

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра загальної математики

**КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА**

на тему: «ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНА МОДЕЛЬ  
НЕОДНОРІДНОГО МАТЕРІАЛУ НА ОСНОВІ  
ОДНОЕЛЕМЕНТНИХ МОДЕЛЕЙ»

Виконала студентка 2 курсу, групи 8.1118  
Спеціальності 111 математика  
(шифр і назва спеціальності)  
освітньої програми математика

А.О. Піморенко  
(ініціали та прізвище)  
завідувач кафедри фундаментальної  
математики, доцент, д.т.н.

Керівник Гребенюк С. М.  
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Рецензент декан математичного факультету,  
професор, д.т.н. Гоменюк С. І.  
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

Факультет математичний

Кафедра загальної математики

Рівень вищої освіти магістр

Спеціальність 111 математика

(шифр і назва)

Освітня програма математика

**ЗАТВЕРДЖУЮ**

Завідувач кафедри  
загальної математики,  
к.ф.-м.н., доцент

Зіновеєв І.В.

(підпис)

« 30 » травня 2019 р.

**З А В Д А Н Н Я**

**НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТЦІ**

Піморенко Анастасії Олександрівні

(прізвище, ім'я та по батькові)

1. Тема роботи Пружно-пластична модель неоднорідного матеріалу на основі  
одноелементних моделей

керівник роботи Гребенюк Сергій Миколайович, д.т.н., доцент

(прізвище, ім'я та по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затвержені наказом ЗНУ від « 29 » травня 2019 року № 811-с

2. Строк подання студентом роботи 26.12.2019

3. Вихідні дані до роботи 1. Постановка задачі.

2. Перелік літератури.

3. Перелік задач до розв'язання

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)

1. Постановка задачі.

2. Основні теоретичні відомості.

3. Пружно-пластична модель неоднорідних матеріалів

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень) \_\_\_\_\_

Презентація

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання 30.05.2019

### КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	04.06.2019	
2.	Збір вихідних даних.	02.07.2019	
3.	Обробка методичних та теоретичних джерел.	12.08.2019	
4.	Розробка першого розділу.	27.09.2019	
5.	Розробка другого розділу.	26.11.2019	
6.	Оформлення та нормоконтроль кваліфікаційної роботи.	26.12.2019	
7.	Захист кваліфікаційної роботи.	16.01.2020	

Студент \_\_\_\_\_  
(підпис)

А.О. Піморенко  
(ініціали та прізвище)

Керівник роботи \_\_\_\_\_  
(підпис)

С.М. Гребенюк  
(ініціали та прізвище)

### Нормоконтроль пройдено

Нормоконтролер \_\_\_\_\_  
(підпис)

О.Г. Спиця  
(ініціали та прізвище)

## РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Пружно-пластична модель неоднорідного матеріалу на основі одноелементних моделей»: 40 с., 14 рис., 24 джерела.

АНІЗОТРОПІЯ, ГОМОГЕНІЗАЦІЯ, ДЕФОРМАЦІЯ, ЖОРСТКО-ПЛАСТИЧНА МОДЕЛЬ МІЗЕСА, ЗАКОН ГУКА, МОДЕЛЬ ПРАНДТЛЯ, ПЛАСТИЧНІСТЬ, ПРУЖНІСТЬ, РЕОЛОГІЧНІ МОДЕЛІ.

Об'єкт дослідження – диференціальні співвідношення пружно-пластичності.

Мета роботи: застосувати диференціальні співвідношення до моделювання пружно-пластичності у неоднорідних матеріалах .

Метод дослідження – аналітичний.

Кваліфікаційну роботу присвячено побудові моделей і виведенню диференціальних співвідношень пружно-пластичних процесів. У роботі досліджено диференціальні моделі Мізеса та Прандтля. На основі моделі жорстко-пластичного середовища побудовано модель деформування волокнистого композиційного матеріалу, у якого матриця пружно-пластична, а волокно – пружне. Отримано співвідношення для двох ефективних характеристик гомогенізованого матеріалу і з їх використанням записано пружно-пластичний закон деформування композиту.

## SUMMARY

Master's Qualification Thesis «Elastic-Plastic Modeling of Inhomogeneous Material Based on Single-Element Models»: 40 pages, 14 figures, 24 references.

ANISOTROPY, HOMOGENIZATION, DEFORMATION, MIESES RIGID-PLASTIC MODEL, HOOKE'S LAW, PRANDLE MODEL, PLASTICITY, ELASTICITY, REOLOGICAL MODELS.

The object of the study is differential elastic plasticity ratio.

The aims of the study apply differential equations to elastic plasticity modeling in non-homogeneous materials.

The method of research is analytical.

Thesis is devoted to the construction of models and the derivation of differential equations of elastic plastic processes. Differential Prandtl and Mises models are investigated in this paper. On the basis of the rigid-plastic environment model, a model of deformation of fibrous composite material, whose matrix is elastic, and fiber is plastic, is constructed. A correlations for two effective characteristics of a homogenized material were obtained. The elastic plastic deformation law of a composite was recorded with their use.

## ЗМІСТ

Завдання на кваліфікаційну роботу .....	2
Реферат .....	4
Summary .....	5
Вступ.....	7
1 Основні теоретичні відомості .....	9
1.1 Методи осереднення механічних характеристик композиційних матеріалів.....	9
1.2 Поняття пружної та пластичної одноелементних моделей.....	12
1.3 Визначальні співвідношення лінійної пружної моделі .....	16
2 Пружно-пластичні моделі та їх співвідношення.....	20
2.1 Прості реологічні моделі .....	20
2.2 Пружно-пластичні середовища.....	23
3 Пружно-пластична модель неоднорідного матеріалу .....	28
Висновки .....	37
Перелік посилань.....	38

## ВСТУП

Сучасні дослідження напружено-деформованого стану та міцності матеріалів та конструкцій значну увагу приділяють різним аспектам математичного моделювання механічної поведінки. Досліджувані тіла та матеріали часто поводять себе як нелінійні об'єкти, тому для дослідження їхнього напружено-деформованого стану часто недостатньо обмежитись використанням лише пружної моделі однорідного тіла. Причому матеріали, що розглядаються, можуть бути як неоднорідними за початковою своєю природою, так і ставати такими внаслідок впливу зовнішнього середовища.

Питання адекватного моделювання неоднорідних структур стають усе більш актуальними як у теоретичному відношенні, так і в прикладному аспекті, оскільки з'ясування поведінки досліджуваних структур безпосередньо впливає на ефективність та безпеку певних матеріалів або навіть комплексів.

Диференціальні рівняння є одним із важливих розділів математики, який вивчає теоретичні відомості та способи розв'язання рівнянь, що містять шукану функцію та її похідні різних порядків одного аргументу (звичайні диференціальні рівняння) або кількох аргументів (диференціальні рівняння в частинних похідних).

Диференціальним рівнянням описується зв'язок між невідомою функцією, її похідними та аргументом. Створенні за допомогою диференціальних рівнянь математичні моделі дозволяють описувати явища та процеси і при їх дослідженні отримувати нові знання.

Одним із розділів механіки де широко використовуються диференціальні співвідношення є теорія пружності, що описує достатньо плинні процеси зміни напружень і деформацій із часом у деформівних твердих тілах. Використання як основних досить простих диференціальних співвідношень, що описують процес деформування тіла, створення на їх основі різних комбінацій дозволяє розробляти адекватні математичні моделі.

Розв'язання задач теорії пружності зводиться до інтегрування системи диференціальних рівнянь у частинних похідних, що визначають поведінку пружного тіла у внутрішніх точках. До цих рівнянь додаються умови на поверхні, що обмежує тіло. Ці умови визначають завдання або зовнішніх поверхневих сил, або переміщень точок поверхні тіла.



# 1 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

## 1.1 Методи осереднення механічних характеристик композиційних матеріалів

При дослідженні волокнистих композиційних матеріалів необхідно врахувати значну кількість механічних аспектів. Однією з основних проблем при розв'язанні задач механіки композитів є адекватне визначення пружних властивостей композиційного матеріалу. Щоб реалізувати дане завдання використовують найпоширенішу тенденцію, яка враховує специфічні властивості матриці та волокна (анізотропію, пластичність, в'язкопружність та інші) при визначенні властивостей композита, а також враховує особливості їх сумісного деформування. Але не завжди можна отримати адекватні результати розрахунку напружено-деформованого стану конструкцій із композитів без урахування анізотропних властивостей волокна та матриці.

Основними шляхами визначення механічних характеристик композиційних матеріалів є спроби врахування особливих властивостей матеріалів матриці та волокна (анізотропії, в'язкопружності, температурного розширення, пластичності, слабкої стисливості та інших) та особливостей сумісного деформування матриці та волокна (контакту матеріалу матриці з матеріалом волокна, особливостей зчеплення між ними, наявності перехідного шару між матеріалами, дифузії, наявності пошкоджень тощо). Але, на жаль, врахування таких особливостей неможливо описати простими математичними моделями, до яких не вдається застосувати аналітичні методи. При застосуванні цих моделей використовують наближені методи (асимптотичні, чисельні), які, як правило, дають не аналітичні співвідношення, а числові значення механічних характеристик.

Структурний підхід передбачає визначення пружних характеристик композита через пружні характеристики матриці та армуючих волокон, їх

об'ємні частки в композиті, розміри та взаємне розташування армуючих елементів. Але пружні характеристики структурних складових можуть значно відрізнятись у вихідному стані і в композиті, що є суттєвим недоліком такого методу.

Існує багато аналітичних розв'язків гомогенізації в результаті яких отримано ефективні механічні характеристики композиційних матеріалів. Можна відзначити роботи [12], [7], [1], у роботі Ваніна Г. А. [3] для отримання ефективних характеристик застосовано функції комплексної змінної.

При визначенні ефективних механічних характеристик широкого застосування набули асимптотичні методи, які описані у таких роботах. Основи варіаційного асимптотичного методу (VAMUCH) для визначення властивостей композитів, викладені в роботах [18, 19, 20, 21]. Підходи до визначення пружно-пластичних, електромагнітопружних та інших властивостей композитів за допомогою варіаційного асимптотичного методу наведено у монографії [18]. Була сформульована варіаційна постановка для елементарної комірки гомогенізації за допомогою асимптотичного розкладання функціонала енергії. Для отримання чисельних результатів використовувався метод скінченних елементів, за допомогою якого були визначені локальні поля в границях елементарної комірки, на основі яких можна відновити глобальну поведінку матеріалу. Перевагами методу є те, що за його допомогою визначаються властивості матеріалу за всіма напрямками одночасно в результаті розв'язання однієї задачі. У статті [21] описане застосування варіаційного асимптотичного методу для елементарної комірки гомогенізації для дослідження ефективних властивостей волокнистого композиційного матеріалу, а також напружено-деформованих полів на макрорівні.

В роботах [4-6] показано застосування методу асимптотичного осереднення до визначення пружних сталих волокнистого і тканинного композита. Так, в роботі Димитрієнка Ю.І., Соколова А.П. [6] для задач теорії пружності викладені основи методу асимптотичного осереднення (методу Бахвалова-Побєдрі), а також основи методу скінченних елементів для

розв'язання локальних задач теорії пружності на «комірці періодичності» та розрахунку ефективних пружних характеристик композитів. В статті Димитрієнка Ю.І., Соколова А.П. [5] сформульовані рекурентні послідовності локальних та осереднених задач теорії пружності на комірках періодичності різних структурних рівнів. Робота Димитрієнка Ю.І., Соколова А.П. [4] також присвячена розширенню методу асимптотичного осереднення періодичних структур на випадок багаторівневих ієрархічних структур. На основі методу скінченних елементів проведено міцнісний розрахунок тканинного композиційного матеріалу.

Застосування статистичних та ймовірнісних підходів при розв'язанні задачі гомогенізації композиційних матеріалів описане в нижченаведених роботах. Значний обсяг досліджень в напрямку визначення ефективних механічних характеристик композитів, у тому числі односпрямованих неперервно-волокнистих узагальнено в монографії [9]. У монографії [17] представлено широкий спектр методів із застосуванням імовірнісних та статистичних підходів, які дозволяють описувати механічну поведінку композитів, у тому числі волокнистих та нанокомпозитів. Розглядаються різні підходи до визначення пружних сталей при наявності пошкоджень, тріщин, дифузії, температурних факторів, реологічних процесів і т.ін.

Дослідженню пластичних деформацій при моделюванні деформування композиційних матеріалів присвячено такі роботи. В статті [16] описаний метод гомогенізації та його застосування при дослідженні пружно-пластичної поведінки композита з випадково розподіленими односпрямованими круглими волокнами та пластичною матрицею. Порухнення зчеплення волокна та матриці випадковим впливом при деформуванні моделювався заміною відповідних волокон циліндричними пустотами. Пружні сталі трифазного композита (матриця, циліндричне волокно та пустота циліндричної форми, яка моделює порушення зчеплення волокна з матрицею) знаходились як комбінація тензорів пружних сталей матеріалу матриці й матеріалів включень. Матеріал матриці та волокна вважався ізотропним.

Методом просторових характеристик [2] досліджено процес локального руйнування композиційного матеріалу, який обумовлений обривом одного з волокон. При цьому матеріал моделювався так. Волокно, що обривається, вважалось пружним, об'єм матриці навколо нього вважався пружно-в'язко-пластичним, а весь масив композиційного матеріалу вважався трансверсально-ізотропним, однорідним.

У монографії [10] наведено низку постановок одновимірних, дво- та тривимірних задач для отримання ефективних пружних характеристик пружних, в'язкопружних та пружно-пластичних волокнистих композитів. При розв'язанні таких задач застосовуються як точні, так і наближені методи.

В роботі [11] наводяться методи, що дозволяють моделювати поведінку композиційних матеріалів у різних умовах деформування. Наведено відомості про застосування різних методів опису композиційних матеріалів на мікрорівні. Розглянуті моделі пружної, в'язкопружної, пружно-пластичної, термопружної поведінки композитів, ряд моделей механіки руйнування.

Врахування пластичних властивостей компонентів для визначення ефективних характеристик у останніх дослідженнях також відбувалося наближеними методами з використанням підходів лінеаризації [22], асимптотичних [23] та чисельних [24] методів.

## **1.2 Поняття пружної та пластичної одноелементних моделей**

Опір матеріалу деформуванню визначається в основному трьома його властивостями – пружністю, в'язкістю та пластичністю. Враховуючи складність процесів та тривимірність тіл побудовано значну кількість рівнянь та систем рівнянь, що описують сказані процеси. Вони, як правило, базуються на інтегральних та диференціальних співвідношеннях. Ці математичні моделі досить складні і передбачають застосування до них наближених методів. Більш

прості співвідношення базуються на одноелементних моделях, що включають пружний, пластичний та в'язкий елемент. Розглянемо їх детально.

**Пружна модель** є найпростішою і застосовується найбільш часто. Вона являє собою лінійно-деформуючу середу, тобто середу, в якій напруження і деформації пов'язані лінійними залежностями. Ідеально пружне середовище може бути наочно представлене структурною схемою у вигляді пружини (рис.1.1а), що характеризується певною жорсткістю (модулем пружності  $E$ ), яка розтягується напруженнями  $\sigma$ , причому деформації пружини  $\varepsilon$  підпорядковані фізичному закону Гука відповідно до діаграми напруження ( рис.1.1б):

$$\sigma = E \cdot \varepsilon. \quad (1.1)$$

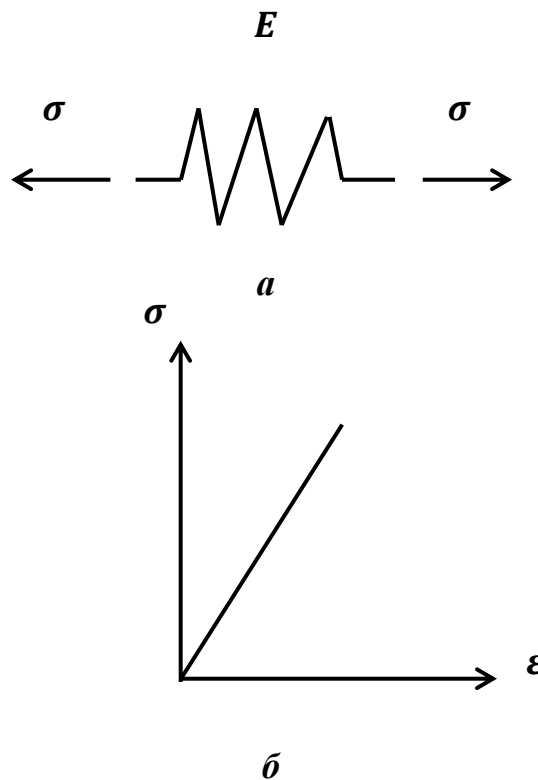


Рисунок 1.1 – Пружна модель (модель Гука):  
а – структурна схема; б – діаграма напруження

У разі об'ємного напруженого стану, деформації можуть бути визначені за допомогою рівнянь, в яких використовуються дві незалежні константи –

модуль пружності  $E$  і коефіцієнт поперечних деформацій  $\nu$ , модуль зсуву може бути обчислений за значеннями  $E$  і  $\nu$ .

Слід зазначити, що в багатьох випадках застосування пружною моделі не вимагає в якості обов'язкової умови здатності матеріалів відновлювати початкові форми і розміри при знятті навантажень. Якщо матеріали при розгляді конкретних завдань відчують деформації одного знака, то досить, якщо діаграма « $\sigma - \varepsilon$ » при навантаженні буде близька до лінійної. У цьому сенсі пружну модель масиву також називають лінійний-деформованим середовищем, причому її властивості в подібних випадках характеризуються модулем деформації, тобто коефіцієнтом пропорційності між напруженням і деформаціями.

Незважаючи на простоту виразів і порівняно малу адекватність подібної моделі поведінки реальних масивів, пружна модель має досить дивовижну властивість – її застосування забезпечує отримання верхніх максимально можливих значень напружень і нижньої межі, тобто мінімально можливих значень деформацій для досліджуваних об'єктів.

Для середовища, в якому властивості в різних напрямках неоднакові, можуть застосовуватися моделі анізотропних пружних середовищ, з яких найбільшого поширення набула модель трансверсально-ізотропного середовища.

Таке середовище характеризується постійністю властивостей в різних напрямках тільки для певним чином орієнтованих площин, які називаються площинами ізоотропії. В інших напрямках, зокрема, в напрямку, перпендикулярному до площини ізоотропії, властивості мають інші значення. Фізичною моделлю такого середовища може служити книга, де площини ізоотропії – сторінки.

**Пластична модель** дозволяє відображати здатність тіла до пластичних (необоротних) деформацій. Механізм пластичної деформації пов'язаний зі зрушеннями матеріалу по деякій площині, в зв'язку з цим структурну схему

ідеально пластичного середовища можна представити у вигляді елемента тертя (рис.1.2).

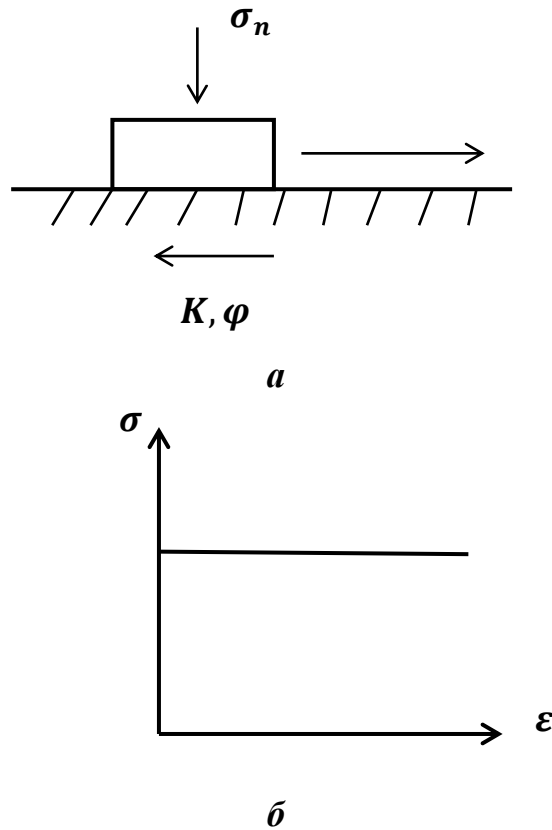


Рисунок 1.2. – Ідеально-пластична модель:  
а – структурна схема; б – діаграма напружень

Умова ковзання описується рівнянням (умова Кулона – Мора):

$$\tau = K + \sigma_n \cdot \operatorname{tg} \varphi, \quad (1.2)$$

де  $K$  – коефіцієнт зчеплення (опір зсуву, який залежить від величини нормального тиску);  $\sigma_n$  – нормальні напруження на площині ковзання;  $\varphi$  – кут внутрішнього тертя.

Умова (1.2) також називають умовою граничного стану. Вона покладена в основу теорії граничної рівноваги тіл.

Якщо тіло поряд з пружними проявляє ще й пластичні властивості, використовують пружно-пластичні моделі, які представляють собою поєднання пружних і пластичних елементів (рис.1.3).

При цьому до певної межі, що визначається умовами граничної рівноваги (1.2), в моделі розвиваються тільки пружні деформації, а після досягнення цієї межі – пластичні. Відповідно до цього виділяються пружна і пластична області.

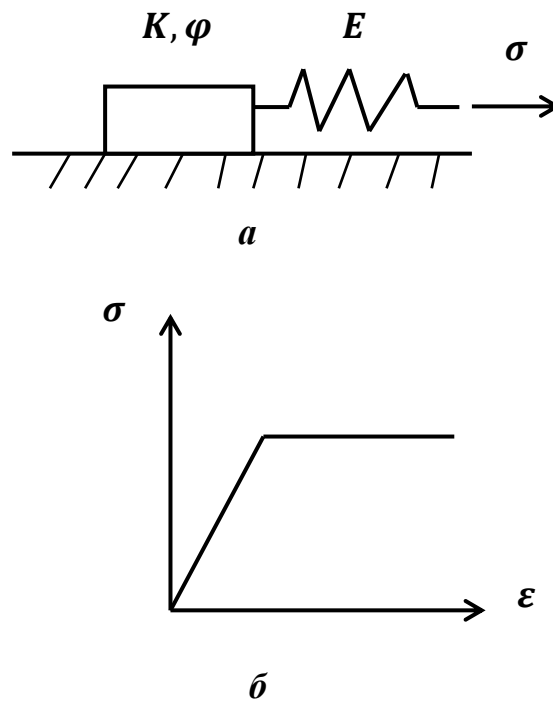


Рисунок 1.3. – Пружно-пластична модель:  
а – структурна схема; б – діаграма напружень

### 1.3 Визначальні співвідношення лінійної пружної моделі

З'ясуємо деякі базові поняття механіки суцільних середовищ, що використовуються при побудові механічних моделей неоднорідних середовищ. До фундаментальних понять відноситься поняття суцільного середовища, яке є спрощеною моделлю реальних тіл. У цій моделі вважають, що будь-який об'єм середовища утворює так званий матеріальний континуум.



Суцільне середовище, фізико-механічні властивості якого змінюються від точки до точки, називається неоднорідним. Від неоднорідності слід відрізнити анізотропію середовища.

Анізотропією називається неоднаковість властивостей середовища, наприклад, фізичних, по різних напрямкам всередині цього середовища.

Ізотропним називають середовище, якщо ж певні властивості у всіх напрямках однакові. По відношенню до одних властивостей середовище може бути ізотропним, а по відношенню до інших – анізотропним.

Частковим випадком анізотропії є ортотропія – неоднаковість властивостей середовища по взаємно перпендикулярним напрямкам. Зупинимось на розгляді моделі ізотропного лінійно-пружного середовища.

Для постановки основних задач використовують такі групи рівнянь і співвідношень:

а) фізичні рівняння (рівняння рівноваги) у напруженнях, які вірні для довільних суцільних твердих тіл, і не залежать від їх властивостей:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho F_1 = 0; \quad (1.3)$$

б) рівняння сумісності деформацій:

$$\varepsilon_{mkj} \cdot \varepsilon_{nil} \cdot \varepsilon_{ij,lk} = 0; \quad (1.4)$$

в) співвідношення, які пов'язують складові тензора деформацій із переміщеннями для малих деформацій (співвідношення Коші):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right); \quad (1.5)$$

г) співвідношення, які пов'язують складові тензора деформацій із переміщеннями для скінчених деформацій:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right); \quad (1.6)$$

д) співвідношення, які пов'язують між собою складові тензорів напружень та деформацій. У випадку ізотропного лінійно-пружного середовища це узагальнений закон Гука:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1 + \nu} \cdot \left( \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \cdot \delta_{ij} \cdot \varepsilon_{kk} \right). \quad (1.7)$$

Тут  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера ( $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, i, j = 1, 2, 3$ ).

Зв'язок між деформаціями та напруженнями для такого середовища запишемо у вигляді:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \cdot \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} \sigma_{kk}. \quad (1.8)$$

Найчастіше закон Гука записують за допомогою коефіцієнтів Ламе  $\mu$  і  $\lambda$ , які пов'язані з модулем Юнга  $E$  і коефіцієнтом Пуассона  $\nu$  формулами:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)},$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)},$$

а саме:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}. \quad (1.9)$$

Коефіцієнт Ламе  $\mu$  називається модулем зсуву, який позначають як  $G = \mu$ , оскільки дотичні напруження і деформації, що визначають зсуви у відповідних осях, пов'язані лінійно саме коефіцієнтом  $\mu$ . Тоді закон Гука можна подати у вигляді:

$$T = \mu \cdot \Gamma = G \cdot \Gamma, \quad (1.10)$$

де  $T$  – інтенсивність дотичних напружень,  $\Gamma$  – інтенсивність деформацій зсуву.

До наведених груп рівнянь і співвідношень для постановки крайової задачі потрібно додати також граничні (крайові) умови на поверхні, що обмежує тіло  $V$ .

## 2 ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНІ МОДЕЛІ ТА ЇХ СПІВВІДНОШЕННЯ

### 2.1 Прості реологічні моделі

Реологія (з грецької *rheos* – течія, потік і *logos* – слово, повчання) – наука про потік речовин, яка встановлює зв'язок між напруженими та деформованими станами для різних речовин. З цієї точки зору встановлення рівнянь стану для пластичного деформованого середовища є розділом реології, а самі рівняння стану називаються реологічними моделями.

Опір металу деформації визначається в основному трьома властивостями – пружністю, пластичністю та в'язкістю. У зв'язку з цим вводять три основні реологічні моделі, що відображають ці властивості.

Перша модель – лінійно-пружне середовище Гука (рис. 2.1), що зображує властивість пружності.

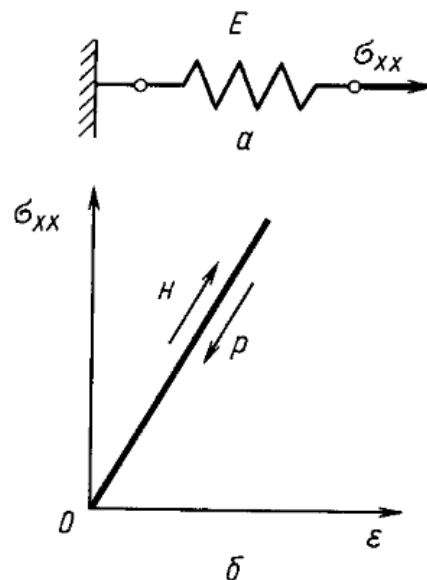


Рисунок 2.1 – Лінійно-пружне середовище Гука:  
 а – механічна модель; б – реологічна модель (крива)

Механічною моделлю лінійно-пружного середовища є пружина з лінійною характеристикою з жорсткістю  $E$  (рис. 2.1а), а реологічна крива – пряма лінія (рис. 2.1б), з якою співпадають лінії напруження та розвантаження. Опір деформації пружного середовища залежить від степеня деформації і не залежить від швидкості деформації. Модуль пружності  $E$  змінюється від показників температури.

Жорстко-пластичне середовище Мізеса зображує властивість пластичності, яка характеризується тим, що при досягненні деякого напруження з'являється залишкова пластична деформація. Рівняння стану має вигляд:

$$\sigma_{xx} = \sigma_T \quad (2.1)$$

і називається умовою пластичності при лінійному напруженому стані. При

$$\sigma_{xx} < \sigma_T$$

середовище не деформується. Деформація середовища починається та продовжується при

$$\sigma_{xx} = \sigma_T, \quad (2.2)$$

де  $\sigma_T$  – межа плинності при лінійно напруженому стані. Після зняття напруження деформація середовища одразу припиняється.

Механічною моделлю є елемент тертя (рис. 2.2а), а реологічною кривою – пряма лінія, яка паралельна осі деформації (рис. 2.2б).

Можна побачити, що тут відсутній однозначний зв'язок між напруженням та деформацією. Опір деформації не залежить ні від степеня, ні від швидкості деформації. Межа плинності  $\sigma_T$  змінюється з температурою.

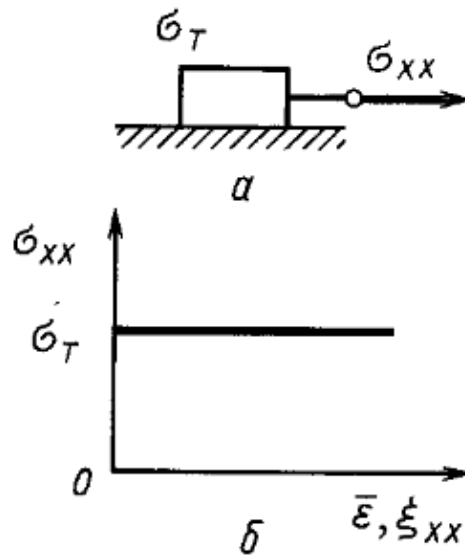


Рисунок 2.2 – Жорстко-пластична модель Мізеса:

а – механічна модель; б – реологічна крива

Ще однією моделлю пластичності є пластичне тіло Сен-Венона – Кулона. Тіла, що описуються цією ідеальною моделлю, не деформуються при напруженнях менших деякого критичного. Основне реологічне рівняння складається з двох частин:

$$\begin{aligned}\sigma &< \sigma_T, \\ \varepsilon &= \dot{\varepsilon} = 0\end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma_T, \\ \varepsilon, \dot{\varepsilon} &\neq 0.\end{aligned}$$

Третя модель – лінійно в'язке середовище Ньютона, яка зображує властивість в'язкості. Опір деформації прямо пропорційний її властивості.

Механічною моделлю є невагомий поршень, який переміщується в циліндрі, який заповнений в'язкою рідиною (рис 2.3а). Рідина протікає в щілині

між поршнем та стінкою циліндра. Реологічна крива – пряма лінія, нахил якої до вісі  $\xi_{xx}$  визначається величиною  $\eta$ . Опір деформації лінійно в'язкого середовища залежить від швидкості деформації, але не залежить від степеня деформації. В'язкість  $\eta$  змінюється з температурою.

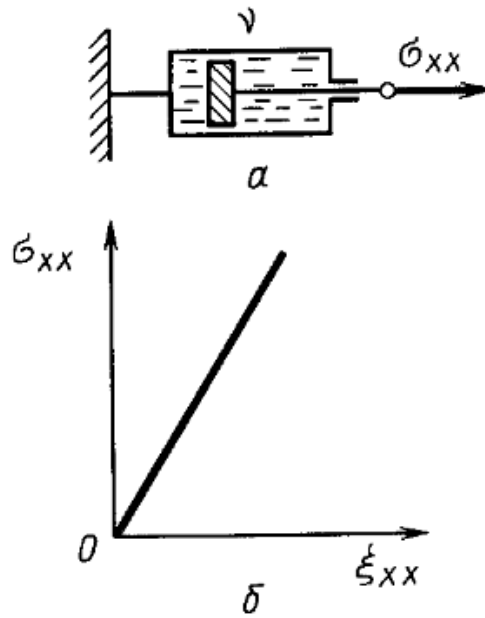


Рисунок 2.3 – Лінійно в'язка модель:

а – механічна модель; б – реологічна крива

## 2.2 Пружно-пластичні середовища

Теорія пластичності встановлює зв'язок між напруженнями та деформаціями або швидкостями зміни деформацій в областях пластичності матеріалів. Тоді відповідні задачі в силу нелінійного зв'язку напружень з деформаціями виявляються набагато складнішими задач теорії пружності. З метою їхнього спрощення залежність  $\sigma - \varepsilon$  для реального матеріалу часто апроксимують у вигляді кусково-ламаних прямих (рис 2.4)

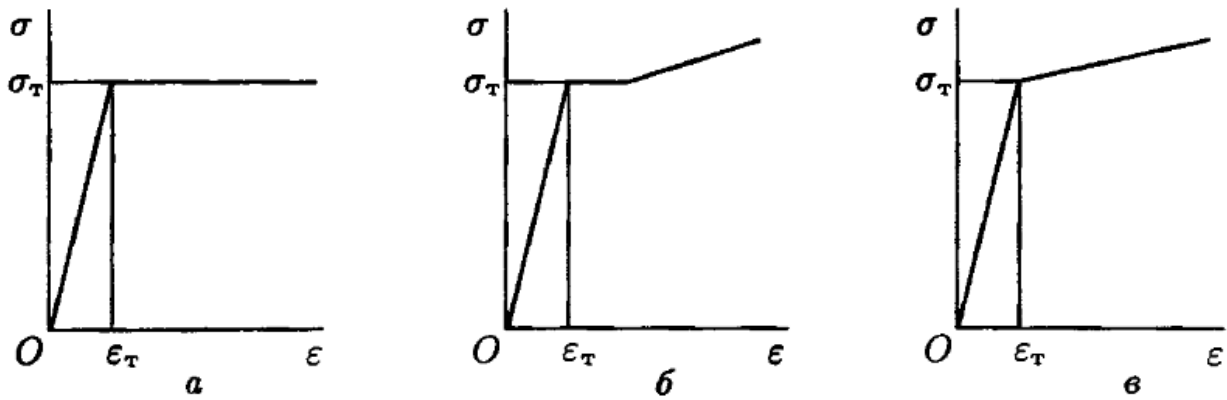


Рисунок 2.4 – Залежність  $\sigma - \epsilon$  для реального матеріалу

Найпростішою моделлю є **пружно-пластичне середовище Прандтля**. З'єднуючи пружний, пластичний та в'язкий елементи послідовно та паралельно, можна скласти моделі такого виду. Послідовне з'єднання лінійно-пружного та пластичного елементів (рис. 2.5а) дає механічну модель пружно-пластичного середовища Прандтля, яке має пружні та пластичні властивості. Реологічна крива (рис.2.5б) складається з двох відрізків прямих:  $OT$  відповідає пружній деформації (пружина  $E$  розтягується, а повзунок  $\sigma_T$  нерухомий);  $TD$  відповідає пружно-пластичній деформації (пружина  $E$  більше не розтягується, а повзунок  $\sigma_T$  переміщується).

Деформація складається з пружної  $\bar{\epsilon}^e$  та пластичної деформації  $\bar{\epsilon}^p$ :

$$\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}^e + \bar{\epsilon}^p. \quad (2.3)$$

Лінія розвантаження  $DD'$  паралельна  $OT$ . Рівняння стану має вигляд:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = E\bar{\epsilon}, \text{ якщо } \bar{\epsilon} < \bar{\epsilon}_T, \\ \sigma_{xx} = \sigma_T, \text{ якщо } \bar{\epsilon} > \bar{\epsilon}_T, \end{cases} \quad (2.4)$$

де  $\bar{\epsilon}_T = \frac{\sigma_T}{E}$  – деформаційна межа плинності при лінійному напруженому стані.



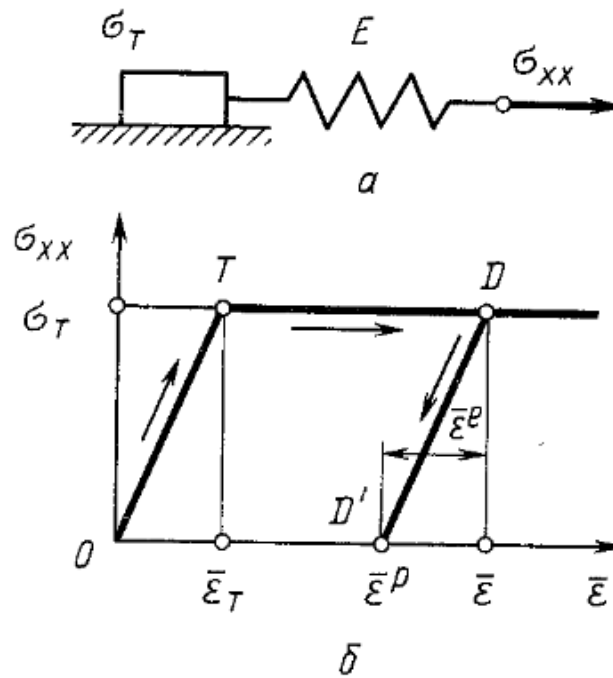


Рисунок 2.5 – Пружно-пластична модель Прандтля:  
а – механічна модель; б – реологічна крива

Механічна модель жорстко-пластичного середовища з лінійним зміцненням являє собою паралельне з'єднання лінійно пружної  $\theta$  та пластичного  $\sigma_T$  елемента (рис 2.6).

При напруженні  $\sigma_{xx} < \sigma_T$  середовище не деформується. При  $\sigma_{xx} = \sigma_T$  починається деформація: повзунок  $\sigma_T$  переміщується, а пружина  $\theta$  розтягується, тому для підтримки потоку  $\sigma_{xx}$  повинна збільшуватися. Оскільки елемент  $\theta$  лінійно пружний, то:

$$\sigma_{xx} = \sigma_T + \theta \bar{\epsilon}. \quad (2.5)$$

Дане рівняння описує стан жорстко-пластичного середовища з лінійним зміцненням при лінійному напруженому стані. Відповідно реологічна крива – пряма нахил якої визначається модулем зміцнення.

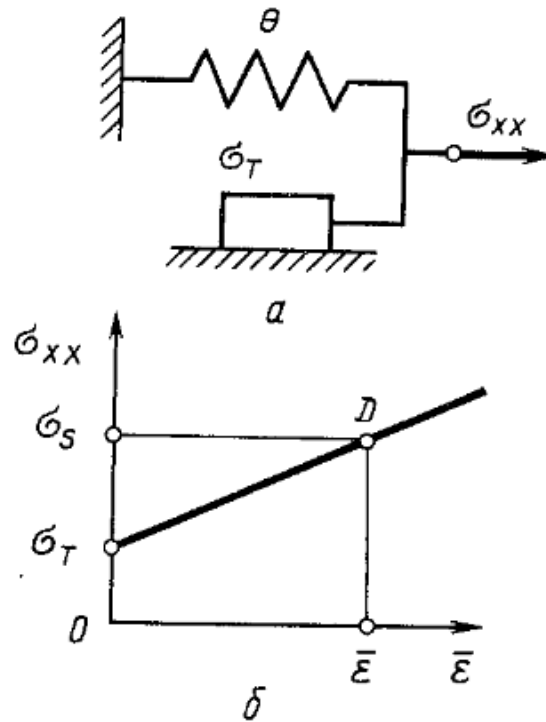


Рисунок 2.6 – Модель жорстко-пластичного середовища з лінійним зміцненням:  
а – механічна модель; б – реологічна крива

Якщо надати жорстко-пластичному середовищу з лінійним зміцненням властивість пружності, отримаємо пружно-пластичне середовище з лінійним зміцненням (рис. 2.7а).

Деформація складається з пружної  $\bar{\varepsilon}^e$  та пластичної деформації  $\bar{\varepsilon}^p$ :

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}^e + \bar{\varepsilon}^p. \quad (2.6)$$

Напруження з одного боку визначається пружною деформацією  $\sigma_{xx} = E\bar{\varepsilon}^e$ , а з другого боку опором переміщення пластичного елемента  $\sigma_T$  та деформаційним зміцненням (деформацією пружини  $\theta$ ):

$$\sigma_{xx} = \sigma_T + \theta\bar{\varepsilon}^p. \quad (2.7)$$

Можемо отримати рівняння стану:

$$\sigma_{xx} = \sigma_T + (\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_T) \frac{E\theta}{E + \theta} \approx \sigma_T + (\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_T)\theta. \quad (2.8)$$

При  $\bar{\varepsilon}$  менше за деформаційну межу плинності середовище поводитья як лінійно-пружна: пружина  $E$  розтягується, а повзунок  $\sigma_T$  та пружина  $\theta$  нерухомі. При  $\sigma_{xx} = \sigma_T$  повзунок починає переміщуватися. Відповідно реологічна крива (рис 2.7б) складається з двох відрізків прямих:  $OT$  ( $\bar{\varepsilon} < \bar{\varepsilon}_T, \sigma_{xx} < \sigma_T$ ) відповідає пружній деформації;  $TD$  ( $\bar{\varepsilon} \geq \bar{\varepsilon}_T, \sigma_{xx} \geq \sigma_T$ ) відповідає пружно-пластичній деформації. Лінія розвантаження  $DD'$  паралельна  $OT$ .

На відміну від пружно-пластичного середовища без зміцнення пружна деформація  $\bar{\varepsilon}^e$  збільшується зі зростанням сумарної деформації.

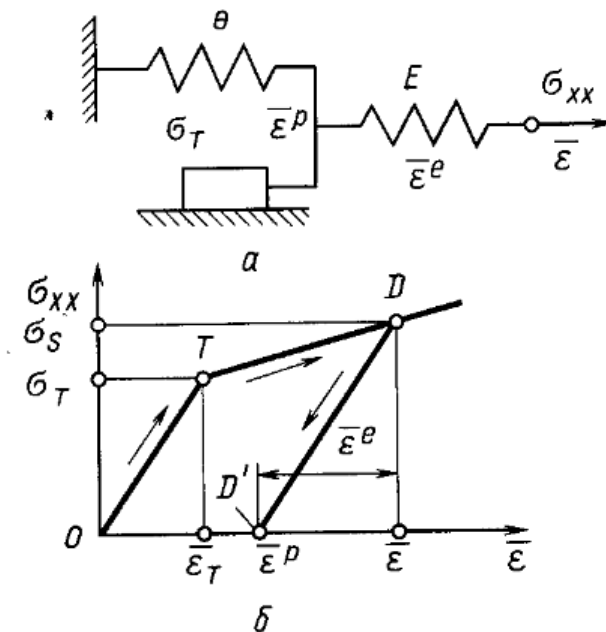


Рисунок 2.7 – Пружно-пластичне середовище з лінійним зміцненням:

а – механічна модель; б – реологічна крива

### 3 ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНА МОДЕЛЬ НЕОДНОРІДНОГО МАТЕРІАЛУ НА ОСНОВІ ОДНОЕЛЕМЕНТНИХ МОДЕЛЕЙ

Розглянемо неоднорідний матеріал, такий як односпрямований волокнистий композит, який складається із волокон, які, як правило, мають циліндричну форму круглого перетину та матеріалу матриці, що оточує і зв'язує волокна у єдине тіло. Існує безліч різних схем розташування волокон в односпрямованих композиційних матеріалах. Одними із найпоширеніших є гексагональна та квадратна укладка волокон (рис. 3.1).

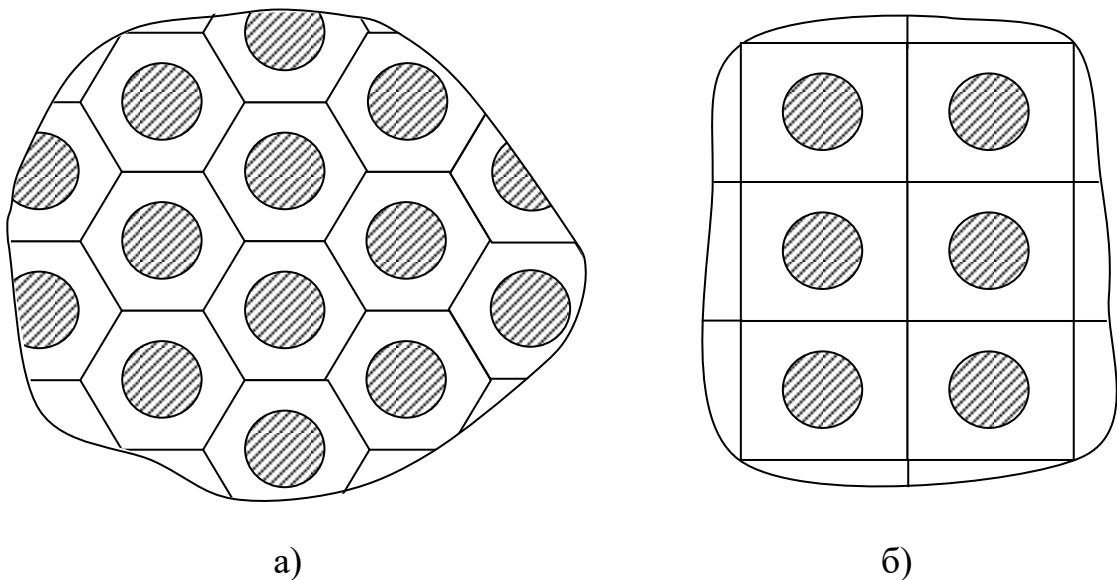


Рисунок 3.1 – Схеми укладки волокон:

а) – гексагональна; б) – квадратна

При розв'язанні задач механіки для реальних конструкцій дуже складно врахувати властивості та розташування кожного волокна у математичній моделі композиту, тому зазвичай використовують методи гомогенізації, коли неоднорідний матеріал представляється однорідним з механічними властивостями. Отримані механічні характеристики гомогенізованого матеріалу називаються ефективними.

Для отримання ефективних механічних характеристик волокнистого композиційного матеріалу розглянемо дві крайові задачі: перша про сумісне деформування пластичної матриці і пружного волокна, друга – про деформування однорідного композиційного матеріалу з поки що невідомими ефективними механічними характеристиками.

Із розв'язання першої крайової задачі будемо мати напружено-деформований стан матриці та волокна при умови, що їх деформації співпадають. Із другої задачі отримаємо напружено-деформований стан гомогенізованого композиційного матеріалу, що є функцією поки що невідомих ефективних механічних характеристик. Для того щоб задачі були однаковими припустимо у них рівність прикладених навантажень.

Використавши умову узгодження, як правило, це рівність деяких компонентів напружено-деформованого стану (у випадку, що розглядається це рівність деформацій), знайдемо невідомі ефективні механічні характеристики композиційного матеріалу.

Ці ефективні механічні характеристики є функцією механічних характеристик матриці та волокна та вмісту кожного з них у композиційному матеріалі.

Розглянемо елементарну комірку волокнистого композиту, що представляється багатогранниками нескінченної довжини, які у перетині є або правильним шестикутником, або квадратом (рис.3.2).

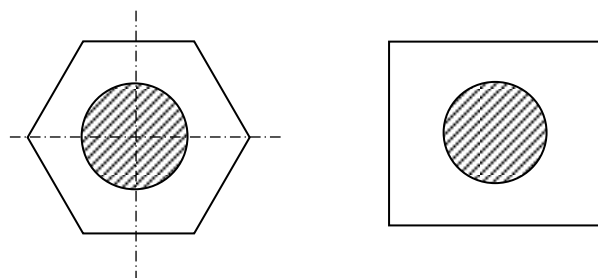


Рисунок 3.2 – Елементарна комірка

У цьому випадку об'ємний вміст волокон  $f$  в композиті дорівнює відношенню об'єму циліндричного волокна до об'єму усієї елементарної

комірки. Враховуючи, що область, яку займає матриця в елементарній комірці, і область, яку займає волокно в елементарній комірці, мають однакову висоту, справедливе таке співвідношення:

$$f = \frac{hS_{\varepsilon}}{hS} = \frac{S_{\varepsilon}}{S}, \quad (3.1)$$

де  $h$  – висота комірки,  $S$  – площа перетину комірки,  $S_{\varepsilon}$  – площа перетину волокна.

Будемо вважати, що матеріал матриці є пластичним і описується жорстко-пластичною моделлю, а матеріал волокна є пружним і підкорюється закону Гука. Тут і далі символ  $\circ$  означає величини, що відносяться до волокна, а символом  $*$  – величини, що відносяться до матриці.

Тоді згідно (2.6) у будь-якій точці матеріалу матриці для осьового деформування будемо мати:

$$\sigma^* = \sigma_0^*, \quad (3.2)$$

$$\varepsilon^* = \frac{\sigma_0^* - \sigma_T^*}{E^*}. \quad (3.3)$$

В цій моделі матеріал буде характеризуватися двома механічними характеристиками: межею плинності матриці  $\sigma_T^*$ , та модулем пружності матриці  $E^*$ .

Матеріал волокна у будь-якій точці площини  $S_{\varepsilon}$  буде описуватися в осьовому напрямку таким співвідношенням:

$$\sigma_0^{\circ} = E^{\circ} \varepsilon^{\circ}. \quad (3.4)$$

При такому представленні механічної поведінки волокна матеріал буде характеризуватися однією механічною характеристикою: модулем пружності волокна  $E^\circ$ .

Враховуючи, що при одноосьовому однорідному напружено-деформованому стані осьові деформації матриці та волокна співпадають доцільно з'єднати модель жорстко-пластичної матриці (3.2)-(3.3) та пружного волокна паралельно (рис. 3.3).

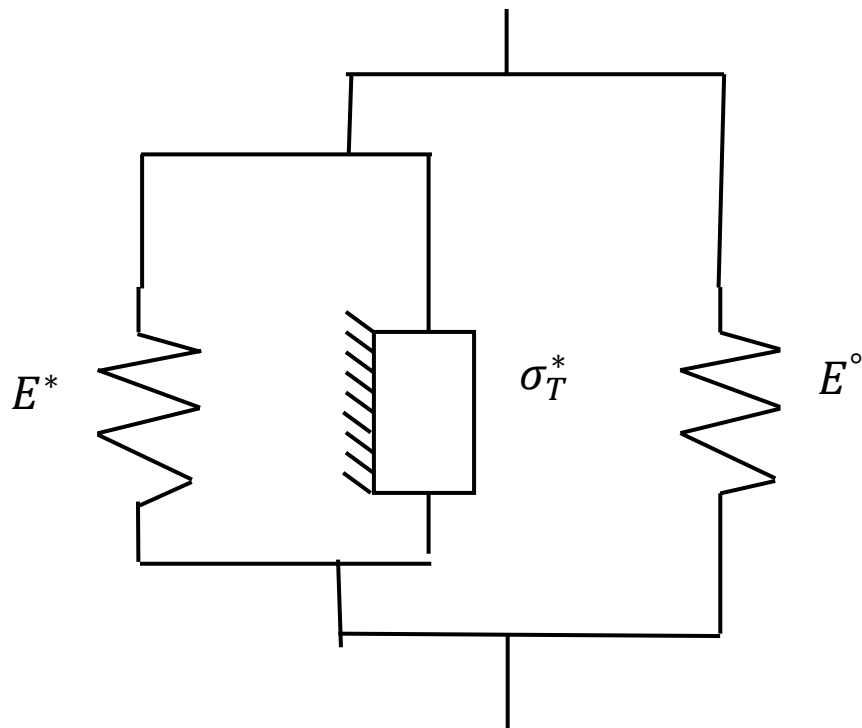


Рисунок 3.3 – Схематичне зображення пружно-пластичної моделі

У цьому випадку осьові деформації повинні співпадати, тобто:

$$\varepsilon^* = \varepsilon^\circ, \quad (3.5)$$

або

$$\frac{\sigma_0^\circ}{E^\circ} = \frac{\sigma_0^* - \sigma_T^*}{E^*}. \quad (3.6)$$

Тоді, для того щоб сумісна деформація для обох складових співпадала, між напруженнями повинно виконуватися таке співвідношення:

$$\sigma_0^\circ = \frac{E^\circ}{E^*} (\sigma_0^* - \sigma_T^*). \quad (3.7)$$

Після гомогенізації композиційного матеріалу, будемо вважати, що деформування описується жорстко-пластичною моделлю виду (2.5) та (2.6), які справедливі у будь-якій точці площини  $S$ , але механічні сталі цієї моделі  $E$  та  $\sigma_T^*$  поки що невідомі.

Для того, щоб повздовжнє розтягнення у сумісній моделі «матриця-волокно» та однорідний композит було еквівалентним необхідно, щоб прикладене навантаження співпадало:

$$\sigma_0^* (1 - f) + \sigma_0^\circ f = \sigma_0, \quad (3.8)$$

а, враховуючи (3.7), маємо:

$$\sigma_0^* (1 - f) + \frac{E^\circ}{E^*} (\sigma_0^* - \sigma_T^*) f = \sigma_0. \quad (3.9)$$

Звідки можемо, знайти значення для напружень у матриці і взявши до уваги співвідношення (3.1), будемо мати:

$$\sigma_0^* = \frac{\sigma_0 + \frac{E^\circ}{E^*} \cdot \sigma_T^* \cdot f}{(1 - f) + \frac{E^\circ}{E^*} \cdot f}. \quad (3.10)$$



Враховуючи, що гомогенізована модель повинна адекватно відобразити процес сумісного деформування матриці та волокна, як умову узгодження використаємо рівність деформацій для обох моделей, тобто:

$$\varepsilon = \varepsilon^* = \varepsilon^\circ. \quad (3.11)$$

З урахування (3.10) співвідношення для деформацій першої моделі (3.3) буде мати вигляд:

$$\varepsilon^* = \frac{\frac{\sigma_0 + \frac{E^\circ}{E^*} \cdot \sigma_T^* \cdot f}{(1-f) + \frac{E^\circ}{E^*} \cdot f} - \sigma_T^*}{E^*}. \quad (3.12)$$

Для гомогенізованої моделі будемо мати:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0 - \sigma_T}{E}. \quad (3.13)$$

Тоді умова (3.11) прийме вигляд:

$$\frac{\sigma_0 - \sigma_T}{E} = \frac{\frac{\sigma_0 + \frac{E^\circ}{E^*} \cdot \sigma_T^* \cdot f}{(1-f) + \frac{E^\circ}{E^*} \cdot f} - \sigma_T^*}{E^*}. \quad (3.14)$$

Виокремимо у правій та лівій частині цього співвідношення складові, що залежать від прикладеного навантаження, та прирівняємо їх. Будемо мати таке співвідношення:

$$\frac{\sigma_0}{E} = \frac{\sigma_0}{\left( (1-f) + \frac{E^\circ}{E^*} \cdot f \right) \cdot E^*}, \quad (3.15)$$

з якого потрібно знайти невідому механічну характеристику  $E$  для гомогенізованої моделі:

$$\frac{\sigma_0}{E} = \frac{\sigma_0}{(E^*(1-f) + E^\circ f)}, \quad (3.16)$$

тоді одна з ефективних характеристик гомогенізованого матеріалу буде така:

$$E = (E^*(1-f) + E^\circ f), \quad (3.17)$$

що повністю співпадає із формулою правила сумішів для волокнистого композиту, отриманої при інших припущеннях. Щоб знайти межу плинності гомогенізованого композиційного матеріалу  $\sigma_T$ , у (3.14) прирівняємо складові, що не залежать від прикладеного навантаження  $\sigma_0$ . В результаті будемо мати наступне співвідношення:

$$\frac{-\sigma_T}{E} = \frac{\frac{E^\circ}{E^*} \cdot \sigma_T^* \cdot f}{(1-f) + \frac{E^\circ}{E^*} \cdot f} - \sigma_T^*. \quad (3.18)$$

А підставивши у нього співвідношення (3.17) для ефективного пружного модуля  $E$ , прийдемо до виразу:

$$\frac{-\sigma_T}{(E^*(1-f) + E^\circ f)} = \frac{\frac{E^\circ}{E^*} \cdot \sigma_T^* \cdot f - \sigma_T^*}{(E^*(1-f) + E^\circ f)}. \quad (3.19)$$

Отримаємо другу ефективну характеристику гомогенізованого матеріалу – межу плинності гомогенізованого композиційного матеріалу:

$$\sigma_T = \sigma_T^* \left( 1 - \frac{E^\circ}{E^*} \cdot f \right). \quad (3.20)$$

Тоді з урахуванням (3.17) та (3.20) для гомогенізованої моделі будемо мати:

$$\varepsilon = \frac{\sigma - \sigma_T^* \left( 1 - \frac{E^\circ}{E^*} \cdot f \right)}{E^* (1 - f) + E^\circ f}. \quad (3.21)$$

Скориставшись формулою (3.21), проведемо дослідження композиційного матеріалу з такими механічними характеристиками і вихідними даними: модуль пружності матриці  $E^* = 40$  МПа, модуль пружності волокна  $E^\circ = 100$  МПа, межа плинності матриці  $\sigma_T^* = 10$  МПа.

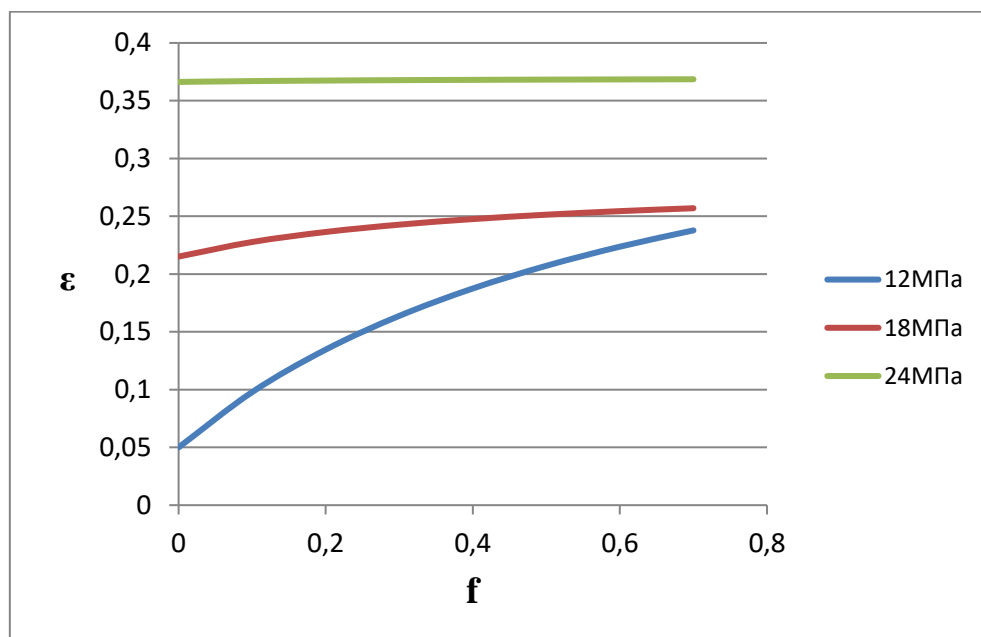


Рисунок 3.4 – Криві деформування композитного матеріалу

На основі отриманої моделі вивчимо деформування композиційного матеріалу для різного вмісту волокна у композиті для різних значень прикладеного навантаження  $\sigma_0 = 12, 18, 24$  МПа, На рисунку 3.4 наведено залежності деформації в залежності від  $f$  для різного вмісту волокна у композиті. Очікувано, при менших значеннях навантажень маємо менше значення деформацій. Зі збільшенням  $f$  та різними значеннями  $\sigma_0$  крива деформації прямує до горизонтальної прямої, тобто пластичні процеси починають домінувати над пружними.

## ВИСНОВКИ

У кваліфікаційній роботі описано основні підходи до побудови математичних моделей теорії пружно-пластичності. Наведено основні співвідношення в теорії пружно-пластичності у вигляді диференціальних та інтегральних рівнянь. Розглянуто деякі реологічні моделі.

Більш детально досліджено моделі Прандтля, Мізеса та жорстко-пластична модель. На основі останньої моделі побудовано модель деформування волокнистого композиційного матеріалу. Вважалося, що матриця композиту пластична і її деформування описується жорстко-пластичною моделлю. Волокно вважається пружним і його деформування моделюється на основі закону Гука. Спільне деформування матриці та волокна описується паралельною комбінацією обох зазначених моделей. Припускається, що деформування неоднорідної системи «матриця»-«волокно», можна описати деформуванням однорідного (гомогенізованого) матеріалу з ефективними механічними характеристиками. Для опису деформування гомогенізованого матеріалу використовується модель жорстко-пластичного середовища, що має дві ефективні характеристики. Співвідношення для цих характеристик знайдені із умов узгодження із неоднорідною моделлю, вони є функцією механічних характеристик матриці і волокна та об'ємної частки волокна у композиті.

Проведено чисельне дослідження впливу об'ємної частки волокна на процес пружно-пластичного деформування композиційного матеріалу.

**ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ**

1. Аболиньш Д.С. Тензор податливости однонаправлено армированного упругого материала // *Механики полимеров*. 1965. №4. С. 52 – 59.
2. Булычев Г.Г. Динамическое разрушение предварительно-напряженного волокнистого композита, вызванное обрывом волокна // *Механика твердого тела*. 1993. № 3. С. 169 – 176.
3. Ван Фо Фы Г.А. Упругие постоянные и напряженное состояние стеклоленты // *Механика полимеров*. 1966. № 4. С. 593 – 602.
4. Димитриенко Ю.И. Исследование процессов разрушения композиционных материалов на базе метода асимптотической гомогенизации // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана*. 2012. № 6. С. 101 – 113.
5. Димитриенко Ю.И. Многомасштабное моделирование упругих композиционных материалов // *Математическое моделирование*. 2012. Т. 24, №5. С. 3 – 20.
6. Димитриенко Ю.И. Об упругих свойствах композиционных материалов // *Математическое моделирование*. 2009. Т. 21, №4. С. 96 – 110.
7. Композиционные материалы: Справочник / Под ред. Д.М. Карпиноса. Київ: Наук. думка, 1985. 592 с.
8. Лавренюк М. Моделі механіки деформівного твердого тіла неоднорідних середовищ.:навчальний посібник. Київ, 2012. 86 с.
9. Механика композитов. Т.3. Статистическая механика и эффективные свойства материалов / [Л.П. Хорошун, Б.П. Маслов, Е.Н. Шикула, Л.В. Назаренко]; ред. Л.П. Хорошун. Київ: Наук. думка, 1993. 390 с.
10. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. Москва, 1984. 336 с.
11. Aboudi J. Micromechanics of Composite Materials: A Generalized Multiscale Analysis Approach. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2012. 1006 p.
12. Ashton J.E. Primer on composite materials: analysis. Stamford: Technomic, 1969. 124 p.

13. Grebenyuk S., Klimenko M. Shear Modulus of a Fiber Composite with a Transtropic Viscoelastic Matrix and Transtropic Elastic Fiber. // *Проблеми машинобудування*. 2018. № 3, Том 21. С. 47–53.
14. Grebenyuk S. Klymenko M., Titova O. Mechanical properties of the composite with viscoelastic isotropic matrix and transversally isotropic fiber under transverse tension. // *21th International Scientific Conference Mechanika 2016*. Kaunas: Kaunas University of Tehnology, 2016. P. 94–97.
15. Grebenyuk S., Klymenko M., Titova O., Smoliankova T. Effective Characteristics of the Viscoelastic Fiber-reinforced Composite with Transversally Isotropic Components under Transverse Shear. // *Proceedings of the 23rd international scientific conference Mechanika – 2018*. Kaunas: Kaunas University of Tehnology, 2018. P. 31–35.
16. Ju J.W. Effective Elastoplastic Damage Mechanics for Fiber-reinforced Composites with Evolutionary Complete Fiber Debonding // *International Journal of Damage Mechanics*. 2008. Vol. 17(6). P. 493 – 537.
17. Kwon Y.W. Multiscale Modeling and Simulation of Composite Materials and Structures. New York: Springer, 2007. 630 p.
18. Tang T. A variational asymptotic micromechanics model for predicting conductivities of composite materials // *Journal of mechanics of materials and structures*. 2007. Vol. 2, N 9. P. 1813 – 1830.
19. Tang T. Variational Asymptotic Micromechanics Modeling of Composite Materials. Logan: Utah State University, 2008. 280 p.
20. Yu W. A variational asymptotic micromechanics model for predicting thermoelastic properties of heterogeneous materials // *International Journal of Solids and Structures*. 2007. Vol. 44. P. 7510 – 7525.
21. Yu W. Variational asymptotic method for unit cell homogenization // *Advance s in Mathematical Modeling and Experimental Methods for Materials and Structures*. New York: Springer, 2010. P. 116 – 130.
22. Wang Y., Huang Z. A Review of Analytical Micromechanics Models on Composite Elastoplastic Behaviour. *Procedia Eng*. 2017. N 173. P. 1283–1290.

23. Zhang L., Yu W. Variational asymptotic homogenization of elastoplastic composites. *Compos. Struct.* 2015. N 133. P. 947–958.
24. Zahr Viñuela J., Pérez-Castellanos J.L. The anisotropic criterion of von Mises (1928) as a yield condition for PMMCs. A calibration procedure based on numerical cell-analysis. *Compos. Struct.* 2015. N 134. P. 613–632.