)$$

Ця рівність є законом Пуассона про поперечне стиснення при поздовжньому подовженні, а ν має назву коефіцієнта Пуассона. Він характеризує властивості матеріалу і також визначається експериментально. Для ізотропного матеріалу величина ν не може перевищувати 0,5. При випробуванні на чистий зсув установлена пропорційність між дотичним напруженням і кутовою деформацією в площині дії цього напруження:

Також оперують іншим коефіцієнтом – модулем зсуву G , або модулем пружності другого роду. Розмірність його, як і розмірність модуля першого

роду, збігається з розмірністю напруження. Він не є новою пружною постійною, оскільки пов'язаний із модулем пружності і коефіцієнтом Пуассона таким співвідношенням:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (1.4)$$

У тривимірному випадку закон Гука для лінійних деформацій можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)], \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Зв'язок між кутовими деформаціями і дотичними напруженнями згідно з законом Гука при зсуві можна подати незалежно для кожної з трьох площин, паралельних координатним площинам:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}, \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}.$$

Таким чином, маємо шість формул:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)], \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], \\ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}; \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \end{array} \right. \quad (1.6)$$

які виражають лінійну залежність між складовими деформації і складовими напруження в ізотропному пружному тілі і називаються узагальненим законом Гука у прямій формі. Відповідно величини головних деформацій, тобто лінійні деформації по напрямку головних напружень, можна визначити за формулами:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)], \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)], \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)]. \end{aligned}$$

Кутові деформації по головних напрямках дорівнюють нулю.

Основні рівняння теорії пружності, які потрібно розв'язувати можна згрупувати так.

Диференціальні рівняння рівноваги:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + pX = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + pY = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + pZ = 0. \end{array} \right.$$

Умови на поверхні:

$$\begin{cases} P_{nx} = \sigma_x \cos(x, n) + \tau_{xy} \cos(y, n) + \tau_{xz} \cos(z, n), \\ P_{ny} = \tau_{yx} \cos(x, n) + \sigma_y \cos(y, n) + \tau_{yz} \cos(z, n), \\ P_{nz} = \tau_{zx} \cos(x, n) + \tau_{zy} \cos(y, n) + \sigma_z \cos(z, n). \end{cases}$$

Геометричні рівняння. Зв'язок між переміщеннями і деформаціями (співвідношення Коші):

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \end{aligned}$$

Рівняння сумісності деформацій (рівняння Сен - Венана):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x}, \\ \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} &= \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{zz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial x \partial z}. \end{aligned}$$

Узагальнений закон Гука в прямій формі (1.6). Узагальнений закон Гука в зворотній формі:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \lambda\theta + G\varepsilon_x, \tau_{xy} = G\gamma_{xy}, \\ \sigma_y &= \lambda\theta + G\varepsilon_y, \tau_{yz} = G\gamma_{yz}, \\ \sigma_z &= \lambda\theta + G\varepsilon_z, \tau_{xz} = G\gamma_{xz}, \\ \lambda &= \frac{Ev}{(1+v)(1-2v)}, G = \frac{E}{2(1+v)}.\end{aligned}$$

Використовуючи ці групи рівнянь, можна приступити безпосередньо до розв'язання загальної задачі теорії пружності про визначення напружень і деформації, що виникають в ізотропному пружному тілі під дією зовнішніх сил. Слід підкреслити, що всі отримані вище рівняння виведені в припущенні малих деформацій. Повна група рівнянь теорії пружності містить невідомі функції напружень, деформації і переміщення. Отже, необхідно заздалегідь вибрати ті величини, які беруть за основні невідомі, що підлягають визначенню в першу чергу, і за якими потім можна знайти всю решту чинників, що характеризують напружений стан і деформацію тіла. Дану задачу можна розв'язати декількома способами.

Як основні невідомі беруть напруження. Задача зводиться до визначення шести функцій

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_x(x, y, z), \sigma_y = \sigma_y(x, y, z), \sigma_z = \sigma_z(x, y, z), \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx}(x, y, z), \tau_{xz} = \tau_{zx}(x, y, z), \tau_{yz} = \tau_{zy}(x, y, z).\end{aligned}$$

Вони повинні задовольняти рівняння рівноваги, яких недостатньо для визначення невідомих, тому необхідне задоволення шести умов сумісності деформацій. Одночасно повинні бути задоволені умови на поверхні. Сформульовану таким чином задачу називають першою основною (граничною) задачею теорії пружності.

Як основні невідомі беруть переміщення точок пружного тіла. У цьому випадку задача зводиться до визначення трьох невідомих функцій:

$$u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z),$$

при цьому повинні бути задовільнені рівняння рівноваги і умови на поверхні. Для цього потрібно співвідношення Коші підставити в рівняння закону Гука в зворотній формі, тобто виразити напруження через переміщення, після чого отримані вирази підставити в рівняння рівноваги. Сформульовану таким чином задачу називають другою основною (граничною) задачею теорії пружності. Як основні невідомі беруть частину переміщень і частину напружень, так звана змішана задача теорії пружності. Очевидно, що другий спосіб («розв'язання задачі в переміщеннях») з математичної точки зору більш простий, оскільки при цьому доводиться мати справу з меншим числом рівнянь і невідомих. Визначивши переміщення, за співвідношеннями Коші можна знайти складові деформації $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$, а потім, підставляючи їх у рівняння узагальненого закону Гука в зворотній формі, визначити шукані напруження $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$.

Зазначені три основні задачі є деякою мірою схематизацією реальних фізичних задач.

При розв'язанні задач теорії пружності зворотним методом, тобто задаючи напруження і з'ясувавши, при яких силах, що діють на поверхні, виходить вибрана система напружень, може виникнути питання, чи можливо при іншій системі напружень отримати такі ж сили на поверхні. Якщо це можливо, то розв'язок рівнянь теорії пружності виявиться багатозначним: заданим силам на поверхні відповідатимуть декілька систем напружень, і необхідно з'ясувати, які з цих систем мають місце насправді. У цьому випадку при зворотному або напівзворотному способі розв'язання не можна бути

упевненими у тому, що вибрана саме та система напружень, яка відповідає дійсності. Проте, якщо враховувати гіпотезу про природний стан тіла (не враховувати початкові напруження), а також закон незалежності дії сил, то можна легко довести, що розв'язок задач теорії пружності є однозначним і тому єдиним.

Що стосується способів математичного розв'язання загальної задачі теорії пружності, то тут можна назвати такі три основні способи.

Прямий спосіб, який полягає в безпосередньому інтегруванні рівнянь теорії пружності. Зворотний спосіб, згідно з яким задаються переміщеннями як функціями координат точки x, y, z і визначають на основі співвідношень Коші деформації, а за ними за допомогою зворотної форми закону Гука напруження. Знаючи напруження, за формулами встановлюють поверхневі умови, тобто ті зовнішні навантаження, які відповідають заданим переміщенням. Напівзворотний спосіб Сен - Венана, згідно з яким задаються частиною зовнішніх сил і частиною переміщень, а решту чинників визначають з умови задоволення відповідних рівнянь повної групи теорії. Для полегшення техніки розв'язання деяких рівнянь теорії пружності використовують спосіб послідовних наближень. Одним з ефективних різновидів такого способу є використання в деяких задачах спочатку тих розв'язків, які одержані яким - небудь елементарним розв'язком, наприклад, знайденим в курсі опору матеріалів. Підстановка цих розв'язків у рівняння теорії пружності приводить до деяких невідповідностей (суперечностям), аналіз яких дозволяє визначити шлях коректування попереднього розв'язку, який може і не дає у результаті точного розв'язку задачі, але може привести до задовільного для практики розв'язку (більш строгому, ніж початковий елементарний розв'язок). Зазначений спосіб послідовних наближень можна застосовувати і в методі сил, і в методі переміщень, і у разі прямого або зворотного методу розв'язання початкових рівнянь.

1.2 В'язкопружні деформації матеріалів

Повернемося до в'язкопружних деформацій матеріалу. Така властивість матеріалу як в'язкопружність у загальному випадку характеризується двома процесами – повзучістю та релаксацією напружень. Повзучість – це процес зміни деформацій у часі при сталому навантаженню, релаксація напружень – це процес зміни (як правило зменшення напружень) при сталій деформації.

Для матеріалів, що мають затухаючу пам'ять, рівняння в'язкопружності базуються на визначальних рівняннях спадкового типу, в яких зв'язок між компонентами тензора напружень і тензора деформацій в довільний момент часу задається безперервним функціоналом.

Першими роботами, що сприяли початку розвитку лінійної теорії в'язкопружності, є праці Максвелла і Фойгта, в яких були представлені моделі в'язкопружних середовищ. Дещо пізніше в класичних роботах Больцмана і Вольтерра був сформульований один з основних принципів лінійної теорії в'язкопружності – принцип суперпозиції, що полягає в тому, що усі дії на тіло незалежні і адитивні, а її реакція на ці дії лінійна.

Теорія лінійної в'язкопружності, запропонована Л. Больцманом і В. Вольтерра, далі була розвинена Ю.М. Работновим [13].

Зазвичай рівняння стану для матеріалів спадкового типу представляються у вигляді диференціальних залежностей або інтегральних рівнянь. Розглянемо деякі з них.

1.3 Інтегральні співвідношення теорії в'язкопружності

Для опису процесів деформації в'язкопружних тіл використовується пружно-спадкова теорія, в основі якої лежить суперпозиції Больцмана.

Математичні моделі в'язкопружних тіл можуть бути прийняті або в диференціальній або інтегральній формі.

Основне рівняння стану в'язкопружного тіла в інтегральній формі представимо на основі закону Гука

$$\tilde{\sigma}^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl},$$

де C^{ijkl} – інтегральний оператор тензора пружних постійних

$$\tilde{C}^{ijkl} \varphi = C^{ijkl} \left[\varphi(t) - \int_{-\infty}^t K(t - \tau) \varphi(\tau) d\tau \right].$$

Зв'язок між компонентами тензора деформацій і напружень має часовий характер і представляється інтегральним рівнянням Вольтерра II роду

$$\tilde{\sigma}^{ij}(t) = C^{ijkl} \left[\varepsilon_{kl}(t) - \int_{-\infty}^t K(t - \tau) \varphi(\tau) d\tau \right], \quad (1.7)$$

де $K(t - \tau)$ – ядро релаксації.

Розв'язання рівняння (1.7) представляється у вигляді

$$\varepsilon_{kl}(t) = \frac{1}{C^{ijkl}} \left[\sigma^{ij}(t) + \int_{-\infty}^t R(t - \tau) \sigma^{ij}(\tau) d\tau \right], \quad (1.8)$$

де $R(t - \tau)$ – ядро повзучості (резольвента ядра $K(t - \tau)$).

Зв'язок між ядрами релаксації і повзучості наступний:

$$R(t) - K(t) = \int_{-\infty}^t K(t - \tau) R(\tau) d\tau.$$

Розглядаються різницеві ядра, залежні від різниці аргументів $t - \tau$, що задовольняють затухаючій пам'яті, що означає на прикладі закону спадкової пружності наступне: деформація тіла залежить не лише від сили, що діє в даний момент часу, але і від усіх попередніх сил, вплив яких тим менше, чим більше часу пройшло з моменту їх застосування (при цьому застосуємо принцип суперпозиції). Якщо за початок відліку часу береться момент прикладання навантаження, то нижня межа в інтегралах (1.7)–(1.8) може бути прийнятий рівним нулю.

Для конкретного випадку зв'язку тензорів напружень та деформацій у разі лінійного і нелінійного в'язкопружного тіла пружні константи замінюються інтегральними операторами Вольтерра [7, 8]. Наприклад, для узагальненого закону Гуку

$$\tilde{\sigma}^{ij}(t) = 2\tilde{\mu} \left(g^{ki} g^j \varepsilon_{kl} + \frac{1}{3} \theta g^{ij} \right) + \tilde{B} \theta g^{ij},$$

де $\tilde{\mu}$ і \tilde{B} – інтегральні оператори виду

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}\varphi &= \mu \left[\varphi(t) - \int_0^t R_\mu(t - \tau) \varphi(\tau) \partial\tau \right], \\ \tilde{B}\psi &= B \left[\psi(t) - \int_0^t R_B(t - \tau) \psi(\tau) \partial\tau \right]. \end{aligned}$$

У останніх виразах величини $R_\mu(t - \tau)$ і $R_B(t - \tau)$ є ядрами сдвигової і об'ємної релаксації.

Як ядра релаксації використовуються зазвичай різницеві ядра, для яких відомі значення реологічних параметрів для різних класів матеріалів.

1.4 Різницеві ядра у інтегральних рівняннях в'язкопружності

Узагальнюючи вищезазначене зв'язок між напруженнями та деформаціями встановлюється за допомогою інтегральних рівнянь стану. Базуючись на принципі суперпозиції Л. Больцмана, інтегральні рівняння стану в лінійній постановці можна описати за допомогою спадкової теорії Больцмана-Вольтерра у виді [20]

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= E \left[\varepsilon(t) - \int_{-\infty}^t K(t - \tau) \varepsilon(\tau) d\tau \right], \\ \varepsilon(t) &= \frac{1}{E} \left[\sigma(t) + \int_{-\infty}^t R(t - \tau) \sigma(\tau) d\tau \right],\end{aligned}$$

де зв'язок між ядрами релаксації і повзучості представляється таким чином:

$$-K(\tau) + R(\tau) = \lambda \int_0^{\tau} K(\tau - s) R(s) ds, \lambda = const.$$

При цьому якщо $K(\tau - s)$ – є ядро оператора K^* Вольтерра

$$K^* \bullet\bullet = \int_{-\infty}^{\tau} K(t, \tau) \bullet\bullet(\tau) d\tau,$$

де точками позначена функція, на яку впливає оператор Вольтера, те ядро $R(t - \tau)$ називається резольвентою ядра $K(t - \tau)$, і навпаки.

В процесі розвитку спадкової теорії пружності були запропоновані різні види ядер, що характеризують спадкові властивості матеріалу. Больцманом запропоновано ядро у виді

$$K(t - \tau) = \frac{C}{t - \tau}, \quad (1.9)$$

де C – постійна матеріалу.

Резольвента цього ядра знаходиться без утруднень, але воно не може бути застосовне для опису стійких процесів деформації, оскільки за певних умов зображення Лапласа такої функції звертається в нескінченність [14]. Це означає, що при постійній напрузі ядро дає логарифмічний закон зміни деформації в часі, проте у момент додатка навантаження ядро призводить до нескінченно великих значень деформацій [11].

З метою поліпшення рішень були запропоновані модифікації ядра (1.9):

$$K(t - \tau) = \frac{A}{(t - \tau)^{1-\alpha}}, \quad (0 < \alpha < 1), \quad (1.10)$$

$$K(t - \tau) = \frac{C}{(t - \tau)^\alpha}, \quad (0 < \alpha < 1). \quad (1.11)$$

Проте, ядро (1.10) виявилось мале придатним для використання, оскільки воно мало враховує процес деформування [6], тоді як ядро (1.11), будучи резольвентою по відношенню до ядра А.Р. Ржаніцина [15]

$$R(t - \tau) = e^{-\beta(t-\tau)}(t - \tau)^\alpha, \quad (-1 < \alpha < 0) \quad (1.12)$$

дозволяє значно поліпшити результати. Ядро Ржаніцина (1.12) широко застосовується в розрахунках багатьох видів матеріалів[1].

Найпростіше із слабосингулярних ядер – ядро Абеля

$$R(t - \tau) = \frac{(t - \tau)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}, \quad (-1 < \alpha < 0), \quad (1.13)$$

де Γ – гамма-функція.

Це ядро використовується при розрахунку непружних властивостей полімерів.

Для опису стійких процесів деформування А.П.Бронский [16] запропонував наступне ядро:

$$K(\tau) = \frac{\alpha \lambda' e^{-\tau^\alpha}}{\tau^{1-\alpha}}, (0 < \alpha < 1, 0 < \lambda' < 1). \quad (1.14)$$

Для деяких матеріалів використовувалися ядра у вигляді експоненти [15]

$$K(t - \tau) = e^{-\lambda(t-\tau)} \quad (1.15)$$

чи суми цілих експонент [2, 9, 14]

$$K(t - \tau) = \sum_{i=0}^n \alpha_i e^{-\lambda_i(t-\tau)}. \quad (1.16)$$

З експонентою (1.15) інтегральні рівняння для стандартної моделі реології, що складається з двох пружин і в'язкого демпфера, мають вигляд

$$\sigma(t) = E \left[\varepsilon(t) - \chi \int_{-\infty}^t e^{-(\beta, T-\tau)} \varepsilon(\tau) d\tau \right],$$

де χ і β – параметри, що мають конкретний фізичний зміст.

З метою дослідження певних видів полімерів використовувалися ядро Г.Л. Слонимського

$$K(t) = \frac{\alpha \lambda' \gamma e^{-\gamma t^\alpha}}{t^{1-\alpha}}, (\alpha < 1), \quad (1.17)$$

де λ' , γ постійні матеріалу, і ядро Дюффінга

$$K(t) = \frac{A(1 - \lambda)}{t^\lambda}, \quad (1.18)$$

постійні A і λ якого визначені в [1].

Опис в'язкопружних властивостей матеріалів за допомогою моделей (1.15), ядер Г.Л. Слонимського і Дюффінга не завжди якісно описує реологічні процеси, тому запропоновано більш складні моделі, що базуються на ядрах релаксації або повзучості виду (1.16).

В'язкопружні властивості широкого класу матеріалів описані за допомогою ядра М.А. Колтунова [6]

$$K(t - \tau) = A e^{-\beta(t-\tau)} \quad (1.19)$$

з резольвентою

$$R(t - \tau) = \frac{e^{-\beta(t-\tau)}}{t - \tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[A\Gamma(a)]^n}{\Gamma(an)} (t - \tau)^{an}. \quad (1.20)$$

Найбільше поширення при розрахунку широкого класу матеріалів отримало ядро релаксації на основі Е-функції Ю.М. Работнова [12]

$$K(t - \tau) = \lambda \mathfrak{E}_\lambda(-\beta - \lambda, t - \tau) = \lambda(t - \tau)^\alpha \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta - \lambda)^n (t - \tau)^{n(1+\alpha)}}{\Gamma(n+1)(\alpha+1)}, \quad (1.21)$$

де $-1 < \alpha < 0$; $\beta > 0$; $\lambda > 0$; α, β, λ – постійні матеріалу.

Якщо Е-функція Ю.М. Работнова приймається у виді

$$\mathfrak{E}_\alpha(\beta, t) = t^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n t^{n(1+\alpha)}}{\Gamma[(n+1)(1+\alpha)]}, 1 + \alpha > 0, \quad (1.22)$$

то резольвентою ядра (1.21) являється ядро Абеля

$$R(\tau) = \frac{(t - \tau)^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)}. \quad (1.23)$$

Ядро Ю.М. Работнова широко використовується для розрахунку широкого класу матеріалів [4, 10, 13].

1.5 Диференціальні моделі в'язкопружності

У лінійній теорії в'язкопружності реакція матеріалу на силову дію – комбінація лінійно-пружної і лінійно-в'язкої поведінки. Якщо обмежитися одновимірним випадком, то в пружній стадії справедливий закон Гука

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (1.24)$$

у в'язкій – закон Ньютона

$$\sigma = \eta \frac{d\varepsilon}{dt}, \quad (1.25)$$

де η – коефіцієнт в'язкості; $\frac{d\varepsilon}{dt}$ – швидкість деформації; E – модуль пружності.

Простими диференціальними залежностями для простих моделей в'язкопружності є модель Максвелла, що представляє послідовне з'єднання пружного і в'язкого елементів

$$\dot{\sigma} + \frac{E}{\eta}\sigma = E\varepsilon, \quad (1.26)$$

і модель Фойгта, що представляє їх паралельне з'єднання

$$\sigma = \eta\dot{\varepsilon} + E\varepsilon. \quad (1.27)$$

Тут точка вказує похідну за часом.

Для опису в'язкопружності найбільш адекватною була модель Фойгта. Модель Максвелла використовувалася для опису поведінки матеріалів, а також процесу релаксації, деформації яких відбуваються з постійною швидкістю [11]. Якісніше описують поведінку в'язкопружних тіл складніші моделі – комбінація пружних і в'язких елементів [5].

Ускладнюючи структури моделей, можна отримати хороший тимчасовий зв'язок між напруженням і деформаціями. При цьому в граничному випадку можна розглядати моделі з нескінченною безліччю пружних і в'язких елементів, що підвищує порядок диференціальних операторів. У загальному вигляді таке диференціальне рівняння представляється у формі [3]

$$\sum_{n=0}^M A_n \frac{d^n \sigma}{dt^n} = \sum_{n=0}^N B_n \frac{d^n \varepsilon}{dt^n}, \quad (1.28)$$

де A_n і B_n – параметри моделі (постійні матеріалу).

Диференціальне рівняння (1.28) називають лінійним диференціальним або операторним рівнянням. З цього виходить незалежність функцій релаксації і повзучості від напружень і деформацій, що задаються. Крім того, це рівняння реології стану середовища з довільним числом дискретно розподілених часів релаксації у багатьох випадках найзручніше для використання.

Інваріантність в часі (1.28) визначається тим, що коефіцієнти де A_n і B_n – постійні величини. При розрахунку матеріалів, властивості яких з часом значно змінюються, необхідно коефіцієнти в (1.28) представляти у вигляді функцій, залежних від часу :

$$A_n = A_n(t), B_n = B_n(t).$$

Моделі з нескінченно великим числом пружних і в'язких елементів мають громіздкий математичний опис, що ускладнює їх застосування при розв'язанні практичних задач. Загальні диференціальні рівняння стану (1.28) можуть бути використані для широкого класу матеріалів.

Використання диференціальних залежностей для складніших моделей стримується також відсутністю відомостей про значення параметрів рівняння і їх великої кількості.

Інтегральні залежності як загальніші дозволяють враховувати усі особливості процесу деформації, у тому числі і експериментальний факт $\frac{d\varepsilon(t)}{dt} \rightarrow 0$ при $t = 0$. Використання різницевих ядер $K(t - \tau)$, на відміну від ядер $K(t)$, дозволяє описувати поведінку матеріалів, властивості яких не змінюються з часом, що відповідає диференціальним рівнянням (1.28), в яких коефіцієнти прийняті постійними (відсутній чинник старіння).

Однак порівнюючи залежності для законів стану в'язкопружних матеріалів витікає, що з точки зору простоти краще застосовувати диференціальні залежності, які, проте, ефективні лише при описі процесів, що повільно змінюються.

2 ВИЗНАЧАЛЬНІ СПІВВІДНОШЕННЯ ЛІНІЙНОЇ В'ЯЗКОПРУЖНОСТІ. ОСНОВНІ РЕОЛОГІЧНІ МОДЕЛІ

2.1 Основні відомості про реологічні моделі

Реологія – розділ фізики, який вивчає деформування і текучість матеріалів. У теоретичній частині ця наука має справу з реологічними моделями, які описують властивості суцільних середовищ. При цьому, у більшості випадків при складанні моделі припускається, що механічні властивості досліджуваного середовища можна з достатньою точністю описати на основі комбінації трьох основних властивостей: пружності, пластичності і в'язкості. Будемо вважати, що: пружність описується лінійним тілом

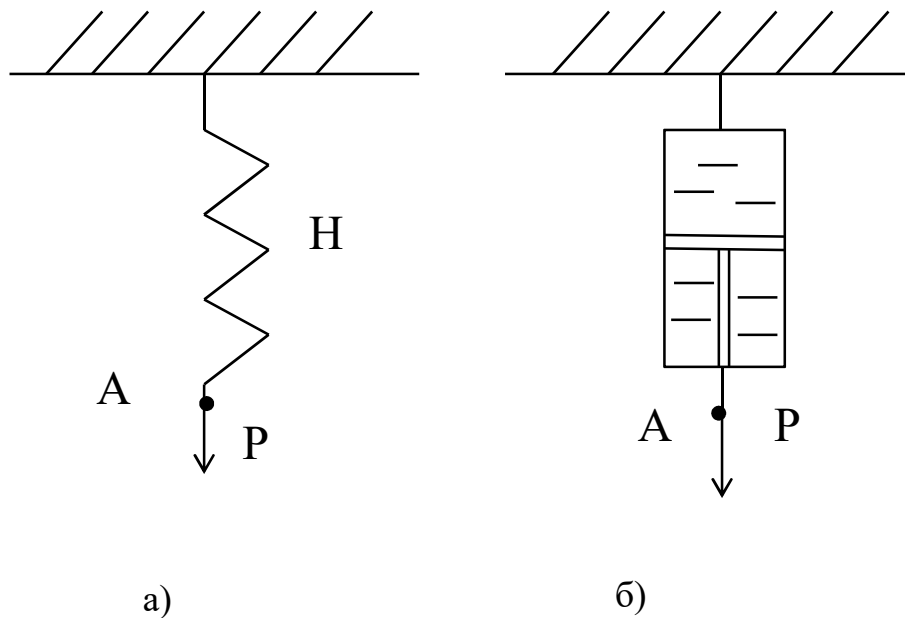


Рисунок 2.1 – Елементи реологічної моделі: а) тіло Гука; б) елемент Ньютона

Гука з залежністю $\sigma = E \cdot \varepsilon$ (рисунок 2.1а)), в'язкість описується лінійною в'язкістю Ньютона (рух поршня у в'язкій рідині) $\sigma = E \cdot \dot{\varepsilon}$ (рисунок 2.1б)), а

пластичність – ідеально жорстко-пластичною схемою Сен - Венана (рисунок 2.2)

Поведінка ідеального жорстко-пластичного тіла описується рухом бруска на шорсткій поверхні, якщо $P < Q_k$, то брусок не рухається, як тільки $P = Q_k$, то брусок рухається без прикладання додаткових зусиль. Діаграми (η, ε) , $(\eta, \dot{\varepsilon})$ подано відповідно на рисунку 2.3.

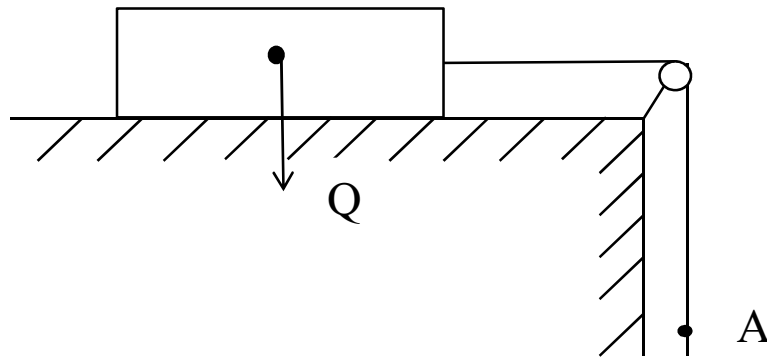


Рисунок 2.2 – Пластичний елемент Сан – Венана

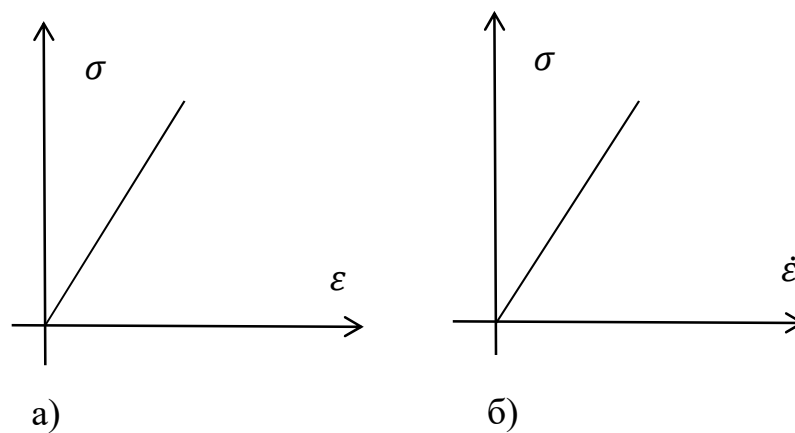


Рисунок 2.3 – Діаграми: а) гуківського елемента; б) ньютонівського елемента

На рисунку 2.4 наведено схеми двохелементних реологічних тіл Максвелла та Фойгта відповідно.

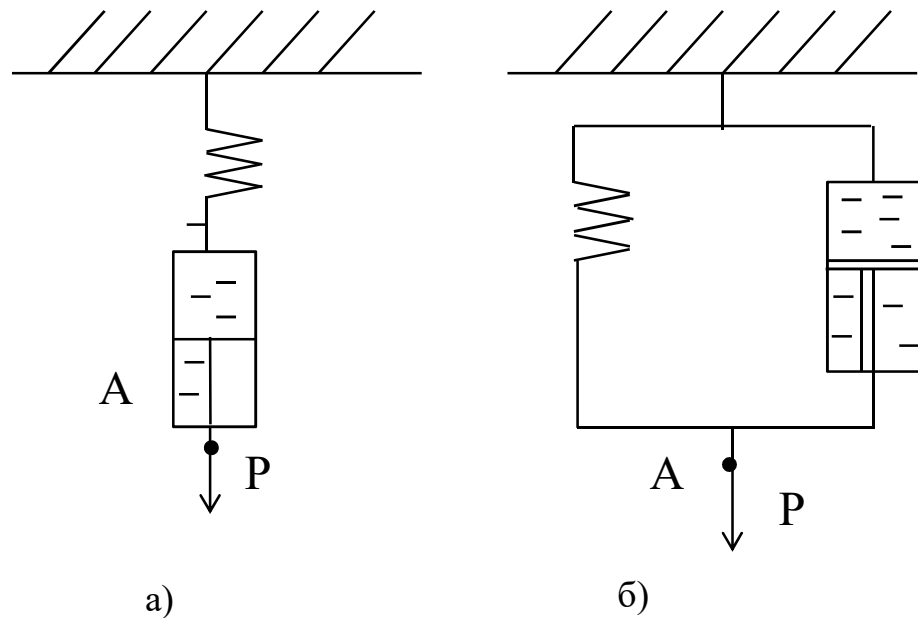


Рисунок 2.4 – Реологічні тіла: а) Максвелла; б) Фойгта

Співвідношення, які пов'язують напруження та деформації чи їх швидкості, називають реологічними рівняннями. По суті це узагальнення закону Гука для середовищ з більш складними властивостями. Розглянемо реологічні рівняння для цих схем.

2.2 Реологічне тіло Максвелла

Реологічне тіло Максвелла являє собою послідовне з'єднання тіл Гука і Ньютона. При послідовному з'єднанні напруження в точці A такі ж, як і в кожному з елементів: $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$, деформація ж в точці A дорівнює сумі деформацій у кожному з елементів: $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Використовуючи залежності $\sigma_1 = E \cdot \varepsilon_1$ та $\sigma_2 = \eta \cdot \dot{\varepsilon}_2$

і вважаючи, що параметри E, η — незмінні в часі, отримаємо:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon} &= \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2, \\ \varepsilon(\dot{t}) &= \frac{\sigma(\dot{t})}{E} + \frac{\sigma(t)}{\eta},\end{aligned}\quad (2.1)$$

тоді

$$\frac{d\sigma}{dt} = E \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{\sigma E}{\eta}. \quad (2.2)$$

Співвідношення (2.1) і є реологічним рівнянням тіла Максвелла у диференційній формі. Інтегруючи (2.2) відносно $\varepsilon(t)$, та вважаючи, що у початковий момент часу тіло Максвелла перебуває у природному стані (у тілі відсутні напруження і початкові деформації) $\sigma(0) = 0, \varepsilon(0) = 0$, отримаємо:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \sigma(t) + \frac{1}{\eta} \int_0^t \sigma(\tau) d\tau. \quad (2.3)$$

Загальний інтеграл рівняння (2.1) (при наявності початкових напружень $\sigma(0) = \sigma_0$ та деформаціях $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$) відносно $\sigma(t)$ буде:

$$\sigma(t) = e^{\frac{E}{\eta t}} \left(\sigma_0 + E \int_0^t \dot{\varepsilon}(\tau) e^{\frac{E}{\eta} \tau} d\tau \right),$$

або

$$\sigma(t) - \sigma_0 = E \left(\varepsilon(t) - \varepsilon_0 - \frac{E}{\eta} \int_0^t \varepsilon(\tau) e^{\frac{E}{\eta}(t-\tau)} d\tau \right). \quad (2.4)$$

Проаналізуємо поведінку тіла Максвелла при різних способах навантаження, а саме:

- а) $\varepsilon = const$;
- б) $\sigma = const$;

в) $\sigma(t) = \sigma_0 \sin \omega t$ — чи гармонічний закон навантаження.

Розглянемо перший випадок $\varepsilon = const$. Тоді реологічне рівняння (2.1) набуде вигляду:

$$\dot{\sigma}(t) + \frac{E}{\eta} \sigma(t) = 0. \quad (2.5)$$

Інтегруючи це рівняння при початкових умовах $\sigma(0) = \sigma_0$, дістанемо:

$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{-\frac{E}{\eta} t}. \quad (2.6)$$

Графік залежності (2.4) та (2.6) наведено на Рис. 2.5. До часу t_0 тіло навантажувалось, а потім деформацію зафіксували. Бачимо, що з часом напруження у тілі Максвелла при фіксованій деформації зменшуються. Це явище називають релаксацією, а величину $\frac{\eta}{E} = \tau_{rel}$ — часом релаксації. Величина τ_{rel} відповідає часу, за який напруження зменшиться в e разів.

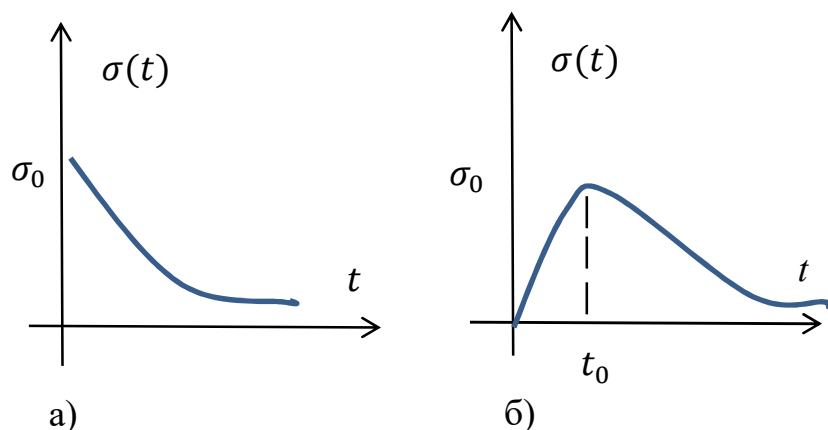


Рисунок 2.5 – а) зміна напружень в часі в тілі Максвелла; б) випадок постійних деформацій в тілі Максвелла

Покладаючи $\sigma = \sigma_0 = const$, отримаємо:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\sigma_0}{\eta},$$

або

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(0) + \frac{\sigma_0 t}{\eta}. \quad (2.7)$$

З співвідношення (2.7) випливає, що під дією сталого напруження тіло Максвелла поводить себе як Ньютонівська рідина. Покладемо у (2.4), що $t = 0$ відповідає миттєвому навантаженню, тоді отримаємо: $\sigma(t) = E \cdot \varepsilon(t)$, тобто при такому навантаженні тіло Максвелла поводить себе як чисто пружне тіло. Розглянемо тепер гармонічне навантаження, тобто $\sigma(t) = \sigma_0 \sin \omega t$, підставляючи даний вираз у (2.1) та інтегруючи, знаходимо:

$$\varepsilon(t) = -\frac{\sigma_0}{\eta \omega} \cos \omega t + \frac{\sigma_0}{E} \sin \omega t. \quad (2.8)$$

Позначивши $\frac{\sigma_0}{\eta \omega} = \varepsilon_0 \sin \varphi$, $\frac{\sigma_0}{E} = \varepsilon_0 \cos \varphi$, отримаємо:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin(\omega t - \varphi),$$

де

$$\tan \varphi = \frac{E}{\eta \omega} = \frac{1}{\omega \frac{\eta}{E}} = \frac{1}{\omega \tau_{rel}}. \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 &= \sqrt{\frac{\sigma_0^2}{\eta^2 \omega^2} + \frac{\sigma_0^2}{E^2}} = \frac{\sigma_0}{\eta E \omega} \sqrt{E^2 + \eta^2 \omega^2} = \\ &= \frac{\sigma_0}{\omega \eta} \sqrt{1 + \omega^2 \tau_{rel}^2}.\end{aligned}\quad (2.10)$$

Проаналізуємо зміну фази φ і амплітуди ε_0 в залежності від ω . При $\omega \rightarrow 0$ $\operatorname{tg} \varphi \rightarrow 0$, отже $\varphi \rightarrow 90^\circ$, тобто деформації відстають по фазі від напружень на 90° , тобто $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos \omega t$. Визначимо ε_0 при $\omega \rightarrow 0$: $\varepsilon_0 \rightarrow \infty$. Тобто при $\omega \rightarrow 0$ амплітуда наростає.

2.3 Модель тіла Кельвіна (тіло Фойгта)

Ця модель запропонована Кельвіном у 1875 році, Фойгт у 1880 - 1892 рр. використовував таку схему для дослідження поведінки однофазних середовищ. Схема реологічного тіла Фойгта – $\sigma_2 = \eta \dot{\varepsilon}_2$ паралельне з'єднання пружного тіла Гука $\sigma_1 = E \cdot \varepsilon_1$ та в'язкого тіла Ньютона $\sigma_2 = \eta \dot{\varepsilon}_2$. При паралельному з'єднанні деформація в точці A $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$, а напруження дорівнюють сумі напружень в елементах: $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$. Отже, додаючи вирази для σ_1 та σ_2 , отримаємо:

$$\sigma = \varepsilon - \eta \dot{\varepsilon} \quad (2.11)$$

Розв'язком цього рівняння відносно $\varepsilon(t)$ при початкових умовах $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$ дається формулами М. Остроградського:

$$\varepsilon(t) = e^{\frac{E}{\eta}t} \left(\varepsilon_0 + \frac{1}{2\eta} \int_0^t \sigma(\tau) e^{\frac{E}{\eta}\tau} d\tau \right). \quad (2.12)$$

Дослідимо поведінку тіла Фойгта у трьох випадках:

- а) $\varepsilon = \text{const}$;
- б) $\sigma = \text{const}$;
- в) $\sigma(t) = \sigma_0 \sin \omega t$ — чи гармонічний закон навантаження.

Розглянемо спочатку випадок $\varepsilon = \text{const}$, тоді $\varepsilon = 0$ і з (2.11) маємо

$$\sigma(t) = E \cdot \varepsilon.$$

Отже, у цьому випадку тіло Фогта поводитья як пружне тіло Гука. Аналогічний результат варто чекати, коли деформації дуже повільно змінюються у часі, тобто $\varepsilon \rightarrow 0$. Таким чином, у тілі Фогта явище релаксації відсутнє.

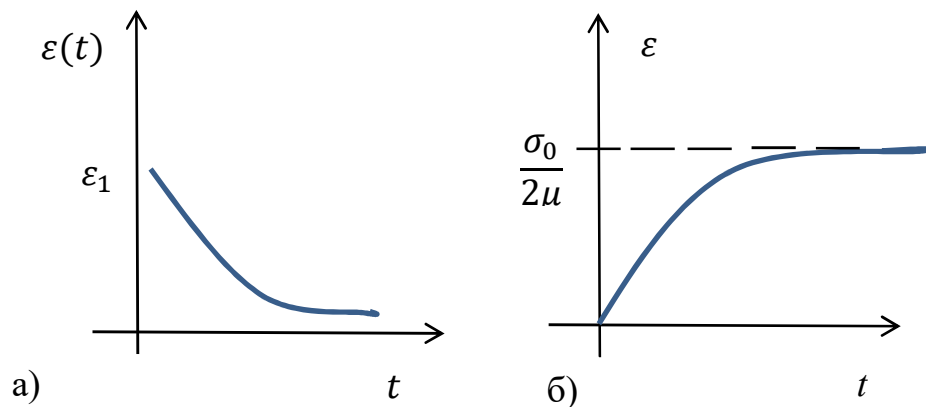


Рисунок 2.6 – Зміна деформацій в тілі Фойгта: а) при знятті навантаження;
б) при постійних напруженнях

Розглянемо випадок , тоді інтегруючи (2.11) при $\sigma = \sigma_0$ отримаємо:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left(1 - e^{-\frac{E}{\eta}t} \right). \quad (2.13)$$

Графік такої залежності дано на рис.2.6 . Як бачимо, при зростанні t деформація в тілі Фойгта ($\sigma = \sigma_0$) зростає від нуля до свого рівноважного значення $\frac{\sigma_0}{E}$. Отже, при повільних тривалих навантаженнях тіло Фойгта поводить себе як пружне тіло Гука. Визначимо величину швидкості деформацій при постійному навантаженні:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\sigma_0}{E} e^{-\frac{E}{\eta}t}. \quad (2.14)$$

При $t \rightarrow 0$ (час, за який відбувається деформація – достатньо малий) $e^{-\frac{E}{\eta}t} \rightarrow 1$ і маємо:

$$\sigma_0 = \eta \cdot \dot{\varepsilon}. \quad (2.15)$$

Отже, при миттєвому деформуванні тіло Фойгта поводить себе як в'язка Ньютонівська рідина. Розглянемо явище запізнення деформації, яке виникає у тілі Фогта. Для цього навантажимо тіло Фойгта сталим навантаженням σ_0 в момент часу $t = t_1$ знімемо навантаження та дослідимо зміну деформації:

$$\dot{\varepsilon}(t_1) = \frac{\sigma_0}{E} \left(1 - e^{-\frac{E}{\eta}t_1} \right). \quad (2.16)$$

Деформації $\varepsilon(t_1)$ є початковими для подальшого процесу розвантаження тіла. Загальний розв'язок (2.11) при $\sigma = 0$ буде:

$$\varepsilon(t) = C e^{\frac{E}{\eta} t}, t \geq t_1. \quad (2.17)$$

Визначаючи C з початкової умови $\varepsilon(t) = \varepsilon_1 e^{\frac{E}{\eta} t_1}$, знаходимо:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_1 e^{\frac{E}{\eta}(t-t_1)}. \quad (2.18)$$

Тут $\varepsilon_1 = \varepsilon(t_1)$ і задається формулами (2.16) Виберемо $t = t_1$ за початок відліку, тоді з (2.18) отримаємо:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_1 e^{\frac{E}{\eta} \acute{t}}.$$

Тут $\acute{t} = t - t_1$.

З формули (2.18) випливає, що деформації після зняття навантаження зменшуються за експоненційним законом. Причому навантаження вже зняли, а деформації зникають з деякою затримкою у часі.. Час, за який деформації зменшуються у e разів називають часом запізнення і позначають

$$\tau_{ret} = \frac{\eta}{E}. \quad (2.19)$$

(*ret* – скорочення від слова retardation - запізнення).

Розглянемо ще випадок гармонічного навантаження. Рівняння (2.10) при $\sigma = \sigma_0 \sin \omega t$ запишеться:

$$\dot{\varepsilon} + \frac{E}{\eta} \varepsilon = \frac{\sigma_0}{\eta} \sin \omega t. \quad (2.20)$$

Розв'язок рівняння (2.20) шукаємо у вигляді:

$$\varepsilon(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t. \quad (2.21)$$

Підставляючи (2.21) у (2.20) і дорівнюючи коефіцієнти при $\sin \omega t$ і $\cos \omega t$ у лівій і правій частині рівнянь отримаємо систему рівнянь для визначення сталих A і B :

$$\begin{cases} A\omega + \frac{E}{\eta}B = 0, \\ \frac{E}{\eta}A - B\omega = \frac{\sigma_0}{\eta}. \end{cases} \quad (2.22)$$

Розв'язки (2.22) мають вигляд:

$$A = \frac{\sigma_0 E}{(E^2 + \eta^2 \omega^2)}, B = -\frac{\sigma_0 \omega \eta}{(E^2 + \eta^2 \omega^2)}. \quad (2.23)$$

або

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{\sqrt{E^2 + \eta^2 \omega^2}}, \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega \eta}{E}, \operatorname{tg} \varphi > 0. \quad (2.24)$$

отримаємо:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin(\omega t - \varphi). \quad (2.25)$$

Проаналізуємо зміну амплітуди ε_0 і фази φ в залежності від ω . Амплітуда ε_0 при малих (щезаючих) частотах прямує до значення $\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}$, а фаза при цих же частотах – до нуля. Отже, при малих частотах маємо залежність: $\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \sin \omega t$, тобто тіло Фогта працює як пружне тіло Гука. При

прямуванні ω до нескінченності (низькочастотні коливання) ε_0 прямує до нуля, а $\varphi \rightarrow 90^\circ$. Отже, при низькочастотному коливанні амплітуда прямує до нуля, а деформації відстають від напружень по фазі на 90° :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -\varepsilon_0 \cos \omega t.$$

3 ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ СПІВВІДНОШЕНЬ ДО МОДЕЛЮВАННЯ В'ЯЗКОПРУЖНИХ ПРОЦЕСІВ НЕОДНОРІДНИХ ТІЛ

Розглядаємо досить розповсюджений неоднорідний матеріал, такий як односпрямований волокнистий композит, що складається із волокон, які, як правило мають циліндричну форму круглого перетину та матеріалу матриці, що оточує і зв'язує волокна у єдине тіло. Існує достатньо схем розташування волокон в односпрямованих композиційних матеріалах, зокрема, одними із найпоширеніших є гексагональна та квадратна укладка волокон (рис. 3.1).

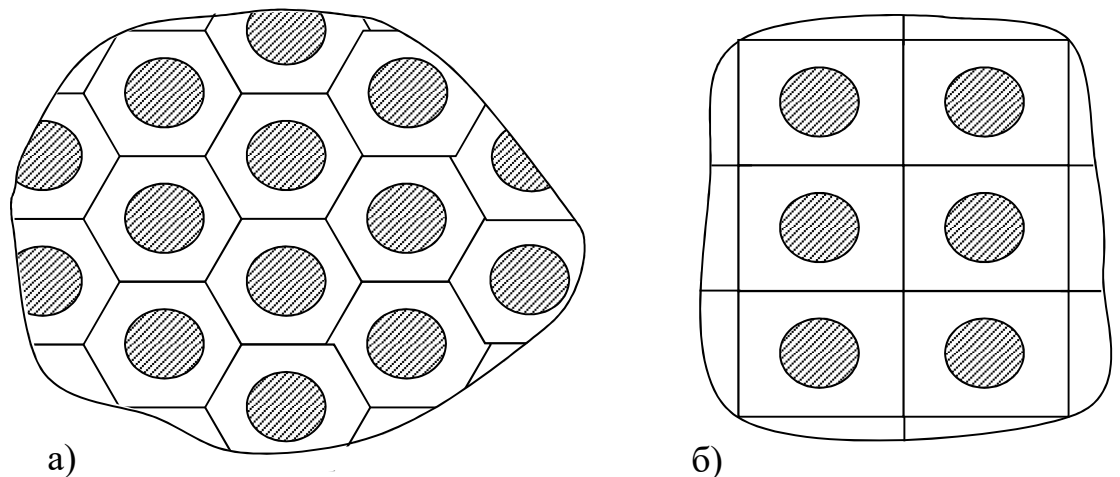


Рисунок 3.1 – Схеми укладки волокон: а) гексагональна; б) квадратна

При розв'язанні задач механіки для реальних конструкцій дуже складно врахувати властивості та розташування кожного волокна у математичній моделі композиту, тому зазвичай використовують методи гомогенізації, коли неоднорідний матеріал представляється однорідним з механічними властивостями, що залежать від механічних властивостей кожного із складових композиту. Застосуванню методів гомогенізації у просторовому випадку для в'язкопружних складових волокнистого композиту присвячено

роботи [17, 18, 19]. Отримані механічні характеристики гомогенізованого матеріалу називаються ефективними.

Розглянемо елементарну комірку волокнистого композиту, що представляється багатогранниками нескінченної довжини, які у перетині є або правильним шестикутником, або квадратом (рис.3.2).

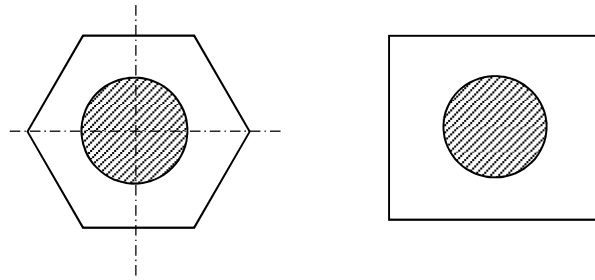


Рисунок 3.2 – Елементарна комірка

У цьому випадку об'ємний вміст волокон f в композиті дорівнює відношенню об'єму циліндричного волокна до об'єму усієї елементарної комірки, а враховуючи, що область, яку займає матриця в елементарній комірці, і область, яку займає волокно в елементарній комірці, мають однакову висоту, справедливе таке співвідношення:

$$f = \frac{hS_B}{hS} = \frac{S_B}{S}, \quad (3.1)$$

де h – висота комірки, S – площа перетину комірки, S_B – площа перетину волокна.

Вважатимемо, що матеріал матриці є в'язкопружним і описується моделлю Максвелла, рисунок 3.3 а), а матеріал волокна є пружним і підкорюється закону Гука рисунок 3.3 б). В цьому випадку символ $^{\circ}$ означає величини, що відносяться до волокна, а символом $*$ – величини, що відносяться до матриці.

Тоді згідно (2.6) улюбій точці матеріалу матриці для осьового деформування будемо мати:

$$\sigma^* = \sigma_0^* e^{-\frac{E^*}{\eta^*} t}, \quad (3.2)$$

$$\varepsilon^* = \frac{\sigma_0^* t}{\eta^*} + \frac{\sigma_0^*}{E^*}. \quad (3.3)$$

Матеріал волокна улюбій точці площини S_B буде описуватися у осьовому напрямку таким співвідношенням:

$$\sigma_0^\circ = E^\circ \varepsilon^\circ. \quad (3.4)$$

Враховуючи, що при одноосьовому однорідному напружено-деформованому стані осьові деформації матриці та волокна співпадають доцільно з'єднати модель в'язкопружної матриці (3.2) - (3.3) та пружного волокна послідовно. У цьому випадку осьові деформації повинні співпадати, тобто:

$$\varepsilon^* = \varepsilon^\circ, \quad (3.5)$$

або

$$\frac{\sigma_0^* t}{\eta^*} + \frac{\sigma_0^*}{E^*} = \frac{\sigma_0^\circ(t)}{E^\circ}. \quad (3.6)$$

Тоді, для того щоб сумісна деформація для обох складових співпадала, між напруженнями повинно виконуватися таке співвідношення:

$$\sigma_0^\circ(t) = E^\circ \sigma_0^* \left(\frac{t}{\eta^*} + \frac{1}{E^*} \right) \quad (3.7)$$

Після гомогенізації композиційного матеріалу, будемо вважати, що деформування описується моделлю Максвела виду (2.6) рисунок 3.3 в), які справедливі улюбій точці площини S , але механічні сталі цієї моделі E та η поки що невідомі.

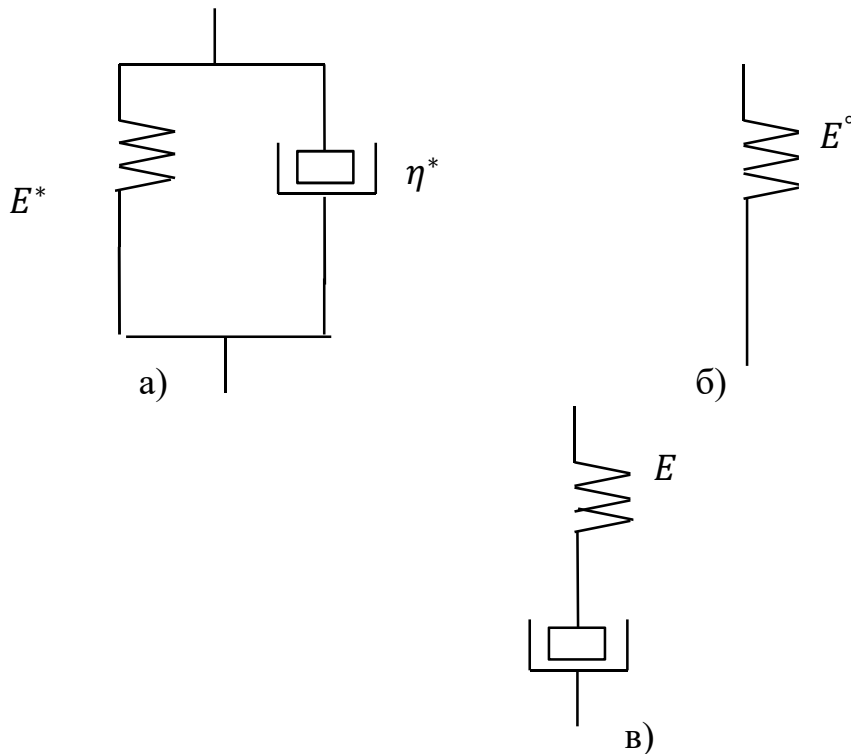


Рисунок 3.3 – Моделі сумісного деформування: а) матриці; б) волокна;
в) гомогенізованого композиту

Для того, щоб повздовжнє розтягнення у сумісній моделі «матриця-волокно» та однорідний композит було еквівалентним необхідно, щоб прикладене навантаження співпадало:

$$\sigma_0^*(1 - f) + \sigma_0^\circ f = \sigma_0, \quad (3.8)$$

а, враховуючи (3.7), маємо:

$$\sigma_0^*(1 - f) + E^\circ \sigma_0^* \left(\frac{t}{\eta^*} + \frac{1}{E^*} \right) f = \sigma_0. \quad (3.9)$$

Звідки можемо, знайти значення для напружень у матриці, і взявши до уваги співвідношення (3.1), будемо мати:

$$\sigma_0^* = \frac{\sigma_0}{\left(2(1 - f) + E^\circ \left(\frac{t}{\eta^*} + \frac{1}{E^*} \right) f \right)}. \quad (3.10)$$

Враховуючи, що гомогенізована модель повинна адекватно відображати процес сумісного деформування матриці та волокна, як умову узгодження використаємо рівність деформацій для обох моделей, тобто:

$$\varepsilon = \varepsilon^* = \varepsilon^\circ. \quad (3.11)$$

З урахування (3.10) співвідношення для деформацій першої моделі (3.3) буде мати вигляд

$$\varepsilon^* = \frac{\sigma_0^* t}{\eta^*} + \frac{\sigma_0^*}{E^*}. \quad (3.12)$$

Для гомогенізованої моделі будемо мати:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{\eta} t + \frac{\sigma}{E}. \quad (3.13)$$

Тоді умова (3.11) прийме вигляд:

$$\frac{\sigma_0}{\left((1-f) + E^\circ \left(\frac{t}{\eta^*} + \frac{1}{E^*} \right) f \right)} \left(\frac{t}{\eta^*} + \frac{1}{E^*} \right) = \sigma_0 \left(\frac{t}{\eta} + \frac{1}{E} \right), \quad (3.14)$$

в якій потрібно знайти невідомі механічні характеристики E та η для гомогенізованої моделі. Для їх знаходження скористаємося конкретними значення змінної часу t . Так, якщо $t = 0$, то (3.14) прийме вид:

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{E^* \left((1-f) + E^\circ \cdot \frac{1}{E^*} f \right)}, \quad (3.15)$$

тоді одна з ефективних характеристик гомогенізованого матеріалу буде така

$$E = E^*(1-f) + E^\circ f. \quad (3.16)$$

що повністю співпадає із формулою правила сумішей для волокнистого композиту, отриманої при інших припущеннях.

Щоб знайти η , у (3.15) підставимо (3.16), та прийемо $t = 1$:

$$\frac{\frac{1}{\eta^*} + \frac{1}{E^*}}{(1-f) + E^\circ \left(\frac{1}{\eta^*} + \frac{1}{E^*} \right) f} = \frac{1}{\eta} + \frac{1}{E^*(1-f) + E^\circ f}, \quad (3.17)$$

Спростимо праву та ліву частину останньої рівності, отримуємо другу ефективну характеристику гомогенізованого матеріалу:

$$\eta = \frac{(E^* \eta^* (1 - f) + E^\circ (E^* + \eta^*) f)(E^* (1 - f) + E^\circ f)}{(E^*)^2 (1 - f)}, \quad (3.18)$$

Тоді з урахуванням (3.16) та (3.18) для гомогенізованої моделі будемо мати:

$$\varepsilon = \sigma_0 \left(\frac{t(E^*)^2(1 - f) + E^* \eta^* (1 - f) + E^\circ (E^* + \eta^*) f}{(E^* (1 - f) + E^\circ f)(E^* \eta^* (1 - f) + E^\circ (E^* + \eta^*) f)} \right). \quad (3.19)$$

Скориставшись формулою (3.19), проведемо дослідження композиційного матеріалу з такими механічними характеристиками і вихідними даними: $E^* = 40$ МПа, $\eta^* = 8 \frac{\text{МПа}}{\text{с}}$, $E^\circ = 100$ МПа, $\sigma_0 = 2$ МПа. На рисунку 3.3 наведено залежності деформації в залежності від часу для різного вмісту волокна у композиті. Як можна зазначити найбільше ефекти повзучості проявляються на початку прикладання навантаження, а з плином часу прямують до деякої горизонтальної асимптоти. Збільшення об'ємного вмісту волокна, що не має в'язкопружних властивостей, зменшує прояв ефектів повзучості.

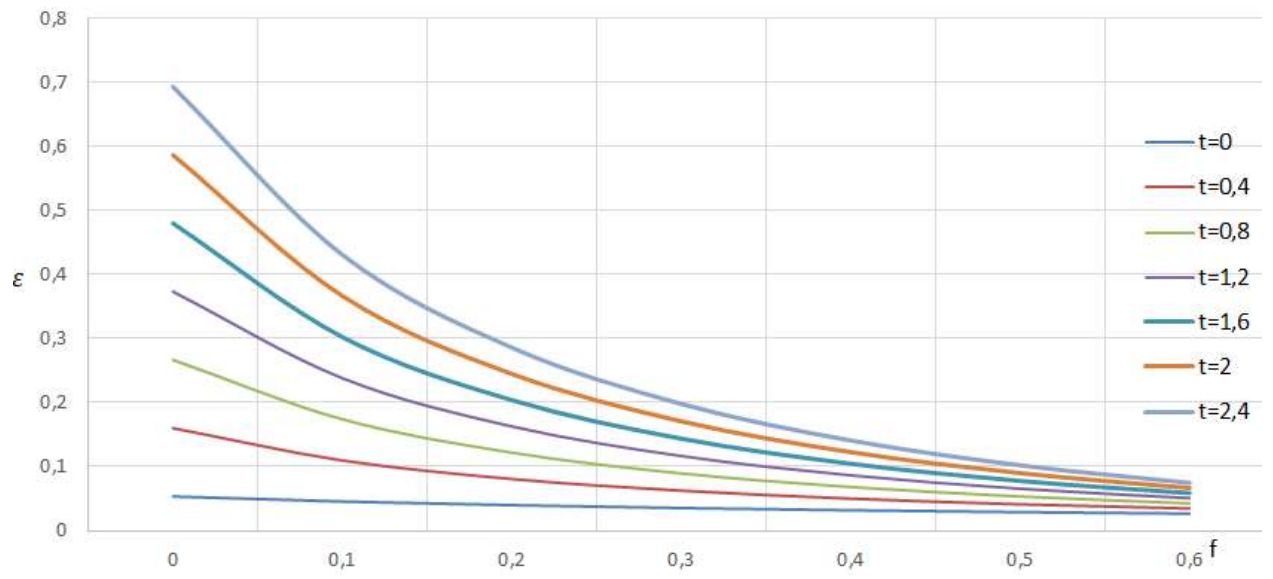


Рисунок 3.4 – Криві деформування композитного матеріалу

ВИСНОВКИ

В роботі описуються основні інтегральні та диференціальні моделі, за допомогою яких описуються в'язкопружні властивості матеріалів. Більш детально розглянуто диференціальні моделі Фойгта та Максвела, що базуються на законах Гука та Ньютона.

Створено диференціальну математичну модель односпрямованого волокнистого композиційного матеріалу, матриця якого має в'язкопружні, а волокно – пружні властивості. Припускалося, що матеріал матриці моделюється моделлю Фойгхта, а матеріал волокна підкорюється закону Гука. Композиційний матеріал представлено однорідним матеріалом, що описується моделлю Максвела. Механічні характеристики цієї моделі композиційного матеріалу знайдено із розв'язання двох аналогічних крайових задач: про сумісне деформування матриці і волокна та про деформування гомогенізованого композиційного матеріалу. В результаті отримано співвідношення для деформацій і напружень у обох моделях. Припускалась рівність деформацій у моделі сумісного деформування матриці та волокна та гомогенізованого композиту. З цієї рівності отримано ефективні механічні характеристики композиційного матеріалу – коефіцієнт в'язкості та модуль пружності.

Для конкретного виду волокнистого композиту використано отриману модель для вивчення процесів в'язкопружності при деформуванні. Помічено, що збільшення об'ємного вмісту волокна, яке має пружні властивості, зменшує прояв ефектів в'язкопружності.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Адамов А. А., Кузнецов Г. Б. К методике описания реологических процессов при конечных деформациях теории наследственности. Свердловск : Наука, 1977. 11 с.
2. Бленд Д. Р. Теория линейной вязкоупругости. Москва : Мир, 1965. 199 с.
3. Виноградов Г. В., Малкин А. Я. Реология полимеров. Москва : Химия, 1977. 438 с.
4. Божидарник В. В., Сулим Г. Т. Элементи теорії пружності. Львів : Світ, 1994. 560 с.
5. Божидарник В. В., Сулим Г. Т. Элементи теорії пластичності та міцності. Львів : Світ, 1999. 532 с.
6. Дымников С. И., Лавендел Э. Э., Павловскис А. А., Сниегс М. И. Прикладные методы расчета изделий из высокоэластичных материалов. Рига : Зинатне, 1980. 238 с.
7. Киричевский В. В., Сахаров А. С. Нелинейные задачи термомеханики конструкций из слабосжимаемых эластомеров. Киев : Будівельник, 1992. 215 с.
8. Колтунов М. А. К вопросу выбора ядер при решении задач с учетом ползучести и релаксации. *Механика полимеров*. 1966. № 4. С. 483–497.
9. Колтунов М. А., Трояновский И. Е. Постановка задачи геометрически нелинейной теории вязкоупругости. *Механика полимеров*. 1975. № 2. С. 234–240.
10. Колтунов М. А., Трояновский И. Е. Геометрически нелинейная задача теории вязкоупругости. *Механика эластомеров. Научн. труды Кубанского гос. ун-та*. 1977. Вып. 1, Т. 1. С. 36–46.
11. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. Москва : Мир, 1974. 338 с.

12. Локшин А. А., Суворова Ю. В. Математическая теория распространения волн в средах с памятью. Москва : Изд-во МГУ, 1982. 151 с.
13. Потураев В. Н., Дырда В. И., Круш И. И. Прикладная механика резины. Киев : Наук. думка, 1980. 260 с.
14. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. Москва : Наука, 1966. 572 с.
15. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. Москва : Наука, 1977. 384 с.
16. Ржаницын А. Р. Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени. Москва : Гостехиздат, 1949. 300 с.
17. Ржаницын А. Р. Теория ползучести. Москва : Стройиздат, 1968. 416 с.
18. Трояновский И. Е., Колтунов М. А. О методе разделения переменных решения смешанной краевой задачи вязкоупругости. *Механика полимеров*. 1969. № 4. С. 588–596.
19. Grebenyuk S., Klimenko M. Shear Modulus of a Fiber Composite with a Transtropic Viscoelastic Matrix and Transtropic Elastic Fiber. *Проблеми машинобудування*. 2018. № 3, Том 21. С. 47–53.
20. Grebenyuk S., Klymenko M., Titova O. Mechanical properties of the composite with viscoelastic isotropic matrix and transversally isotropic fiber under transverse tension. *21th International Scientific Conference Mechanika 2016*. Kaunas: Kaunas University of Tehnology. 2016. P. 94–97.
21. Grebenyuk S., Klymenko M., Titova O., Smoliankova T. Effective Characteristics of the Viscoelastic Fiber-reinforced Composite with Transversally Isotropic Components under Transverse Shear. *Proceedings of the 23rd international scientific conference Mechanika – 2018*. Kaunas: Kaunas University of Tehnology. 2018. P. 31–35.
22. Volterra V. Treory of functional and of integral and integro-disserehtial equations. London and Glasgow : Blackie and Son Ltd, 1931. 89 p.