МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра загальної математики

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА

на тему: **«ДОСЛІДЖЕННЯ ВЗАЄМОДІЇ РІЗНИХ МАТЕМАТИЧНИХ СТРУКТУР НА МНОЖИНІ»**

Виконала: студентка 2 курсу, групи 8.1118

спеціальності 111 математика

(шифр і назва спеціальності)

освітньої програми математика

О.А. Пилипенко

(ініціали та прізвище)

Керівник доцент кафедри загальної математики, доцент, к.ф.-м.н. Стєганцева П.Г.

(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Рецензент доцент кафедри фундаментальної математики, доцент, к.ф.-м.н. Панасенко Є.В.

(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Запоріжжя – 2020

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет математичний

Кафедра загальної математики

Рівень вищої освіти магістр

Спеціальність 111 математика

Освітня програма математика

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри загальної математики, доцент, к.ф.-м.н.

_____________ Зіновєєв І.В.
(підпис)

« 30 » 05 2019 р.

З А В Д А Н Н Я

НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТЦІ

Пилипенко Ользі Андріївні
(прізвище, ім’я та по-батькові)

1. Тема роботи Дослідження взаємодії різних математичних структур на множині

керівник роботи Стєганцева Поліна Георгіївна, к.ф.-м.н, доцент
(прізвище, ім’я та по-батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від « 29 » 05 2019 року № 811

2. Строк подання студентом роботи 26.12.2019

3. Вихідні дані до роботи 1. Постановка задачі.
2. Перелік літератури.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)
1. Опис та приклади математичних структур на різних множинах
2. Взаємодія структур на одній множині

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов’язкових креслень) ілюстрації до тексту роботи, графіки розрахунків

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання 30.05.2019

К А Л Е Н Д А Р Н И Й П Л А Н

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	25.02.2019	
2.	Збір вихідних даних.	08.03.2019	
3.	Обробка методичних та теоретичних	15.05.2019	
	джерел.		
4.	Розробка першого розділу.	01.07.2019	
5.	Розробка другого розділу.	15.09.2019	
6.	Оформлення та нормоконтроль	20.12.2019	
	кваліфікаційної роботи.		
7.	Захист кваліфікаційної роботи.	16.01.2020	

Студент ____________ О.А. Пилипенко
(підпис) (ініціали та прізвище)

Керівник роботи ____________ П.Г. Стєганцева
(підпис) (ініціали та прізвище)

Нормоконтроль пройдено

Нормоконтролер ____________ О.Г. Спиця
(підпис) (ініціали та прізвище)

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Дослідження взаємодії різних математичних структур на множині»: 50 с., 1 рис., 9 джерел.

АСИМЕТРИКА НА МНОЖИНІ, ВЕКТОРНИЙ ПРОСТІР, МЕТРИЗОВНІСТЬ ТОПОЛОГІЧНОГО ПРОСТОРУ, МЕТРИЧНА СТРУКУТУРА, ПРОСТІР РІССА, СТРУКТУРА ЧАСТКОВОГО ПОРЯДКУ, ТОПОЛОГІЧНА СТРУКТУРА.

Об'єкт дослідження – математичні структури, які взаємодіють між собою на множині.

Мета роботи: виявити особливості поєднання математичних структур на одній множині, дослідити взаємодію двох математичних структур – топологічної та метричної, топології та асиметрики, поєднання структур векторного простору та частково впорядкованої множини.

Метод дослідження – аналітичний.

Множини, на яких введено дві математичні структури, пов'язані між собою певним набором властивостей, доволі часто зустрічаються в різних математичних дисциплінах. Зокрема, в курсах топології та функціонального аналізу. Наприклад, поняття топологічної групи, нормованого простору тощо. У кваліфікаційній роботі розглянуто взаємодію топологічної та метричної структур, а саме клас метризовних топологічних просторів. Досліджено метризовні та неметризовні структури. У роботі також розглянуто поєднання топологічної структури та асиметрики на множині. Було розглянуто питання поєднання структур векторного простору та частково впорядкованої множини – простір Рісса. Результати можуть бути використані при вивченні топологічних та метричних структур в рамках дисциплін за вибором.

SUMMARY

Master's Qualification Thesis «The Study of the Mutual Effect of the Different Mathematical Structures on the Set»: 50 pages, 1 figure, 9 references.

ASYMMETRICS ON SETS, VECTOR SPACE, METRISIS OF A TOPOLOGICAL SPSCE, METRICAL STRUCTURE, SPACE OF RICE, PARTIAL ORDER STRUCTURE, TOPOLOGICAL STRUKTURE.

The object of the study is mathematical structures that interact on the set..

The aim of the study are to define the properties of combining mathematical structures on one set, to investigate the interaction of two mathematical structures - topological and metric, topology and asymmetrics, combination of structures of vector space and partially ordered set.

The method of the research is analytical.

The sets on which two mathematical structures are introduced, connected by a definite set of axioms, are quite often encountered in various mathematical disciplines. In particular, in the courses of topology and functional analysis. For example, the notion of a topological group, a normed space, and so on. Thera is interaction of topological and metric structures, namely the class of metrized topological spaces. It was investigated examples of metrization and non-metrization structures. There was the combination of topological structure and asymmetry in this work. The concept of the space of Rice is described as a combination of structures of a vector space and a partially ordered set. . The results can be used to study topological and metrical structures when reading special courses.

ЗМІСТ

ВСТУП

Питання взаємодії різних математиччних структур є актуальним та цікавим. Множини, на яких введено дві математичні структури, пов’язані між собою певним набором властивостей, доволі часто зустрічаються в різних математичних дисциплінах. Наприклад, якщо говорити про курс функціонального аналізу, то таке явище як поєднання двох структур зустрічається неодноразово, тобто йде мова про поняття топологічного векторного простору та, наприклад, нормованого простору. Є ще й інші приклади.

Топологія як наука, була сформована в трудах великого французького математика Анрі Пуанкаре в кінці 20 століття. Дослідженню якісних властивостей множин у просторах будь-якого числа вимірів у подальшому вилилось у поняття топологічного простору – фундаментального поняття, яке пронизує всю математику. У теперішній час топологія стала потужним інструментом математичного дослідження, а її мова має універсальне значення. Топологія знайшла ряд блискучих застосувань у найрізноманітніших задачах для опису якісних стійких властивостей різних математичних та фізичних об’єктів [1].

Множина всіх топологічних просторів містить важливий клас метричних просторів. Топологія метричного простору породжується його системою відкритих множин, тобто топологічна структура в метричних просторах є вторинною, яка породжується метрикою. У множині топологічних просторів можна виділити ще один клас – метризовних топологічних просторів. У кваліфікаційній роботі досліджуються поєднання метричної та топологічної, асиметричної та топологічної структур. Також досліджено поняття векторної гратки, яке пов’язує в собі дві математичні структури.

Теорію впорядкованих множин ввів Г. Кантор. У 1883 році він ввів поняття цілком впорядкованої множини та впорядкованого числа, а в 1895 році – поняття впорядкованої множини та порядкового типу.

Робота складається з двох розділів: перший присвячено теоретичним відомостям про різні математичні структури, а саме векторного простору, топологічного, метричного та часткового порядку; другий розділ присвячено дослідженню взаємодії структур на одній множині. Наведено приклади структур на різних множинах. Розглянуто поняття метризовності топологічного простору. Наведено приклади метризовних та не метризовних топологічних просторів.

1 ОПИС ТА ПРИКЛАДИ МАТЕМАТИЧНИХ СТРУКТУР НА РІЗНИХ МНОЖИНАХ

1.1 Структура векторного простору

Означення 1.1 Нехай V – непорожня множина, елементи якої будемо називати *векторами*, K – поле, елементи якого будемо називати *скалярами*. Нехай на множині V визначена внутрішня бінарна алгебраїчна операція, яку позначимо знаком $+$ та будемо називати *додаванням векторів*. Нехай на множині V визначена зовнішня бінарна алгебраїчна операція, яку будемо називати *множенням вектора на скаляр* та позначати знаком множення. Іншими словами визначено два відображення: $V \times V \to V$, будь-які $x, y \in V$, $(x, y) \to x + y \in V;$ $K \times V \to V,$ будь-яке $\alpha \in K,$ будь-який $x \in V,$ $(\alpha, x) \to$ $\to \alpha \cdot x \in V.$

Означення 1.2 Множина V разом з цими двома алгебраїчними операціями називається *векторним простором над полем* K, якщо виконуються наступні аксіоми:

а) додавання асоціативне, тобто при будь-яких $x, y, z \in V$, виконується $(x + y) + z = x + (y + z)$;

б) існує нульовий вектор, тобто існує $0 \in V$ та такий, що для будь-якого $x \in V$ виконується $x + 0 = 0 + x = x$;

в) для будь-якого вектора існує протилежний до нього, тобто для будь-якого $x \in V$ існує $(-x) \in V$, що $x + (-x) = (-x) + x = 0$;

г) додавання комутативне, тобто при будь-яких $x, y \in V$ виконується $x + y = y + x$;

ґ) множення вектора на скаляр підпорядковується закону асоціативності, тобто при будь-яких $\alpha, \beta \in K$ та будь-якому $x \in V$, виконується $(\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$, де добуток $\alpha \cdot \beta$ є добутком скалярів, який визначений у полі K;

д) при будь-яких $x \in V$ має місце $1 \cdot x = x$, де 1 – одиниця поля K;

е) множення вектора на скаляр є дистрибутивним відносно додавання векторів, тобто при будь-якому $\alpha \in K$ будь-яких $x, y \in V$ виконується, що $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + +\alpha \cdot y$;

є) множення вектора на скаляр є дистрибутивним відносно додавання скалярів, тобто при будь-яких $\alpha, \beta \in K$ будь-якому $x \in V$ виконується, що $(\alpha + \beta)x = \alpha x + +\beta x$.

Означення 1.3 Векторний простір V над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$ називається *дійсним векторним простором*.

Теорема 1.1 Найпростіші властивості векторних просторів:

а) у векторному просторі існує один нульовий вектор;

б) у векторному просторі будь-який вектор має один протилежний до нього;

в) при будь-якому $\alpha \in K$ і будь-якому $x \in V$ умова $\alpha \cdot x = 0$ виконується тоді та тільки тоді, коли $\alpha = 0$ або $x = 0$;

г) при будь-якому $x \in V$ виконується $(-1) \cdot x = -x$.

Найпростіші приклади векторних просторів:

а) множина числових дійсних функцій однієї змінної, неперервних на інтервалі $(0; 1)$, відносно звичайних операцій додавання функцій та множення функцій на число;

б) множина матриць одного й того ж самого розміру з елементами з поля K відносно додавання матриць та множення матриць на скаляр;

в) множина комплесних чисел відносно додавання комплексних чисел та множення на дійсне число [2].

Приклад 1.1 Нехай $n \in \mathbb{N}$. Позначимо через K^n множину всіх стовпців висоти n, тобто множину матриць над полем K розміру $n \times 1$. Множина K^n є векторним простором над полем K та низивається арифметичним векторним простором стовпців висоти n над полем K. Якщо замість довільного поля K взяти поле дійсних чисел $\mathbb{R}$, то векторний простір $\mathbb{R}^n$ називається дійсним арифметичним векторним простором стовпців висоти n.

Аналогічно, векторним простором є й множина матриць над полем K розміру $1 \times n$ або, інакше, рядків довжини n. Цей простір позначається через K^n та також називається арифметичним векторним простором рядків довжини n над полем K.

1.2 Структура топологічного простору та метричного

Означення 1.4 Нехай X – множина довільної природи та $\tau = \{U\}$ – сукупність підмножин, яка володіє наступними властивостями:

а) $\emptyset, X \in \tau$;

б) об'єднання будь-якої сукупності множин із τ належить τ;

в) перетин будь-якого скінченного числа множин із τ належить τ.

Така сукупність підмножин τ називається *топологією* на X. Множина X із заданою на ній топологією τ називається *топологічним простором* та позначається (X, τ), підмножини з сукупності τ називаються *відкритими* (у просторі (X, τ)) [4].

Там, де це не викличе непорозумінь, часто замість (X, τ) будемо писати просто X.

Приклад 1.2 X – числова пряма R^1. Топологію на R^1 можна задати наступним набором підмножин: порожня множина $\emptyset$, будь-які інтервали та їх об'єднання $U = \bigcup_\alpha (a_\alpha, b_\alpha)$. Таку топологію називають природною або евклідовою. Дуже часто, розглядаючи R^1, саме цю топологію мають на увазі.

Зауважимо, що і в загальному випадку, якщо зрозуміло, про яку топологію йде мова, замість стандартного символу (X, τ) для топологічного простору пишуть просто X.

Приклад 1.3 $X = R^2$. Відкритою множиною назвемо всяку множину в $X = R^2$, яка разом з кожною своєю точкою містить достатньо малий відкритий окіл з центром в цій точці, а також порожню множину. Легко перевірити, що система всіх відкритих множин в $X = R^2$ утворює топологію.

Приклад 1.4 X – довільна множина. Сукупність $\tau_0 = \{\emptyset, X\}$ задає топологію на X.

Приклад 1.5 Нехай множина X – довільна множина, $\tau_1 = \{$всі можливі підмножини з $X\}$. Сукупність τ – топологія на X.

Означення 1.5 Топологія τ_1 називається *максимальною* або *дискретною*, а топологія τ_0 – *мінімальною* або *тривіальною*. Таким чином, на одній і тій же множині можна ввести різні топології, наприклад тривіальну та дискретну.

З поняттям відкритої множини в топологічному просторі (X, τ) тісно пов'язане двоїсте поняття замкнутої множини: так називають множину, доповнення якої відкрите. Таким чином, якщо $U \in \tau$, то $X \setminus U$ замкнута, й навпаки, якщо F замкнута, то $X \setminus F$ відкрита.

У силу двоїстого характеру операцій у теорії множин сукупність $\{F\}$ всіх замкнутих множин топологічного простору (X, τ) задовольняє наступним властивостям:

а) $X, \emptyset \in \{F\}$;

б) перетин будь-якої сукупності множин із $\{F\}$ належить $\{F\}$;

в) об'єднання будь-якого числа множин із $\{F\}$ належить $\{F\}$ [2].

Ці властивості повністю характеризують замкнуті множини топологічного простору (X, τ), а отже, й топологію τ (так як множини із τ – це доповнення замкнутих множин) й можуть бути прийняті в якості аксіом топологічного простору. Таким чином, топологію на X можна задати, вказавши сукупність $\{F\}$ підмножин X, яка задовольняє властивостям а) – в); в такому випадку топологією на X буде сукупність $\{X \setminus F\}$ [1].

Різні топології на одній і тій самій множині утворюють частково впорядковану множину.

На одній і тій же множині можна задавати різні топології, тобто одна і та ж множина може бути носієм різних топологій.

Означення 1.6 Говорять, що топологія τ на X *слабша (грубіша)* топології τ' на $X(\tau < \tau')$, якщо з того, що $U \in \tau$, слідує, що $U \in \tau'$, тобто, якщо $\tau \subset \tau'$. Топологія τ' в такому випадку *сильніша (тонкіша)* топології τ.

Для будь-якої топології τ маємо $\tau_0 < \tau < \tau_1$. Топологія з прикладу 1.2 слабша за дискретну топологію на R^2. Якщо дві топології мають одну й ту ж саму систему відкритих множин, то вони називаються еквівалентними. Зрозуміло, що існують й непорівнянні топології. Топології τ', τ'' непорівнянні в тому випадку, якщо кожна з них містить лише частину множин, які належать іншій [1].

Приклад 1.6 Множина $X = \{a, b\}$. Сукупність $\tau_1 = \{\emptyset, X\}$ є антидискретною топологією на X, а $\tau_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}\}$ – дискретною топологією. Інші топології на цій множині містять більше двох і менше чотирьох, тобто три множини. На X такаими топологіями є лише дві топології, а саме $\tau_3 = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ та $\tau_4 = \{\emptyset, X, \{b\}\}$. Топології τ_1 та τ_2 є найслабною та найсильнішою відповідно серед усіх чотирьох топологій на X. Якщо розглядати топології τ_3 та τ_4, то вони будуть непорівнянними.

Отже, на множині всіх топологій, заданих на довільній множині X, визначений частковий порядок. Отримана частково впорядкована множина має найменший і найбільший елементи – антидискретну та дискретну топології на X. Цей приклад демонструє поєднання структури часткового порядку та топологічної структури.

Означення 1.7 Сукупність $B = \{V\}$ відкритих множин топологічного простору (X, τ) називається *базою топології* τ, якщо для всілякої відкритої множини $U \in \tau$ й для всілякої точки $x \in U$ знайдеться така множина $V \in B$, що $x \in V$ та $V \subset U$ [4].

Отже, будь-яку непорожню відкриту множину топологічного простору (X, τ) можна представити у вигляді об’єднання відкритих множин із бази топології τ (ця властивість характеризує базу й часто приймається за визначення бази).

Зокрема, X дорівнює об'єднанню всіх множин бази. Зауважимо, що будь-яку систему підмножин із X, об'єднання яких дорівнює X, називають *покриттям* X.

Терема 1.2 (Критерій бази). Нехай $X = \bigcup_\alpha V_\alpha$. Покриття $B = \{V_\alpha\}$ є базою деякої топології на X тоді й тільки тоді, коли для кожного V_α, кожного V_β з B й кожного $x \in V_\alpha \cap V_\beta$ існує $V_\gamma \in B$ таке, що $x \in V_\gamma \subset V_\alpha \cap V_\beta$ [1].

Теорема 1.3 Покриття $\{S_\alpha\}$ природно породжує топологію на X, а саме сукупність множин $\{V = \bigcap_{\alpha \in K} S_\alpha\}$, де K – довільна скінченна підмножина з $\{\alpha\}$, – база топології [1].

Таким чином, покриття $\{S_\alpha\}$ множини X визначає на X топологію, відкритими множинами якої є всі можливі об'єднання $\bigcup(\bigcap_{\alpha \in K} S_\alpha)$ та порожня множина.

Означення 1.8 *Околом точки* $x \in X$ називається всяка підмножина $\Omega(x) \subset X$, яка задовольняє умовам:

а) $x \in \Omega(x);$

б) існує $U \in \tau$ така, що $x \in U \subset \Omega(x)$ [4].

Можна розглядати сукупність всіх околів даної точки x. Ця сукупність володіє наступними властивостями:

а) Об'єднання будь-якої сукупності околів точки x є окіл точки x;

б) Перетин скінченного числа околів точки x – окіл точки $x;$

в) Всяка відкрита множина, яка містить деякий окіл точки x, є околом точки x [4].

Теорема 1.4 Непорожня підмножина A топологічного простору (X, τ) відкрита тоді й тільки тоді, коли вона містить деякий окіл кожної своєї точки [4].

Означення 1.9 Топологічний простір називають (X, τ) *хаусдорфовим*, якщо для будь-яких двох його різних точок, x, y, знайдуться такі околи $U(x)$, $U(y)$ цих точок, що $U(x) \cap U(y) = \emptyset$ [4].

Топологічний простір (X, τ) з тривіальною топологією не є хаусдорфовим, якщо він містить більше однієї точки. А топології з прикладів 1.2, 1.3, 1.5 є хаусдорфовими.

Властивості околу точки, розглянуті вище, можна покласти в основу наступного визначення топологічного простору, використовуючи їх як аксіоми.

Топологійний простір – це множина X, для кожної точки x якого вказана непоржня система підмножин $\{\Omega_\alpha(x)\}$, які називаються околами точки x, які задовольняють наступним умовам:

а) x належить кожному своєму околу $\Omega_\alpha(x)$;

б) якщо множина $U \subset X$ містить деяку $\Omega_\alpha(x)$, то U – так само окіл точки $x;$

в) для будь-яких околів $\Omega_{\alpha_1}(x), \Omega_{\alpha_2}(x)$ точки x їх перетин $\Omega_{\alpha_1}(x) \cap \Omega_{\alpha_2}(x)$ так само є околом точки x;

г) для будь-якого околу $\Omega_\alpha(x)$ точки x знайдеться такий окіл $\Omega_{\alpha_1}(x) \subset \Omega_\alpha(x)$, який є околом кожної своєї точки [4].

Означення 1.10 Нехай (X, τ) – топологічний простір, $A \subset X$. Точка $x \in X$ називається *точкою дотикання* до множини A, якщо будь-який її окіл з множиною A має непорожній перетин [1].

Наприклад, у евклідовій топології на прямій точка *x=0* є точкою дотикання множини $A = (0,1)$, а точка *x=2* не є точкою дотикання цієї множини.

Множина X називається впорядкованою та між елементами цієї множини встановлене деяке відношення $\leq$ (означає «менше або дорівнює»), яке задовольняє аксіомам:

а) рефлексивність, якщо $(\forall x \in X)\ x \leq x$;

б) антисиметричність, якщо $(\forall x, y \in X)\ x \leq y, y \leq x$ дає $x = y$;

в) транзитивність, якщо $(\forall x, y, z \in X)\ x \leq y, y \leq z$, тоді $x \leq z$.

Тоді маємо відношення порядку, а система $(X, \leq)$ є впорядкованою множиною.

Означення 1.11 [1] Будемо називати *інтервалом з початком в* x

$$[x, \to) = \{y \in X | x \leq y\}.$$

Теорема 1.5 Множина $\beta = \{[x, \to) | x \in X\}$ всіх інтервалів є базис деякої топології τ на $(X, \leq)$, яка називається *правою* топологією або *топологією стрілки*. Множина $(X, \leq)$, яка наділена цією топологією, будемо позначати $(X, \leq, \tau)$.

Доведення.

Використаємо теорему 1.2 (критерій бази топології).

Об'єднання всіх множин системи β дає всю множину X. β утворює покриття множини X. Далі, візьмемо будь-які два інтервали на множині X, перетин яких непорожній:

$U_x = [x, \to) = \{y \in X : x \leq y\}$, тобто цей інтервал з початком в x;

$U_z = [z, \to) = \{y \in X : z \leq y\}$, тобто цей інтервал з початком в z.

Нехай точка $t \in U_x \cap U_z$, тоді $x \leq t$ та $z \leq t$. Інтервал з початком в t, має вигляд

$$U_t = [t, \to) = \{s \in X : t \leq s\}.$$

За умови, що $x \leq t$ та $t \leq s$ випливає, що $x \leq s$, тоді точка $s \in U_x$.

Аналогічно, з нерівностей $z \leq t$ та $t \leq s$ випливає, що $z \leq s$, тоді точка $s \in U_z$. Звідси можна зробити висновок, що точка s належить перетину цих інтервалів, тобто $s \in U_x \cap U_z$.

Таким чином, $(\forall s \in U_t)\ s \in U_x \cap U_z$, тобто $U_t \subset U_x \cap U_z$. Отже, теорему доведено.

Приклад 1.7 Дано $\mathbb{R}$ – дійсна пряма, фундаментальна система околів (ФСО) точки x_0 утворює множину вигляду, використовуючи означення бази топології 1.4,

$$B = \{x \in \mathbb{R} |\, x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon\} \cup (-\varepsilon, \varepsilon), \varepsilon > 0.$$

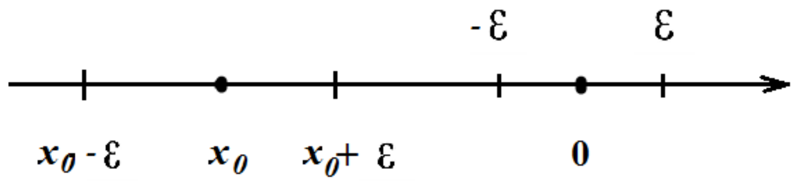

Рисунок 1.1 – Розміщення елементів на прямій з умови ФСО

Перша аксіома бази топології (за теоремою 1.2) буде виконуватись, тому що об'єднання всіх околів системи буде давати всю множину $\mathbb{R}$, тобто ФСО утворює покриття множини $\mathbb{R}$.

Перевіримо другу аксіому бази топології. Нехай візьмемо точку $x_1 = 1, \varepsilon = 0{,}7$ та побудуємо окіл з ФСО $U = (0{,}3; 1{,}7) \cup (-0{,}7; 0{,}7)$. Візьмемо другу точку при такому самому $\varepsilon = 0{,}7$, $x_2 = 2$ та побудуємо для цієї точки окіл $V = (1{,}3; 2{,}7) \cup (-0{,}7; 0{,}7)$. Знайдемо перетин цих околів $U \cap V = (1{,}3; 1{,}7) \cup (-0{,}7; 0{,}7)$. Візьмемо таку точку $z = 0{,}5$, що $z \in U \cap V$ та для цієї точки побудуємо свій окіл із значенням $\varepsilon = 0{,}05$ $W = (0{,}45; 0{,}55) \cup (-0{,}05; 05)$. Окіл W буде підмножиною перетину околів $W \subset U \cap V$, тому можна зробити висновок, що на множині $\mathbb{R}$ існує топологія, однією з баз якої будуть ФСО B.

Приклад 1.8 Покажемо, що (X, τ) – топологія стрілка Зоргенфрея існує.

Означення 1.12 *Стрілкою Зоргенфрея* (позначається S) називається півінтервал $[0; 1)$ з топологією, яка вводиться наступним чином.

Сімейство $B \subset \tau$, таке, що кожну непорожню відкриту множину простору X можна представити у вигляді обєднання деякого підсімейства сімейства B.

На півінтервалі $[0; 1)$ введемо топологію, яка буде відрізнятися від топології на прямій. Введемо сукупність наступних півінтервалів

$$B = \{[a; b) | 0 \leq a < b \leq 1\}.$$

Покажемо, що множина B є базою деякої топології на півінтервалі $[0; 1)$. За теоремою 1.2 – критерієм бази топології – потрібно довести, що сукупність $\cup B$ елементів з B є покриттям, тобто $\cup B = [0; 1)$. Дійсно,

$$\cup B = \bigcup_{0 \leq a < b \leq 1} [a; b) = [0; 1), \text{якщо } a = 1, b = 1.$$

Доведемо виконання другої умови теореми 1.2. Візьмемо будь-який $x \in [0; 1)$, будь-які $[a_1; b_1) \in B, [a_2; b_2) \in B$, такі, що $x \in [a_1; b_1) \cap [a_2; b_2)$. Тоді

$$\begin{cases} 0 \leq a_1 \leq x < b_1 \leq 1, \\ 0 \leq a_2 \leq x < b_2 \leq 1. \end{cases}$$

Нехай $a_0 = \max\{a_1; a_2\}$, $b_0 = \max\{b_1; b_2\}$, тоді $0 \leq a_0 \leq x < b_0 \leq 1$, $[a_0; b_0) \subset [a_1; b_1)$, $[a_0; b_0) \subset [a_2; b_2)$, а, отже, $x \in [a_0; b_0) \subseteq [a_1; b_1) \cap [a_2; b_2)$ та $[a_0; b_0) \in B$. Умова виконується.

З виконання цих умов випливає, що В – база деякої топології на півінтервалі [0;1), а (X,τ) – топологічний простір. Аналогічно, якщо розглядати $\mathbb{R}$ – множину дійсних чисел, B – сімейство всіх його підмножин вигляду $[x, r)$, де $x \in \mathbb{R}$ та $r \in \mathbb{Q}$, $x < r$, множина B буде утворювати базу деякої топології τ на.$\mathbb{R}$.

Покажемо, що цей топологічний простір хаусдорфовий за означенням 1.9. Нехай $a, b \in S$, $a \neq b$. Покладемо, що $a < b$. Околи точок a та b позначимо відповідно: $Oa = [a, c_1)$ та $Ob = [b, c_2)$, де $c_1, c_2 \in \mathbb{Q}$, $Oa, Ob \in B$. Для будь-яких $a, b \in S$ знайдуться C_1, C_2 такі, що $a < C_1 < b, b < C_2 < 1$. Тоді $Oa \cap Ob = \emptyset$. З цього випливає, що стрілка Зоргенфрея – хаусдорфовий простір.

Далі розглянемо основні поняття метричного простору.

Нехай X – непорожня множина довільної природи, елементи якої будемо називати точками та позначати $x, y, \ldots$.

Означення 1.13 *Метрикою* на множині X називається $\rho: X \times X \to \mathbb{R}$, це означає, що, якщо кожній парі елементів $(x, y) \in X$ поставлено у відповідність дійсне невідємне число $\rho(x, y)$ так, що виконується

а) $\rho(x, y) = 0$, тоді та тільки тоді, коли $x = y$;

б) симетричність $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, коли $\forall\, x, y \in X$;

в) правило трикутника $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ для $\forall\, x, y \in X$.

Означення 1.14 Пара (X, ρ), де ρ – метрика в X, називається *метричним простором.*

Аксіоми а), б), в) з означення 1.13 називають аксіомами метрики.

Означення 1.15 Число $\rho(x, y)$ називається *відстанню* між точками x, y.

Означення 1.16 *Відкритою кулею* $B_r(x_0)$ з центром у точці x_0, радіусом r називається множина точок $x \in X$, для яких виконується умова $\rho(x_0, x) < r$ та $B_r(x_0) = \{x \in X \mid \rho(x_0, x) < r\}$. Множина точок $x_0 \in X$, для яких виконується $\rho(x_0, x) \leq r$

$$B_r[x_0] = \{x \in X \mid \rho(x_0, x) \leq r\},$$

називається *замкненою кулею.*

Означення 1.17 *Околом точки* x_0 у метричному просторі (X, ρ) називається відкрита куля з центром в цій точці.

Означення 1.18 Нехай A – підмножина метричного простору (X, ρ). Точка $x \in A$ називається *внутрішньою точкою* множини A, якщо вона входить у цю множину разом із деяким своїм ε-околом, тобто

$$\exists\, \varepsilon > 0 \mid B_\varepsilon \subset A.$$

Означення 1.19 Сукупність усіх внутрішніх точок множини A називається *внутрішністю множини* A та позначається $\dot{A}$ або $Int(A)$.

Означення 1.20 Підмножина U метричного простору (X, ρ) називається *відкритою множиною* в цьому просторі, якщо всі точки множини U є внутрішніми. Інакше кажучи, множина U відкрита, якщо $Int(U) = U$.

Теорема 1.6 (Властивість відкритої кулі). Відкрита куля у метричному просторі є відкритою множиною [5].

Доведення.

Розглянемо кулю з радіусом r_0 та центром в x_0 $B_{r_0}(x_0)$ та кулю, яка міститься всередині $B_{r_0}(x_0)$ з радіусом r та центром в x, тобто $B_r(x)$ або позначається наступним чином $B_r(x) \subset B_{r_0}(x_0)$. Щоб знайти радіус кулі всередині потрібно відняти від радіусу r_0 відстань від центрів цих куль $r = r_0 - \rho(x, x_0)$.

Оберемо всередині вписаної кулі точку y та застосуємо нерівність трикутника

$$\rho(x_0, y) \leq \rho(x_0, x) + \rho(x, y) \leq r_0 - r + r = r_0.$$

Отже, будь-яка точка $x \in B_{r_0}(x_0)$ є внутрішньою для цієї множини та це значить, що множина $B_{r_0}(x_0)$ – відкрита. Теорему доведено.

Відкриті кулі в метричних просторах $(\mathbb{R}^n, \rho_0), (\mathbb{R}^n, \rho_1)$ та $(\mathbb{R}^n, \rho_E)$ різні. У першому з них ε-окіл точки x є кубом, який має вигляд

$B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x_k - y_k| < \varepsilon \forall k\}$ відносно евклідової метрики ρ_E. Цікаво, що множини, які відкриті в одному з перелічених вище просторів, є відкритими в інших двух просторах.

Теорема 1.7 (Властивість відкритих множин у метричному просторі) Нехай (X, ρ) – метричний простір, тоді об'єднання будь-якої сукупності відкритих множин є відкритою множиною та перетин скінченного числа відкритих множин є відкритою множиною [5].

Доведення.

Нехай множина дорівнює об'єднанню множин $Y = \bigcup_\alpha Y_\alpha$, таких, що Y_α є відкритими множинами. Візьмемо елемент з множини $x \in Y$, тоді існує таке α, що $x \in Y_\alpha$, звідки слідує, що елемент x є внутрішньою точкою для множини Y_α, тоді куля з центром в цій точці та радіусом r буде підмножиною множини Y_α $B_r(x) \subset Y_\alpha$ та звідки випливає, що знайдеться куля з центром у цій же точці з радіусом ε, яка також буде підмножиною множини Y $B_\varepsilon(x) \subset Y$. Точка x – довільна з множини Y. Першу частину теореми доведено.

Розглянемо перетин множин $Y' = \bigcap_{\alpha=1} Y_\alpha$, такий, що множини Y_α – відкриті. Візьмемо елемент $x \in Y$, то $\forall \alpha\, x \in Y_\alpha$, звідки випливає, що існує куля з центром в цій точці та радіусом ε_α, яка буде підмножиною множини Y_α $B_{\varepsilon_\alpha}(x) \subset Y_\alpha$. Значення ε буде дорівнювати мінімуму $\varepsilon = min \varepsilon_\alpha$, тобто буде існувати куля з центром в точці x та радіусом ε така, що $B_\varepsilon(x) \subset Y'$ при будь-яких $x \in Y'$. Теорему доведено.

Приклад 1.9 Множина відкритих куль топологічного простору $(\mathbb{R}^2, \tau)$, де τ – евклідова топологія, є її базою.

Дійсно, за означенням 1.16 відкритої кулі

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < r, r \in \mathbb{R}, r > 0\}.$$

Перевіримо критерій бази топології 1.2. Перша аксіома потребує, щоб об'єднання всіх множин системи B давала всю множину $\mathbb{R}^2$, дійсно, об'єднання всіх можливих куль з центром у початку координат з радіусом r

буде давати множину $\mathbb{R}^2$. Тобто система підмножин B утворює покриття множини $\mathbb{R}^2$. Таким чином, перша аксіома виконується.

Для перевірки другої аксіоми, візьмемо дві кулі такі, що $U_1, U_2 \in B$, наприклад,

$$U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|x^2 + y^2 < 7\}, U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|x^2 + y^2 < 8\}.$$

Знайдемо такий елемент множини, який буде належати перетину двох куль $(1; 2) \in U_1 \cap U_2$. За умовою аксіоми існує множина, яка буде належати системі множин B: $W \in B$, який має наступний вигляд

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|x^2 + y^2 < 6\}.$$

Елемент множини з перетину двох куль U_1, U_2 повинен належати й множині W, яка в свою чергу буде підмножиною з перетину цих же куль, тобто $(1; 2) \in W \subset U_1 \cap U_2$.

Таким чином, всі умови виконуються, тоді в $\mathbb{R}^2$ існує топологія, однією з баз якої є система B. Порожня множина та сама множина $\mathbb{R}^2$ також входять в систему, тому пара $(\mathbb{R}^2, \tau)$ є топологічним простором. Відкритими множинами у цьому просторі будуть $\emptyset, \mathbb{R}^2$, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|x^2 + y^2 < r\}, r \in \mathbb{R}, r > 0$, а замкненими $\emptyset, \mathbb{R}^2, \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|x^2 + y^2 \geq r\}, r \in \mathbb{R}, r > 0$.

Означення 1.21 Множина A метричного простору (X, ρ) називається *замкненою*, якщо її доповнення є відкритим [5].

Розглянемо множину $X = \mathbb{R}$ та ρ – евклідова метрика на прямій. Візьмемо множину A', яка буде підмножиною $\mathbb{R}$ $\mathbb{R} \supset A = [a, b]$. Знайдемо доповнення цієї множини, яке буде мати вигляд

$$CA = \mathbb{R} \setminus A = (-\infty; a) \cup (b; +\infty).$$

Візьмемо елемент з доповнення $\forall x \in CA$, при цьому буде існувати куля з центром у цій точці, яка буде підмножиною доповнення до множини A $B_\varepsilon(x) \subset CA$, з цього випливає, що доповнення до множини CA буде відкритою множиною, тобто A є замкненою множино.

Розглянемо таку множину B, що $\mathbb{R} \supset B = [a, b)$.

Знайдемо доповнення цієї множини, яке буде мати вигляд

$$CB = \mathbb{R} \setminus B = (-\infty; a) \cup [b; +\infty).$$

Перевіримо множину B на відкритість. Очевидно, що не буде існувати така куля з центром в точці b, щоб виконувалось $B_\varepsilon(b) \subset CB$, звідки випливає, що доповнення до даної множини CB не буде відкритою множиною, а, отже, й сама множина B не є замкнено.

Теорема 1.8 Будь-яка одноточкова множина в метричному просторі є замкненою множиною [5].

Доведення.

Нехай (X, ρ) – метричний простір. Візьмемо такий x елемент, що $x \in X$. Нехай елемент x утворює одноточкову множину $A = \{x\}$. Наступним кроком знайдемо доповнення до одноточкової множини A, яке має вигляд

$$CA = X \setminus A = X \setminus \{x\}.$$

Візьмемо елемент з доповнення до множини $y \in CA$. Потрібно знайти відстань від точки x до точки y. Очевидно, що ця відстань буде $\rho(x, y) \neq 0$, позначимо $\rho(x, y) = \varepsilon$. Розглянемо окіл точки y з радіусом r, такий що буде підмножиною доповнення до множини A:

$$B_r(y) = \{z \in X | \rho(y, z) < \varepsilon\} \subset CA.$$

З цього випливає, що доповнення CA – буде множиною відкритою, тобто одноточкова множина A – замкнена. Теорему доведено.

Теорема 1.9 Властивість замкнених множин у метричному просторі. Перетин будь-якого сімейства замкнених множин метричного простору – множина замкнена та об'єднання будь-якого скінченного числа замкнених множин є замкненою множиною [5].

Також зауважимо, що множина X є відкритою.

Будемо вважати, що й порожня множина є відкритою, тоді множина X – замкнена, оскільки доповнення до цієї множини є порожня множина $CX = \emptyset$, то аналогічно порожня множина є замкненою, оскільки $X = \mathrm{C}\emptyset$. Таким чином, у метричному просторі порожня множина та множина X є одночасно й відкритою, й замкненою множино.

Приклад 1.10 Розглянемо арифметичний (або координатний) n-мірний простір $\mathbb{R}^n$, елементами якого будуть впорядковані набори дійсних чисел. У цьому просторі введемо стандртну евклідову метрику, в якій відстань між точками $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ та $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ обчислюється за формулою

$$\rho_E(x, y) = [\textstyle\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

У цьому випадку пара $(\mathbb{R}^n, \rho_E)$ утворює метричний простір, який називається евклідовим простором. Як правило, замість пари $(\mathbb{R}^n, \rho_E)$ пишуть $\mathbb{R}^n$.

Наприклад, якщо розглядати значення $n = 1$, тобто на евклідовій числовій прямій, ця метрика має вигляд $\rho_E(x, y) = |x - y|$.

На цій же множині $X = \mathbb{R}^n$ можна ввести другу метрику, наприклад, $\rho_0(x, y) = \max_k |x_k - y_k|$ або $\rho_1(x, y) = \sum_{k=1}^{n}|x_k - y_k|$.

Розглянемо множину X довільної природи, функцію $\rho_1 = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$

Означення 1.22 Метричний простір (X, ρ_1) називається *простором ізольованих точок*. У цьому просторі куля $B_\varepsilon(x) = \{x\}$ з радіусом при $\varepsilon \leq 1$

та куля $B_\varepsilon(x) = X$ з радіусом при $\varepsilon > 1$, тобто всяка підмножина в (X, ρ_1) є відкритою [5].

Останнє твердження має місце, наприклад, й для простору з трьох точок $X = \{a, b, c\}$ з метрикою $\rho(a, b) = 3$, $\rho(b, c) = 4$, $\rho(a, c) = 7$. Слід зазаначити, що в цьому просторі куля більшого радіусу $B_6(a) = \{a, b\}$ зможе поміститися в кулі меншого радіусу, наприклад, $B_5(b) = X$.

Розглянемо також лінійний нормований простір X з нормою $||x||$, яка за означенням задовольняє наступним умовам: $\forall x, y \in X : \left||x|\right| \geq 0, \left||x|\right| = 0$, звідки випливає, що $x = 0$ та $\left||\alpha x|\right| = |\alpha|\left||x|\right|, \left||x = y|\right| \leq \left||x|\right| + ||y||$.

Кожен такий простір є метричним простором з метрикою $\rho(x, y) =$ $= ||x - y||$. Наприклад, у просторі $C[a, b]$ функцій $x = x(t)$, неперервних на відрізку $[a, b]$, можна ввести метрику $\rho(x, y) = \max_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|$.

Також у якості метричного простору можна розглядати будь-який передгільбертовий простір, тобто лінійний простір із заданою симетричною додатно визначеною білінійною формою $\langle x, y \rangle$, яка називається скалярним добутком. Канонічна метрика ρ на передгільбертовому просторі визначається формуулою $\rho(x, y) = ||x - y|| \equiv \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$. Скінченномірний передгільбертовий простір є евклідовим простором $\mathbb{R}^n$зі скалярним добутком $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$.

Найбільш відомі наступні приклади нескінченномірних гільбертових просторів:

а) простір (нескінченних) послідовностей $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$ таких, що $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty$ зі скалярним добутком $\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$;

б) простір $L_n[a, b]$ функцій $x(t)$, інтегровних з квадратом на відрізку $[a, b]$, у якому $\langle x, y \rangle = \int_a^b x(t) y(t) dt$.

Приклад 1.11 Нехай L – множина всіх дійсних послідовностей, для яких, де $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ при умові $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty$. Функція $\rho(x, y) =$ $= \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|$ є метрикою на L.

Дійсно, функція ρ задана коректно, так як

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k| \le \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| + \sum_{k=1}^{\infty} |y_k| < \infty.$$

Перевіримо виконання умов метрики. Перша умова потребує виконання $\rho(x, y) = 0$, а це можливо тоді й тільки тоді, коли $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k| =$ $= 0$ за умови невід'ємності модулю суми, звідки випливає, що $|x_k - y_k| = 0$, тобто це можливо, коли $x_k = y_k$, а це означає, що $x = y$. Таким чином, перша аксіома метрики виконується. Перевіримо наступну аксіому, яка має вигляд $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ при будь-яких $x, y \in L$. Очевидно, що ця умова буде виконуватись.

Третя умова – нерівність трикутника $\rho(x, y) \le \rho(x, z) = \rho(z, y)$. Для $x, y \in L$ та $h = (h_1, h_2, \dots)$, де $k = \overline{1, n}$

$$|x_k - y_k| = |x_k - h_k + h_k - y_k| \le |x_k - h_k| + |h_k - y_k|,$$

звідки випливає, що

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k| \le \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - h_k| + \sum_{k=1}^{\infty} |h_k - y_k|.$$

Отже, функція ρ – метрика на L.

Приклад 1.12 Нехай C – поле комплексних чисел для $z \in C$, яке має два наступних представлення $z = re^{i\varphi}$ та $z = Rez + iImz$. Нехай $z_1, z_2 \in C$. Перевіримо, чи є метрикою на C наступна функція $\rho(z_1, z_2) = |r_1 - r_2| +$ $+|\varphi_1 - \varphi_2|$.

Перевіримо виконання аксіом метрики для цієї функції. За першою умовою $\rho(z_1, z_2) = 0$ тоді та тільки тоді, коли $z_1 = z_2$. З $\rho(z_1, z_2) = 0$ випливає $|r_1 - r_2| + |\varphi_1 - \varphi_2| = 0$, звідки $|r_1 - r_2| = 0$ та $|\varphi_1 - \varphi_2| = 0$. Але тоді $r_1 = r_2$ та $\varphi_1 = \varphi_2$, тобто $z_1 = z_2$. Обернена імплікація має місце. Таким чином, умова виконується.

Очевидно, що друга аксіома $\rho(z_1, z_2) = \rho(z_2, z_1)$також буде виконуватись.

Перевіримо виконання умови нерівності трикутника

$$\rho(z_1, z_2) \leq \rho(z_1, z_3) + \rho(z_3, z_2).$$

Застосувавши умову, маємо

$$|r_1 - r_2| + |\varphi_1 - \varphi_2| = |r_1 - r_3 + r_3 - r_2| + |\varphi_1 - \varphi_3 + \varphi_3 - \varphi_2| \leq$$
$$\leq |r_1 - r_3| + |r_3 - r_2| + |\varphi_1 - \varphi_3| + |\varphi_3 - \varphi_2| =$$
$$= |r_1 - r_3| + |\varphi_1 - \varphi_3| + |r_3 - r_2| + |\varphi_3 - \varphi_2|,$$

звідки випливає, що $\rho(z_1, z_2) \leq \rho(z_1, z_3) + \rho(z_3, z_2)$, тобто умова виконується, а це означає, що функція ρ задає метрику на множині C.

1.3 Структура часткового порядку

Означення 1.23 Нехай на множині M задано бінарне відношення $>$. Це відношення називають *відношенням порядку*, а систему $(M; >)$ – *впорядкованою множиною*, якщо це відношення має такі властивості:

а) транзитивне, тобто $(\forall\, a, b, c\, \in M)$ $a > b$ та $b > c \Rightarrow a > c$;

б) антисиметричне, тобто $(\forall\, a, b\, \in M)$ $a > b$ та $b > a \Rightarrow a = b$ [3].

Якщо елементи a та b знаходяться у відношенні порядку, то можна вживати висловлювання «a вище b» або «b передує a».

Означення 1.24 Якщо $a > b$ та для будь-якого елемента x, відмінного від a та від b, висловлювання $a > x$ істинне, а висловлювання $x > b$ – хибне, тоді говорять «a безпосередньо слідує за b».

Означення 1.25 Відношення порядку на множині M називають *відношенням нестрогого порядку*, а систему $(M; \geq)$ – *нестрогою впорядкованою множиною*, якщо це відношення має таку додаткову властивість:

в) рефлексивне, тобто $(\forall\ a \in M)\ a > a$ [1].

Відношення строгого порядку часто позначають символом $>$ (або $<$) [3].

Означення 1.26 Відношення порядку на множині M називають *відношенням строгого порядку*, а систему $(M;>)$ – *строго впорядкованою множиною*, якщо це відношення

г) антирефлексивне, тобто $(\forall\ a \in M)\ \overline{a > a}$ [1].

Означення 1.27 Відношення строгого порядку на множині M називають *відношенням лінійного порядку*, а систему $(M;>)$ – *лінійно впорядкованою множиною*, якщо це відношення:

д) зв'язне, тобто $(\forall\ a, b \in M)\ a \neq b \Rightarrow a > b$ або $b > a$.

Означення 1.28 Якщо відношення порядку на множині M не є відношенням лінійного порядку, тоді це відношення називають *відношенням часткового порядку*, а систему $(M;>)$ – *частково впорядкованою множиною* [3].

Найпростіші приклади частково впорядкованих множин:

а) множина натуральних чисел із звичайним порядком;

б) множина натуральних чисел, де $a \geq b$ означає, що a ділить b;

в) множина скінченних зростаючих послідовностей натуральних чисел, де $(a_1, \dots, a_k) \leq (b_1, \dots, b_l)$ означає, що $k \leq l$ та $a_i = b_i$ при $1 \leq i \leq k$;

г) множина всіх підмножин деякої множини, де $a \leq b$ означає, що $a \subseteq b$;

д) довільна непорожня множина, де $a \leq b$ означає $a = b$ (така частково впорядкована множина називається тривіальною або дискретною) [3].

Приклад 1.13 Побудова топологічної структури на лінійно впорядкованій множині.

Нехай у множині всіх степенів даного натурального числа k задане бінарне відношення α таким визначенням: a та b знаходяться у відношенні α, якщо a ділиться націло на b. Відношення α позначають зазвичай символом $\vdots$.

Тут ми будемо писати $b \leq a$. Легко перевірити, що відношення α є відношенням лінійного та нестрогого порядку.

Розглянемо, наприклад, натуральне число $k = 5$. Пара чисел $(5^2, 5^1)$ належить відношенню α, бо число 5^2 націло ділиться на число 5^1. Будемо записувати таким чином: $(5^2, 5^1) \in \alpha$ або $(5^2 \vdots 5^1)$. Отже, $5^1 \leq 5^2$ в загальному випадку. Відношення α є відношенням порядку, а система $(N, \vdots)$ – впорядкована множина, яка має лінійний та нестрогий порядок, тому що використовуємо аксіоми з означень 1.1, 1.3, 1.4. Дійсно,

а) $(\forall\, a, b, c \in N)\, (\forall\, k \in N)$ $(k^a \vdots k^b)$ та $(k^b \vdots k^c)$ випливає, що $(k^a \vdots k^c)$. Відношення транзитивне;

б) $(\forall\, a, b \in N)\, (\forall\, k \in N)$ $(k^a \vdots k^b)$ та $(k^b \vdots k^b)$ випливає, що $k^a = k^b$ звідки $a = b$. Відношення антисиметричне;

в) $(\forall\, t \in N)\, (\forall\, k \in N)\, (k^t \vdots k^t)$ випливає, що $(k^t, k^t) \in \alpha$. Відношення рефлексивне;

г) $(\forall a, b \in N)\, (\forall k \in N)$ маємо $k^a \leq k^b$ або $k^b \leq k^a$. Відношення зв'язне.

Повернемося до прикладу відношення $\vdots$ на множині степенів числа 5, тобто

$$X = \{y \colon \exists\, k \in N \colon y = 5^k\} = \{5, 5^k, 5^{k+1}, \dots\}.$$

База правої топології на множині $(X, \vdots)$ складається з інтервалів виду $[x, \to)$, де $x \in X$. У нашому прикладі такий інтервал з початком в 5^l має вигляд

$$[5^l, \to) = \{5^l, 5^{l+1}, 5^{l+2}, \dots\} = \{5^t \colon t \geq l\}.$$

Очевидно, що $X = [5, \rightarrow) = \{5^t : t \geq 1\}$. Далі беремо два інтервали з множини X. Перетином двох інтервалів $U = [5^t, \rightarrow)$ та $W = [5^p, \rightarrow)$ буде множина

$$U \cap W = [5^k, \rightarrow), \text{ де } k = \max\{t, p\}.$$

Замиканням множини $\{5^l\}$ буде згідно теореми 2.3, множина $(\leftarrow, 5^l]$, тобто множина $\{5^1, \dots, 5^l\}$.

2 ВЗАЄМОДІЯ СТРУКТУР НА ОДНІЙ МНОЖИНІ

2.1 Взаємодія топологічної та метричної структур. Метризовність топологічного простору

Множина всіх топологічних просторів містить важливий клас – метричних просторів, які описано у першому розділі роботи. Топологія метричного простору породжується його системою відкритих множин, тобто топологічна структура в метричних просторах є вторинною, яка породжується метрикою. У множині топологічних просторів можна виділити ще один клас – метризовних топологічних просторів. У цьому пункті розглядається поєднання структури метричної та топологічної на одній множині.

Означення 2.1 Топологічний простір (X, τ) називається *метризовним*, якщо на множині X можна задати метрику, яка породжує топологію τ.

Для формулювання достатньої умови метризовності топологічного простору необхідні поняття нормальності топологічного простору й аксіоми зліченності та відокремлюваності.

Означення 2.2 Топологічний простір задовольняє *першу аксіому зліченності*, якщо система околів кожної його точки має не більш ніж зліченну базу.

Означення 2.3 Топологічний простір задовольняє *другу аксіому зліченності*, якщо його вага (найменша з потужностей його баз) не більш ніж зліченна, тобто даний простір має не більш ніж зліченну базу [6].

Наприклад, розглянемо антидискретний топологічний простір. Очевидно, цей простір буде задовольняти другу аксіому зліченності.

Перша аксіома зліченності буде виконуватись у дискретному топологічному просторі. Система околів будь-якої точки x складається лише з однієї одноточкової множини $\{x\}$.

Розглянемо далі аксіоми відокремлюваності.

Аксіома T_0 (аксіома Колмогорова). Із кожних двох відмінних точок топологічного простору принаймні одна має окіл, який не містить другу точку.

Аксіома T_1 Кожна точка всякої пари різних точок топологічного простору має окіл, який не містить другу точку.

Аксіома T_2 (аксіома Хаусдорфа). Будь-які дві різні точки x, y топологічного простору мають відкриті околи $U(x), U(y)$ такі, що $U(x) \cap U(y) = \emptyset$.

Аксіома T_3 Для всякої точки x топологічного простору та всякої замкненої множини F, яка не містить x, існує відкритий окіл $U(x)$ точки x та відкритий окіл $U(F)$ множини F такі, що $U(x) \cap U(F) = \emptyset$.

Аксіома T_4 Будь-які дві замкнені множини F_1, F_2, які не перетинаються, топологічного простору мають відкриті околи $U(F_1), U(F_2)$ такі, що $U(F_1) \cap U(F_2) = \emptyset$.

Означення 2.4 Топологічний простір, який задовольняє першу і третю (або четверту) аксіоми відокремлюваності, називається *нормальним* [7].

Якщо розглядати дискретний топологічний простір, то він буде задовольняти всі аксіоми відокремлюваності. Це означає, що цей простір буде нормальним.

Наприклад, антидискретний топологічний простір X буде задовольняти третю та четверту аксіому відокремлюваності. Тобто для кожної точки $x \in X$ єдиною замкненою множиною в X, яка не буде містити елемент x, буде порожня множина. Звідси випливає, що околами x та $\emptyset$, які не перетинаються, будуть множини X та $\emptyset$.

Більш загальним прикладом топологічного простору, що задовольняє першу аксіому зліченності, є будь-який метричний простір. Метричний простір є також нормальним [6].

Теорема 2.1 (Урисона. Достатня умова метризовності) Нормальний топологічний простір, який задовольняє другу аксіому зліченності, метризовний [6].

Прикладом метризовного простору є антидискретний простір, бо виконуються умови другої аксіоми зліченності та цей простір нормальний.

Твердження 2.1 Топологічний простір (X, τ) – стрілка Зоргенфрея (позначаємо S) – не є метризовним.

Доведення.

Потрібно перевірити достатню умову метризовності, тобто теорему 2.1 Урисона.

У прикладі 1.9 було показано, що на півінтервалі $[x; r)$ множина B, яка має вигляд $B = \{[x; r) | x \in \mathbb{R},\ r \in \mathbb{Q},\ x < r\}$, є базою цієї топології.

Покажемо, що топологічний простір (X, τ) є нормальним. За означенням 2.4 мають виконуватись аксіоми відокремлюваності T_1 та T_4.

Нехай множини будуть підмножинами простору $F_1, F_2 \subset S$ та F_1, F_2 – замкнені в S та виконується $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Нехай елемент $x \in F_1$ та $x \notin F_2$, тоді з цього випливає, що $S \setminus F_2 = Ox$ – окіл елемента x та буде виконуватись умова $Ox \cap F_2 = \emptyset$. Таким чином, за критерієм бази існує елемент $[x; a_x)$, такий, що буде підмножиною околу $[x; a_x) \subset Ox$ та $[x; a_x) \cap F_2 = \emptyset$.

Аналогічно, нехай будь-який елемент $y \in F_2$, такий, що існує півінтервал, який буде належати множині бази топології $[y; b_y) \in B$ та $[y; b_y) \cap F_1 = \emptyset$.

Розглянемо окіл множин $OF_1 = \bigcup_{x \in F_1} [x; a_x),\ OF_2 = \bigcup_{x \in F_2} [y; b_y)$. Будь-який елемент з множини $x \in F_1$, такий, що буде існувати півінтервал, який буде в свою чергу підмножиною околу множини $[x; a_x) \subset OF_1$. З цього випливає, що $x \in OF_1$ та сама множина буде підмножиною свого околу $F_1 \subset OF_1$. Аналогічно, для множини F_2 буде виконуватись $F_2 \subset OF_2$.

Множини OF_1, OF_2 будуть відкритими в S як об'єднання базисних множин. Далі доведемо, що $OF_1 \cap OF_2 = \emptyset$. Припустимо, що існує елемнт

$z \in OF_1 \cap OF_2$, тобто, існують півінтервали $[x; a_x), \left[y; b_y\right)$, що елемент z буде належати перетину цих півентервалів $z \in [x; a_x) \cap \left[y; b_y\right)$. З цього випливає, що $y < x \leq z$ або $x < y \leq z$, тобто $x \in \left[y; b_y\right) \subset OF_2$ або $y \in [x; a_x) \subset OF_1$. Отже, $OF_2 \cap F_1 \neq \emptyset$ або $OF_1 \cap F_2 \neq \emptyset$. З цього отримуємо протиріччя. Тобто $OF_1 \cap F_2 = \emptyset$, а це означає, що стрілка Зоргенфрея – нормальний простір.

Далі покажемо, що стрілка Зоргенфрея не задовольняє умову другої аксіоми зліченності. Розглянемо довільний елемент $x \in \mathbb{R}$. Для нього існує такий елемент $F_1 = [x; b)$, де $x < b$, з бази B, що $x \in F_1$. Поставимо у відповідність кожному x його окіл F_1. Оскільки, з $x \neq y$ випливає $F_1 \neq F_2$, то відображення $x \to F_1$ буде ін’єктивним. Отже, потужність відрізка $[x; r]$ не більша за потужність бази стрілки Зоргенфрея, а значить база не є зліченною, тобто не буде задовольняти другу аксіому зліченності.

Отже, топологічний простір стрілка Зоргенфрея не буде метризовним. Твердження доведено.

Довести твердження про неметризовність стрілки Зоргенфрея можна й по-іншому – за допомогою так званих числових характеристик [8]. Згідно цього методу достатньо знайти дві різні за значенням характеристики. У нашому прикладі покажемо, що число $c(X)$ (найменший нескінченний кардинал m, такий, что потужність вілякого сімейства непорожніх відкритих множин, які не пертинаються попарно в X не перебільшує m) та число $w(X)$ (мінімум потужностей всіляких баз простору X) різні. Для даного топологічного простору $c(X)$ дорівнює $\aleph_0$ (потужність множини натуральних чисел $\mathbb{N}$, перший нескінченний радикал). Дійсно, існує зліченне сімейство непорожніх відкритих підмножин з цього простору, які попарно не перетинаються. Як приклад, таким буде набір півінтервалів $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right), \dots, \left[n - \frac{1}{2}; n + \frac{1}{2}\right), \dots$. Цей набір знаходиться у взаємно однозначному відображенні з множиною натуральних чисел. Потрібно довести, що всі сімейства з вказаними властивостями мають потужність, яка не перевищує число $\aleph_0$. Припустимо, що це не так. Нехай існує сімейство непорожніх відкритих підмножин цього простору, які попарно не перетинаються, потужність якого дорівнює $\aleph_1$ (потужність множини всіх зліченних порядкових чисел). Кожній відкритій множині з цього сімейства, а вона обов'язково має хоча б одну відкриту кулю – інтервал, можна поставити у відповідність раціональне число, яке належить цій кулі. Тому множина раціональних чисел еквівалентна множині елементів сімейства. Так як множина раціональних чисел зліченна, то потужність обраного набору підмножин також зліченна. Отримали протиріччя, отже, число $c(X)$ дорівнює $\aleph_0$.

Знайдемо число $w(X)$. Припустимо, що існує таке сімейство H відкритих підмножин з (X, τ), що $|H| = \aleph_0$ та H утворює базу топології. Існує така точка $x_0 \in \mathbb{R}$, яка не є точною нижньою гранню ніякого елемента з H. Тоді, відкриті множини $[x_0, x_0 + 1)$ не можна представити у вигляді обєднання елементів з сімейства H, та H не є базою топології. Отримане протиріччя приводить до висновку, що мінімум потужностей всіх можливих баз простору $\mathbb{R}$ дорівнює числу $\aleph_1$.

Отримані характеристики потужності топологічного простору – прямої Зоргенфрея – різні за своїм значенням. Отже, даний топологічний простір не є метризовним.

Твердження 2.2 Топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ є метризовним.

Доведення.

Розглянемо множину $\mathbb{R}^2$, елементи якого будемо позначати буквами $A, B, C, \ldots$. За елементом $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ зафіксуємо позначення O. Розглянемо сукупність τ підмножин з $\mathbb{R}^2$, яка складається з порожньої множини, відкритих куль $B_\varepsilon(O)$ радіуса ε з центром в точці O, множин вигляду $\{(A, B) \subset OA : (A, B) \cap O = \emptyset\}$, де OA – пряма, яка проходить через точки A та O, та всіх можливих об'єднань. Покажемо, що сімейство τ утворює топологію на $\mathbb{R}^2$ та дослідимо топологічний простір на метризовність $(\mathbb{R}^2, \tau)$.

Покажемо виконання аксіом топологічного простору. Маємо $\emptyset \in \tau$ за умовою, $\mathbb{R}^2 \in \tau$, бо для будь-якої точки з $\mathbb{R}^2$ можна вказати деяку підмножину з сімейства τ, яке містить цю точку, тобто $\mathbb{R}^2$ – об'єднання елементів з τ.

Покажемо виконання наступної аксіоми. Перетинами пар елементів з сімейства τ будуть або множини $\emptyset$ $(U_1 = \emptyset,\ U_2 \in \tau)$, або $B_\varepsilon(O)(U_1 = B_\varepsilon(O), U_2 = B_{\varepsilon 1}(O), \varepsilon < \varepsilon 1)$, або $(A, B) \subset OA$ $(U_1 = B_{OB}(O), U_2 = = (A, C) \subset OA$ або $U_1 = (C, A) \subset OA, U_2 = (B, D) \subset OA)$. Отже, аксіоми виконуються та з цього випливає, що $(\mathbb{R}^2, \tau)$, дійсно, топологічний простір.

Покажемо далі, що простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ є метризовним. Для цього необхідне виконання умов нормальності простору. Згідно означення 2.4 повинні виконуватись аксіоми відокремлюваності T_1 та T_4.

Розглянемо на одній прямій дві різні точки O та A. Околом точки O буде куля $U_1 = B_\varepsilon(O)$ з центром в цій точці та радіусом $\varepsilon > 0$, а для другої точки A окіл матиме вигляд $U_2 = B_\varepsilon(A)$ з центром в A та радіусом так само ε та $U_1, U_2 \subset \tau$. Множина U_1 не буде містити в собі точку A, аналогічно множина U_2 не буде містити в собі точку O. Тобто аксіома T_1 виконується.

Множини $U_1 \cap\ U_2 = \emptyset$ та U_1, U_2 – замкнені в τ. Вище було показано, що точка $O \in U_1$ та $O \notin U_2$, тоді з цього випливає, що $\tau \setminus U_2 = B_\varepsilon(O)$ – окіл точки O. Тобто буде виконуватись умова $B_\varepsilon(O) \bigcap U_2 = \emptyset$. Аналогічно для точки A буде $A \in U_2$ та $A \notin U_1$, тоді $\tau \setminus U_1 = B_\varepsilon(A)$. Тобто з цього випливає, що $B_\varepsilon(A) \bigcap U_1 = \emptyset$ та $B_\varepsilon(A) \cap B_\varepsilon(O) = \emptyset$. Аксіома T_4 виконується. Отже, топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ є нормальним.

Покажемо виконання другої аксіоми зліченності. Позначимо число $c(\mathbb{R}^2)$, яке буде дорівнювати потужності множини всіх зліченних порядкових чисел, тобто будь-яке сімейство непорожніх, відкритих множин, які попарно не перетинаються, має потужність, яка не буде перевищувати це значення. Прикладом такого сімейства буде набір інтервалів на всіх можливих прямих вигляду $y = kx, k \in \mathbb{R}$.

Покажемо, що даний топологічний простір не має зліченну базу. Дійсно, припустимо, що зліченна база σ існує, тоді кожному її елементу поставимо у відповідність дійсне число k, пряма $y = kx$, яка містить цей елемент. Тобто будь-яка відкрита множина в цій топології, яка належить прямій $y = k_0 x$, не буде об'єднанням елементів набору σ, звідки випливає, що σ не може бути базою топології. Таким чином, даний топологічний простір має не більш ніж зліченну вагу. Отже, друга аксіома зліченності виконується та топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ є метризовним.

Далі введемо метрику, яка буде породжувати топологію простору, який розглядаємо. Нехай ρ – звичайна евклідова метрика н площині $\rho(z_1, z_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, де $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$. Введемо нову функцію відстані на площині за формулою

$$d(z_1, z_2) =$$

$$= \begin{cases} \rho(z_1, z_2), \text{якщо пряма } z_1 z_2 \text{ проходить через початок координат,} \\ \rho(z_1, 0) + \rho(0, z_2), \text{якщо } z_1, z_2 \text{ не проходить через початок координат,} \\ 0, \text{якщо } z_1, z_2. \end{cases}$$

Покажемо, що $d(z_1, z_2)$ є метрикою на $\mathbb{R}^2$. Згідно означення 1.13 аксіоми метрики мають вигляд:

а) для будь-яких $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^2$ $d(z_1, z_2) \geq 0$;

б) $d(z_1, z_2) = 0$ тоді та тільки тоді, коли $z_1 = z_2$;

в) для будь-яких $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^2$ $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$;

г) для будь-яких $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}^2$ $d(z_1, z_3) \leq d(z_1, z_2) + d(z_1, z_3)$.

Аксіоми метрики виконуються. Покажемо їх виконання. Для аксіоми а) $d(z_1, z_2) \geq 0$, так як $\rho(z_1, z_2)$ – невід'ємна функція. Для пункту б) нехай $d(z_1, z_2) = 0$, тоді $z_1 = z_2$, так як у протилежному випадку $d(z_1, z_2) = \rho(z_1, z_2) > 0$, якщо пряма $z_1 z_2$ проходить через початок координат та $d(z_1, z_2) = (\rho(z_1, 0) + \rho(0, z_2)) > 0$, якщо пряма z_1, z_2 не проходить через початок координат. Це заперечує умові, що ρ – метрика. Навпаки, нехай $z_1 = z_2$, тоді очевидно, що $d(z_1, z_2) = 0$. Для аксіоми в) $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$, так як усі праві частини рівності $d(z_1, z_2) = \rho(z_1, 0) +$ $+\rho(0, z_2)$ симетричні відносно z_1 та z_2 $(\rho(z_1, z_2) = \rho(z_2, z_1)$ та $\rho(z_1, 0) +$

$+\rho(0, z_2) = \rho(z_2, 0) + \rho(0, z_1))$. Далі для г) $d(z_1, z_3) \leq d(z_1, z_2) + d(z_1, z_3)$. Потрібно розглянути всі можливі випадки розміщення точок z_1, z_2, z_3 на площині.

Перший випадок. Нехай $0 \in z_1 z_2,\ z_3 \in z_1 z_2$, тоді

$$d(z_1, z_2) = \rho(z_1, z_2) \leq \rho(z_1, z_2) + \rho(z_2, z_3) = d(z_1, z_2) + d(z_1, z_3).$$

Випадок другий. Нехай $0 \in z_1 z_2,\ z_3 \notin z_1 z_2$, отримуємо

$$d(z_1, z_2) = \rho(z_1, z_2) \leq \rho(z_1, z_2) + \rho(z_2, z_3) \leq$$
$$\leq \rho(z_1, 0) + \rho(0, z_3) + \rho(z_3, 0) + \rho(0, z_2) = d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2).$$

Третій випадок. Якщо $0 \notin z_1 z_2,\ z_3 \in 0z_1$, будемо мати

$$d(z_1, z_2) = \rho(z_1, 0) + \rho(0, z_2) \leq \rho(z_1, z_3) + \rho(z_3, 0) + \rho(0, z_2) =$$
$$= d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2).$$

Четвертий випадок. Якщо $0 \notin z_1 z_2,\ z_3 \notin 0z_1,\ z_3 \notin 0z_2$, тоді

$$d(z_1, z_2) = \rho(z_1, 0) + \rho(0, z_2) \leq \rho(z_1, 0) + \rho(z_3, 0) + \rho(0, z_2) + \rho(z_3, 0) =$$
$$= d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2).$$

Отже, d – метрика на $\mathbb{R}^2$.

Розглянемо вигляд відкритих куль відносно метрики d. Це дасть можливість порівняти відкриті відносно цієї метрики множини з елементами початкової топології. Нехай $B_\varepsilon(z_0)$ – куля в $(\mathbb{R}^2, d)$, тоді, за означенням 1.15 відкритої кулі $B_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid d(z, z_0) < \varepsilon\}$. Потрібно розглянути два випадки: $z_0 = 0$ та $z_0 \neq 0$. Нехай $z_0 = 0$. Тоді для будь-якого z $d(z, z_0) = d(z, 0) = \rho(z, 0)$ та означення відкритої кулі перепишеться у вигляді $B_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \rho(z, 0) < \varepsilon\}$. Отже, у випадку, коли центр кулі співпадає з початком координат, куля має вигляд відкритого кола радіуса ε з центром в точці $z_0 = 0$, тобто звичайна відкрита куля на площині $\mathbb{R}^2$. Розглянемо другий випадок, коли $z_0 \neq 0$, то покладемо, що $h = \rho(z_0, 0)$. Можливі два випадки: $\varepsilon \leq h$ та $\varepsilon > h$. Якщо $\varepsilon \leq h$, то всі елементи кулі $B_\varepsilon(z_0)$ лежать на прямій $0z_0$. Дійсно, якщо $z \notin 0z_0$, то $d(z, z_0) = \rho(z, 0) +$ $+\rho(0, z_0) > \rho(0, z_0) = h$. З умови $z \in 0z_0$ випливає, що $d(z, z_0) = \rho(z, z_0)$. Таким чином, куля $B_\varepsilon(z_0)$ у цьому випадку буде множиною точок площини, які лежать на прямій $0z_0$ та віддалених від точки z_0 на відстані, менше ніж ε. Іншими словами, це буде інтервал на прямій $0z_0$ з центром в точці z_0 та довжиною 2ε.

Нехай тепер $\varepsilon > h$. Якщо точка z належить кулі $B_\varepsilon(z_0)$, але не належить прямій $0z_0$, то $d(z, z_0) = \rho(z, 0) + \rho(0, z_0) = \rho(z, 0) + h < \varepsilon$, звідки $\rho(z, 0) < \varepsilon - h$. Це означає, що кулі $B_\varepsilon(z_0)$ належать ті точки, які віддалені від точки 0 на відстані, менше, ніж $\varepsilon - h$. Якщо точка z належить кулі $B_\varepsilon(z_0)$ та належить прямій $0z_0$, то $d(z, z_0) = \rho(z, z_0) < \varepsilon$, тобто кулі $B_\varepsilon(z_0)$ належать ті точки, які знаходяться на прямій $0z_0$, які віддалені від точки $0z_0$ на відстані, меншій, ніж ε. Таким чином, якщо $\varepsilon > h$, то відкрита куля $B_\varepsilon(z_0)$ є об’єднанням інтервалу прямої $0z_0$ з центром у точці z_0 та відкритої кулі з центром у точці 0 та радіусом $\varepsilon - h$.

Отже, відкриті множини з сімейства τ повністю співпадають з відкритими відносно метрики d на $\mathbb{R}^2$ множинами. А це означає, що топологічний простір $(\mathbb{R}^2, \tau)$ є меризовним простором.

2.2 Взаємодія топологічної структури та асиметрики на множині

Однією з фундаментальних математичних структур є структура метричного простору, яка стисло описана у розділі 1. У цьому пункті розглянемо математичну структуру близьку до метричної – асиметрику.

Означення 2.5 Функція $\rho: X \times X \to R_+$ називається *асиметрикою* у множині X, якщо виконуються наступні умови:

а) $\rho(x, y) = 0,$ тоді та тільки тоді,коли $x = y$;

б) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho, (z, y)$ для будь-яких $x, y, z \in X$.

З означення випливає, що асиметрика задовольняє умовам а) та в) з означення 1.13 метрики, але не задовольняє умові б).

Найпростішим прикладом асиметрики є найменша довжина шляху автомобіля між точками в місті, в якому є вулиці з одностороннім рухом.

Нехай функція $\rho: X \times X \to R$ є асиметрикою, тоді функція $\tilde{\rho}: (x, y) \to$ $\to \rho(x, y) + \rho(y, x)$ метрика на множині X [1].

Доведення. Дано функцію $\tilde{\rho}(x, y) = \rho(x, y) + \rho(y, x)$. Доведемо аксіоми метрики:

а) Відомо, що ρ – асиметрика. $\rho(x, y) = 0$ тоді та тільки тоді, коли $x = y$ за аксіомою а) з означення 2.1. Так само, $\rho(y, x) = 0$ тоді та тільки тоді, коли $x = y$. Нехай $x = y$, тоді $\rho(x, y) = 0$ та $\rho(y, x) = 0$. Отже, $\tilde{\rho}(x, y) = \rho(x, y) + \rho(y, x)$.

З іншого боку з $\tilde{\rho}(x, y) = 0$ випливає $\rho(x, y) + \rho(y, x) = 0$, звідки $\rho(x, y) = 0$ та $\rho(y, x) = 0$, так як $\rho(x, y) \geq 0$. Таким чином $x = y$, аксіому доведено.

б) Розглянемо функцію $\tilde{\rho}(y, x)$. Видно, що $\tilde{\rho}(y, x) \to \rho(y, x) +$ $+\rho(x, y) = \tilde{\rho}(x, y)$. Оскільки ρ – асиметрика, то ознака симетричності доведена.

в) Доведемо аксіому нерівності трикутника: $\tilde{\rho}(x, y) \leq \tilde{\rho}(x, z) + \tilde{\rho}(z, y)$. Маємо, що $\rho(x, y) + \rho(y, x) \leq \rho(x, z) + \rho(z, x) + \rho(z, y) + \rho(y, z) = \tilde{\rho}(x, z) +$ $+\tilde{\rho}(z, y)$. Тобто з цього випливає, що $\tilde{\rho}(x, y) \leq \tilde{\rho}(x, z) + \tilde{\rho}(z, y)$, де ρ – асиметрика. Аксіому доведено. Функція $\tilde{\rho}:(x, y) \to \rho(x, y) + \rho(y, x)$ є метрикою на множині X. Твердження доведено.

Означення 2.6 Нехай A, B – обмежені підмножини метричного простору (X, ρ). Асиметрикою від A до B називається число $a_p(A, B) = = sup_{b \in B} \rho(b, A)$ [1].

Покажемо коректність означення 2.6, тобто, що число $a_p(A, B)$ задовольняє аксіоми асиметрики. а) $a_p(A, B) = 0$, тоді та тільки тоді,коли $A = B$. Якщо $sup_{b \in B} \rho(b, A) = 0$, то $b = a$, де $\forall\, a \in A$, а це можливо тоді та тільки тоді, коли $A = B$. З іншого боку, якщо $A = B$, тоді $sup_{b \in B} \rho(b, A) = 0$. Отже, $a_p(A, B) = 0$. Аксіому доведено.

б) Перевіримо аксіому нерівності трикутника.

$$a_p(A, B) \leq a_p(A, C) + a_p(C, A)$$

$$sup_{b \in B} \rho(b, A) \leq sup_{b \in B} \rho(b, C) + sup \rho(C, A) = a_p(A, B) \leq a_p(A, C) + $$
$$+ a_p(C, A).$$

Аксіому доведено й це означає, що число $a_p(A, B)$ є асиметрикою.

У метричному просторі (X, ρ) множина B міститься у будь-якій замкненій множині, яка містить множину A, тоді та тільки тоді, коли $a_p(A, B) = 0$.

Твердження 2.3 Нехай A, B – многокутники на площині. Покладемо $a_\Delta(A, B) = S(B) - S(A \cap B) = S(B \setminus A)$, де $S(C)$ – площа многокутника C. Вираз a_Δ є асиметрикою на множині всіх плоских многокутників.

Доведення.

Перевіримо аксіоми асиметрики. а) $a_p(A, B) = 0$, звідси випливає, що $S(B \setminus A) = 0$, то з цього випливає, що $A = B$. З іншого боку, якщо $A = B$, то $A \cap B = 0$ й це означє, що $S(B \setminus A) = 0$. Отже, $a_p(A, B) = 0$. Аксіому доведено.

б) Перевіримо аксіому нерівності трикутника, яка має вигляд

$a_p(A, B) \leq a_p(A, C) + a_p(C, B)$. Маємо $S(B \setminus A) \leq S(C \setminus A) + +S(B \setminus C) = a_p(A, C) + a_p(C, B)$, звідки видно, що $a_p(A, B) \leq a_p(A, C) +$

$+a_p(C,B)$, тобто аксіому доведено. Тобто a_Δ є асиметрикою на множині всіх плоских многокутників.

Означення 2.7 Пара (X,ρ), де ρ. – асиметрика в X, називається *асиметричним простором*. Відомо, що будь-який метричний простір є асиметричним. У асиметричному просторі кулі (відкриті та замкнені) та сфери визначаються так само, як й в метричному просторі [1].

Множина всіх відкритих куль асиметричного простору є базою деякої топології. Цю топологію породжує асиметрика.

Твердження 2.4 Формула $a(x,y) = \max\{|x-y|,0\}$ визначає асиметрику в $[0,\infty)$ та топологія, яка породжена цією асиметрикою, є непорівнянною з топологією стрілки.

Доведення.

Перевіримо аксіоми асиметрики. 1) $a(x,y) = 0$ тоді та тільки тоді, коли $x = y$.

Якщо $a(x,y) = 0$, то $\max\{|x-y|,0\} = 0$ звідки слідує, що $|x-y| = 0$, а це можливо, коли $x = y$. Якщо розглядати з іншого боку, якщо $x = y$, то $x - y = 0$. Це означає, що $\max\{|x-y|,0\} = 0$ та $a(x,y) = 0$. Аксіома виконується.

Перевіримо аксіому 2): $a(x,y) \le a(x,z) + a(z,y)$,

$$\max\{|x-y|,0\} \le \max\{|\mathrm{x}-\mathrm{z}| + |\mathrm{z}-\mathrm{y}|,0\} = \max\{|x-z|,0\} + \max\{|z- -y|,0\},$$

тобто $a(x,y) \le a(x,z) + a(z,y)$. Аксіома виконується.

Отже, формула $a(x,y) = \max\{|x-y|,0\}$ визначає асиметрику на множині $[0,\infty)$. Розглянемо відкриті кулі топологічного простору $(\mathbb{R}_+,\tau)$, де топологія τ породжена цією асиметрикою. За означенням відкритої кулі з центром в точці x_0 і радіусом ε маємо $B_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}_+ | \max\{|x-x_0|,0\} < < \varepsilon\}$. За означенням максимуму отримаємо нерівність $|x-x_0| < \varepsilon$, а значить відкритими кулями є інтервали вигляду $(x_0 - \varepsilon; \varepsilon + x_0)$. Наприклад, куля з центром у точці 2 з $\mathbb{R}_+$ буде мати вигляд $B_\varepsilon(2) = (2 - \varepsilon; \varepsilon + 2)$.

Порівняємо топологію, породжену асиметрикою, з топологією стрілки на множині $\mathbb{R}_+$ за теоремою 1.5 у першому розділі. Відкрита множина $[x, \to)$ з топології стрілки не є вікритою множиною в топології асиметрики. Дійсно, точка x не є внутрішньою точкою. Так само відкрита куля $(x_0 - \varepsilon; \varepsilon + x_0)$ в топології асиметрики не є відкритою множиною в топології стрілки, тут кожна кулі не внутрішньою. Отже, ці топології непорівнянні.

Але якщо ці дві топології індукувати на множині цілих невід'ємних чисел, то отримаємо рівносильні топології, бо кожна з них співпадає з дискретною топологією на множині цілих невід'ємних чисел.

2.3 Простір Рісса як поєднання структур векторного простору та частково впорядкованої множини

Поняття векторної гратки пов'язує в собі дві математичні структури. Наприклад, якщо говорити про курс функціонального аналізу, то таке явище як поєднання двох структур зустрічається неодноразово, тобто йде мова про поняття топологічного векторного простору та, наприклад, нормований простір. Є ще й інші приклади.

Означення 2.8 Лінійний простір E над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел називається впорядкованим векторним простором, якщо E є частково впорядкованою множиною, тобто на E задано відношення часткового порядку $\leq$ (рефлексивне $x \leq x$, антисиметричне $((x \leq y) \wedge (y \leq x)) \Rightarrow (x = = y)$ і транзитивне $((x \leq y) \wedge (y \leq z)) \Rightarrow (x \leq z)$ відношення), яке пов'язане з лінійною структурою на E у вигляді наступних двох аксіом:

а) для довільних $x, y \in E$, якщо $x \leq y$, то $x + z \leq y + z$ для кожного $z \in E$;

б) для довільних $x, y \in E$, якщо $x \leq y$, то $\alpha x \leq \alpha y$ для кожного $\alpha \geq 0$.

Твердження 2.5 Нехай E – впорядкований векторний простір, $x, y, u, v \in E$, причому $x \leq y$ і $u \leq v$. Довести, що $-x \geq -y$ і $x + u \leq y + v$ [9].

Доведення.

Доведемо першою нерівність $-x \geq -y$. Додамо до обох частин нерівності $x \leq y$ вираз $-x - y$ та отримаємо наступну нерівність:

$$-x - y + x \leq -x - y + y.$$

Після скорочення подібних доданків отримаємо, що $-x \geq -y$. Першу нерівність доведено.

Доведемо наступне $x + u \leq y + v$. Маємо початкову умову $x \leq y$ та $u \leq v$, то можна стверджувати, що $x + u \leq\ y + u \leq y + v$ за властивістю транзитивності. Тобто нерівність $x + u \leq y + v$ доведена.

Нагадаємо, що точною верхньою межею або супремумом непорожньої підмножини A частково впорядкованої множини E називається такий елемент $supA \in E$, що

а) $x \leq supA$ для довільного $x \in A;$

б) для кожного $z \in E$, якщо $x \leq z$ для всіх $x \in A$, то $supA \leq z.$

Аналогічно вводиться поняття точної нижньої межі або інфімуму непорожньої підмножини E.

Означення 2.9 Впорядкований векторний простір E називається *векторною граткою* або *простором Рісса*, якщо для довільної пари елементів $x, y \in E$ існує точна верхня і точна нижня межі $x \vee y = \sup\{x, y\}$, $x \wedge y = \inf\{x, y\}$ в E.

Зауважимо, що перевірка умов означення 2.9 може бути спрощена, а саме доситатньо вимагати існування лише супремума або лише інфімума. Далі розглянемо приклади. Найпростішими та найважливішими прикладами як впорядкованих векторних просторів, так і векторних граток є простори функцій. Нехай Ω – довільна множина. Довільний лінійний простір F функцій $f: \Omega \to \mathbb{R}$ є прикладом впорядкованого векторного простору відносно поточкового порядку $f \leq g$ тоді та тільки тоді, коли $f(\omega) \leq g(\omega)$ для кожного $\omega \in \Omega$.

У наступному твердженні прослідкуємо взаємодію двох математичних структур: лінійної та частково впорядкованої структур.

Твердження 2.6 Впорядкований векторний простір $\mathrm{P_n}$ всіх многочленів $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ степеня, не вищого за n, не є векторною graткою, де $n \in \mathbb{N}$. Аналогічно, впорядкований векторний простір P всіх многочленів $\mathrm{P} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{P_n}$ не є векторною граткою.

Доведення.

Многочлен n-го степеня має вигляд:

$$\mathrm{P_n}(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.$$

Многочлени першого та другого степеня будуть мати вигляд:

$$n = 1\text{: } \mathrm{P_1}(x) = a_0x + a_1,$$
$$n = 2\text{: } \mathrm{P_2}(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$$

й так далі.

Розглянемо многочлени $P(x)$, $Q(x) \in \mathrm{P_n}$, то $\deg(P(x) + Q(x)) \leq n$ та звідси випливає, що $P(x) + Q(x) \in \mathrm{P_n}$. Якщо $\deg(\alpha P(x)) \leq n$, то звідси випливає, що $\alpha P(x) \in \mathrm{P_n}$. Введені операції мають всі вісім властивостей, які легко перевірити у загальному вигляді. Таким чином, простір $\mathrm{P_n}$ всіх многочленів $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ степеня, не вищого за n, буде лінійним.

Введемо в просторі $\mathrm{P_n}$ відношення часткового порядку $\leq$. Розглянемо пару многочленів $P(x)$, $Q(x) \in \mathrm{P_n}$. Наприклад, $P(x) = x + 1,\ Q(x) = \frac{1}{2}x - 1.$

Знайдемо різницю цих многочленів $P(x)-Q(x)=x-1-\frac{1}{2}x-1=\frac{1}{2}x$. Многочлени $P(x), Q(x)$ порівняти між собою не можна.

Розглянемо, наприклад, $P(x)=x+1, Q(x)=x+7$ та знайдемо їх різницю $P(x)-Q(x)=x+1-x-7=-6<0$. Тобто це означає, що $P(x)\leq Q(x)$.

Розглянемо многочлени $P(x)=x^2-2$, $Q(x)=2x^2-1$. Знайдемо їх різницю $P(x)-Q(x)=x^2+1-2x^2+1=-x^2-1<0$, а це означає, що $P(x)\leq Q(x)$. Отже, між многочленами $P(x)$ та $Q(x)$ можна встановити відношення часткового порядку $\leq$. Тобто $\mathrm{P_n}$ – лінійний частково впорядкований простір. Легко переконатись, що умови а), б) з означення 2.8 виконуються. Отже, можна зробити висновок, що $\mathrm{P_n}$ – векторний частково впорядкований простір.

За означенням 2.9 про векторну гратку, потрібно показати, що для довільної пари елементів цього простору існує точна верхня або точна нижня межа. Розглянемо многочлени $P(x)=2x-3, Q(x)=x-3$. Достатньо знайти лише точну верхню межу:

$$\max_{x\in\mathbb{R}}\{P(x),Q(x)\}=\max_{x\in\mathbb{R}}\{2x-3,x-3\}=\infty,$$

отже, верхня межа дорівнює нескінченності на $x\in\mathbb{R}$, тобто точної верхньої межі не існує. Це означає, що $\mathrm{P_n}$ – не є простором Рісса або векторною граткою.

Аналогічно, впорядкований векторний простір P всіх многочленів $\mathrm{P}=\bigcup_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}}\mathrm{P_n}$ також не є векторною граткою. Многочлени степеня $\mathrm{n}\in\mathbb{N}$ не будуть мати точну верхню межу. Твердження доведено.

Твердження 2.7 Нехай T – топологічний простір. Множина $C(T)$ всіх неперервних функцій $f: T\to\mathbb{R}$ є векторною граткою відносно поточкового порядку.

Доведення.

Розглянемо спочатку дискретний топологічний простір $T = (M, \tau)$ на множині $M = \{a, b, c\}$. Отже, $\tau = \{\emptyset,\ a, b, c, ab, ac, bc, abc\}$. Неперервними функціями $f: T \to \mathbb{R}$ будуть, наприклад, функції вигляду

$$f: a \to 1; b \to 2; c \to 3 \text{ та } f': a \to 1; b \to 1; c \to 1.$$

Дійсно, за критерієм неперервності, для будь-якої відкритої множини v з $\mathbb{R}$ її прообразом є елемент з τ. Наприклад, $f^{-1}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) = \emptyset$, $f^{-1}\left(\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right) = \{a\}$.
Покажемо, що простір $C(T)$ є лінійним. Суму функцій означимо як поточкову операцію. Тобто, для розглянутих функцій отримаємо

$$f + f': a \to 2; b \to 3; c \to 4.$$

Аналогічно, визначимо множення функції на число α як поточкову операцію. Наприклад, $\alpha f: a \to \alpha; b \to 2\alpha; c \to 3\alpha$.

Очевидно, сума неперервних функцій та добуток на число теж будуть неперервними функціями. Введені операції мають всі вісім властивостей, які легко перевірити у загальному вигляді. Таким чином, простір $C(T)$ всіх непервних функцій буде лінійним.

Введемо в просторі $C(T)$ відношення часткового порядку $\leq$ за правилом: $f \leq f'$ тоді та тільки тоді, коли $(\forall\, x \in T): f(x) \leq f'(x)$. У розглянутому прикладі

$$f'(a) = f(a),$$
$$f'(b) < f(b),$$
$$f'(c) < f(c),$$

звідки випливає, що $f'(x) \leq f(x)$. Наведемо приклад непорівнянних функцій. Розглянемо функцію $g: T \to \mathbb{R}$ таку, що $g: a \to 2; b \to 1; c \to 3$, та порівняємо її з функцією f: $f(a) < g(a)$, $f(b) > g(b)$, $f(c) = g(c)$. З цього випливає, що функції f, g не можна порівняти між собою. Легко переконатись, що умови а), б) з означення 2.8 виконуються. Отже, можна зробити висновок, що $C(T)$ – векторний частково впорядкований простір.

Залишилось показати, згідно означення 2.10 про векторну гратку або простір Рісса, що для довільної пари функцій з $C(T)$ існує точна верхня або точна нижня межа. Розглянемо, наприклад, функції $f, g \in C(T)$. Функція $h: a \to 1; b \to 1; c \to 3$ належить простору $C(T)$ і $(\forall\, x \in T): h(x) \leq f(x) \wedge h(x) \leq g(x)$. Отже, $\inf\{f, g\} = h(x)$.

Так само й у загальному вигляді для функцій $f(x)$ та $g(x)$ для кожної пари відповідних значень буде існувати їх точна нижня межа, а, отже, буде існувати $\inf\{f, g\}$. Твердження доведено.

ВИСНОВКИ

У роботі було розглянуто особливості поєднання математичних структур на одній множині. У першому розділі наведено основні теоретичні відомості та приклади топологічної та метричної структур, векторного простору та часткового порядку. У другому розділі досліджено взаємодію поєднання топологічної та метричної структур, а саме через метризовність топологічного простору. Було розглянуто аксіоми відокремлюваності для доведення метризовності простору, теорему Урисона – достатню умову метризовності. Досліджено властивості метризовних структур та наведено нетривіальні приклади метризовних та неметризовних топологічних просторів. Доведено твердження 2.2 про знаходження явного вигляду метрики, яка породжує топологію метризовного топологічноо простору. У твердженні 2.1 показано неметризовність топологічного простору – стрілки Зоргенфрея.

У другому пункті також було розглянуто математичну структуру близьку до метричної – асиметрику та її поєднання з топологічною. Твердження 2.4 демонструє вплив асиметрики на топологічну структуру.

Розглянуто простір Рісса, який простір поєднує в собі структуру векторного простору та частвово впорядкованої множини. У твердженні 2.7 доведено, що множина $C(T)$ всіх неперервних функцій $f: T \to \mathbb{R}$ є векторною браткою відносно поточкового порядку.

Кваліфікаційна робота дає достатнє уявлення про побудову різних математичних структур на одній множині та про дослідження їх взаємозв’язку. Матеріал роботи можна використати в навчальному процесі.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Виро О. Я., Иванов О. А., Нецветаев Н. Ю., Харламов В. М. Элементарная топология. Москва : МЦНМО, 2010. 362 с.

2. Александров П. С. Лекции по аналитической геометрии, пополненные необходимыми сведениями из алгебры. Москва : Наука, 1968. 912 с.

3. Нечаев В. И. Числовые системы. Москва : Просвещение, 1975. 199 с.

4. Борисович Ю. Г., Близняков Н.М., Израилевич Я. А., Фоменко Т. Н. Введение в топологію. Москва : Наука. Физматлит, 1995. 416 с.

5. Бондаренко В.А., Морозов А.Н., Николаев А.В. Метрические пространства: учеб. пособ. Ярославль : ЯрГУ, 2017. 109 с.

6. Бабич В.М., Пєхтєрєв В.О. Загальна топологія в задачах і прикладах: навч. посіб. Камянець-Подільський: Аксіома, 2015.207 с.

7. Александров П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию. Москва : Наука, 1977. 366 с.

8. Энгелькинг Р. Общая топология / Пер. с англ. А.В. Архангельского, М.Я. Антоновского. Москва : Мир, 1986. 752 с.

9. Попов М. М. Векторні Гратки і додатні оператори. Чернівці : 2011. 39 с.