МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра загальної математики

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА

на тему: **«ВІДНОШЕННЯ ЛОГІЧНОГО СЛІДУВАННЯ В МІРКУВАННЯХ ТА У НАВЧАННІ МАТЕМАТИКИ»**

Виконала: студентка 2 курсу, групи 8.1119-з

спеціальності 111 математика

(шифр і назва спеціальності)

освітньої програми математика

(назва освітньої програми)

М. В. Масловська

(ініціали та прізвище)

Керівник доцент кафедри загальної математики, доцент, к.ф.-м.н. Стєганцева П.Г.

(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Рецензент доцент кафедри програмної інженерії, доцент, к.ф.-м.н. Курапов С.В.

(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Запоріжжя

2020

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет математичний

Кафедра загальної математики

Рівень вищої освіти магістр

Спеціальність 111 математика
(шифр і назва)

Освітня програма математика

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри загальної математики, к.ф.-м.н., доцент
____________ Зіновєєв І.В.
(підпис)

« ____ » __________ 20 р.

З А В Д А Н Н Я

НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТЦІ

Масловській Марині Володимирівні
(прізвище, ім'я та по-батькові)

1. Тема роботи (проекту) Відношення логічного слідування в міркуваннях та у навчанні математики

керівник роботи (проекту) Стєганцева П.Г.
(прізвище, ім'я та по-батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від « 20 » травня 2020 року № 577-с

2. Строк подання студентом роботи 07.12.2020

3. Вихідні дані до роботи 1. Постановка задачі.
2. Перелік літератури.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)
   1. Розкрити поняття логічного слідування як об'єкту математичної логіки
   2. З'ясувати місце і значення поняття логічного слідування у викладанні математики

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень)
Презентація

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання ______________________________

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	09.06.2020	
2.	Збір вихідних даних.	15.07.2020	
3.	Обробка методичних та теоретичних		
	джерел.	12.08.2020	
4.	Розробка першого розділу.	30.09.2020	
5.	Розробка другого розділу.	13.11.2020	
6.	Оформлення та нормоконтроль		
	кваліфікаційної роботи.	01.12.2020	
7.	Захист кваліфікаційної роботи.	10.12.2020	

Студент ______________ М. В. Масловська
(підпис) (ініціали та прізвище)

Керівник роботи ______________ П. Г.Стєганцева
(підпис) (ініціали та прізвище)

Нормоконтроль пройдено

Нормоконтролер ______________ О. Г. Спиця
(підпис) (ініціали та прізвище)

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Відношення логічного слідування в міркуваннях та у навчанні математики»: 64 с., 8 табл., 13 джерел.

АЛГЕБРА, АНТЕЦЕДЕНТ, ВИСЛОВЛЕННЯ, ДИЗ’ЮНКЦІЯ, ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ, ІМПЛІКАЦІЯ, ІНВЕРСІЯ, КОНСЕКВЕНТ, КОН’ЮНКЦІЯ, МІРКУВАННЯ, РЕФЛЕКСИВНЕ ВІДНОШЕННЯ, ФОРМУЛА.

Об’єкт дослідження – відношення логічного слідування.

Мета роботи: дослідити відношення логічного слідування в міркуваннях та в навчанні математики.

Метод дослідження – аналітичний, порівняльний.

Поняття слідування відноситься до одного з найважливіших логічних понять математики. Починаючи з давньогрецького вченого Арістотеля його вивчали на протязі багатьох століть, як складову логічного мислення. Воно використовується при формулюванні і доведенні теорем, розв`язуванні різних математичних задач,значна кількість яких міститься в шкільному курсі геометрії. Але не дивлячись на все це у більшості загальноосвітніх закладів в програмі не передбачений такий предмет як математична логіка. Викладання логіки є одним із кроків в системі допомоги учням основної школи у виборі профілю навчання. Профілізація школи, нові вимоги до освіти передбачають вміння учнями мислити. Необхідною умовою та важливою частиною такого вміння є логічна грамотність, тобто деякий мінімум логічних знань та вмінь, що необхідні для кожної інтелектуальної особистості.

Щоб розширити уявлення про відношення логічного слідування у кваліфікаційній роботі досліджено як з його допомогою здійснюють операції доведення певних формул на істинність за правилами виведення. Були наведені приклади розв’язання задач за допомогою даної теорії та наведено приклади використання логічного слідування у шкільному курсі математики.

SUMMARY

Master’s Qualification Thesis «The Logical Implication Relationship in the Reasoning and in the Mathematical Education»: 64 pages, 8 figures, 13 references.

ALGEBRA, ANTECEDENT, UTTERANCE, DISJUNCTION, EQUIVALENCE, IMPLICATION, INVERSION, CONSEQUENT, CONJUNCTION, REASONING, REFLEXIVE ATTITUDE, FORMULA.

The object of the study is the logical implication relationship.

The aim of the study is to investigate the logical implication relationship in the reasoning and in the mathematical education.

The methods of research are analytical, comparative.

The concept of following is one of the most important logical concepts of mathematics. Starting with the ancient Greek scientist Aristotle, it has been studied for many centuries as a component of logical thinking. It is used in the formulation and proof of theorems, solving various mathematical problems, a significant number of which are contained in the school geometry course. But despite all this, most general education institutions do not have such a subject as mathematical logic in the program. Teaching logic is one of the steps in the system of helping primary school students choose a learning profile. School profiling and new educational requirements provide for students ability to think. A necessary condition and an important part of such a skill is logical literacy, that is, a certain minimum of logical knowledge and skills that are necessary for every intellectual person.

To expand the understanding of the logical implication relationship in the qualification work, we investigated how it is used to perform operations to prove certain formulas to be true according to the rules of inference. Examples of problem solving using this theory were given and examples of using logical following in a school mathematics course were given.

ЗМІСТ

ВСТУП

Із розвитком суспільства змінюються форми і закони мислення людини. Наука, що вивчає їх, одержала назву "логіка". Цей термін походить від грецького слова λογοσ (логос), що означає "слово", "думка", "міркування". Вперше появу логіки зафіксовано у Стародавній Індії, згодом у Стародавній Греції, Стародавньому Єгипті, Стародавньому Римі. Логіка в країнах Близького Сходу і в Європі формувалась в кожній окремо, незалежно одна від одної. Традиції розвитку знань логіки в Індії використовували мислителі Китаю, Японії, Монголії, Тибету, Кореї, Індонезії. Вчення про мислення впливали на розвиток логіки у Візантії, Вірменії, Грузії, Україні, Росії. Отже, можна сказати, що знання логіки виникають і розвиваються тоді, коли процеси людського мислення стають предметом власного дослідження. Розвиваючись у лоні філософських знань, логіка завжди виступала як складова частина філософії і тільки згодом поступово відокремилась, так би мовити, на правах автономії.

Поява математичної логіки визначається потребами розвитку самої математики. Видатний російський логік і математик П.С. Порецький так охарактеризував математичну логіку: «математична логіка – це логіка за своїм змістом і математика за своїм методом.»

Математична логіка посідає важливе місце і в професійній підготовці вчителів математики. Вона сприяє вихованню культури логічного мисленнята дає можливість краще зрозуміти структурно-логічну схему шкільного курсу математики, глибше проникнути в суть поняття доведення, встановити зв’язки між різного роду теоремами, з’ясувати зміст поняття логічного слідування.

Поняття слідування відноситься до одного з найважливіших логічних понять математики. Воно використовується при формулюванні і доведенні теорем, розв`язуванні різних математичних задач, значна кількість яких міститься в шкільному курсі геометрії. Тому було б доцільно на початку його вивчення дати означення поняття слідування. В шкільній математиці 70-х років уже була спроба ввести в явній формі поняття логічного слідування. Це було зроблено в алгебрі. І поняття «слідування», там використовувалось не лише при доведенні теорем, але і при розв'язуванні рівнянь. Нажаль цей розділ не протримався в шкільних підручниках алгебри 7 класу не більше 10-ти років і був виключений спочатку з шкільної програми, а потім і з підручників.

Відношення логічного слідування посідає одне з найважливіших місць у сучасній математичній науці. Його активно застосовують у найрізноманітніших галузях наукових досліджень.

Мета кваліфікаційної роботи – проаналізувати роль відношення логічного слідування в математичній науці та в навчанні математики.

Актуальність проблеми полягає в тому, що математична логіка будується як математична наука – галузь математики, спрямована на вивчення математичних міркувань. На основі логіки стало можливим будувати математичні теорії як дедуктивні системи. Математична логіка допомагає розв'язувати проблеми, що стосуються загальних властивостей математичних теорій – проблем несуперечливості, незалежності, повноти, розв'язуваності.

Головне завдання кваліфікаційної роботи – дослідження логічної будови деяких теорем з різних розділів математики, яка обумовлює методи їх доведення, дозволяє створити алгоритми доведення. Цікаво також дослідити, яким чином математична логіка знайшла широке застосування в таких науках, як математична лінгвістика, математична психологія, біологія, економічні науки та різні галузі техніки.

1 ЕВОЛЮЦІЯ ВІДНОШЕННЯ ЛОГІЧНОГО СЛІДУВАННЯ В МАТЕМАТИЦІ

1.1 Історія розвитку сучасної логіки

Знання логіки виникають і розвиваються тоді, коли процеси людського мислення стають предметом власного дослідження. Логіка завжди виступала як складова частина філософії і тільки згодом поступово відокремилась, так би мовити, на правах автономії. Розвитку знань логіки сприяла безліч причин, в основному розвиток наук та ораторського мистецтва, що ґрунтувалися на теоретичному мисленні, яке вимагало коректних умовиводів і доведень.

За тисячоліття історія логіки пережила три великих періоди: антична логіка (V – III ст. до н.е.); схоластична логіка (середина XIII – середина XIV століть); сучасна логіка (із середини XIX ст. до сучасності). Вперше поняття «логічне» для формування критеріїв істини і правил пізнання ввів до наукового обігу видатний філософ-матеріаліст Демокріт, який назвав свій твір про критерії і правила пізнання "Про логічне, або Про канони».

Початок розвитку логічних ідей датують другим тисячоліттям до н.е. у Стародавній Індії. Відомим представником, яких був Дхармакірті. У своїй праці “Крапля логіки” він досліджував логічні зв’язки та розглядав питання побудови міркувань з використанням трьох джерел пізнання: сприйняття, висновка, або умовивода, і свідоцтва святого письма або авторитетної особи. Головним пунктом теорії логіки Дхармакірті являються питання про узагальнення вигляду «всякий x є y» та його вирішення за допомогою індукції.[10, с. 9].

Логіка Стародавнього Китаю почала розвиватись приблизно у 500 році до н.е. у вченнях багатьох багатьох мислителів. Серед них можна відзначити такого мислителя як Мо Цзи, який виступав противником ідей Конфуція «про образність висловлювань, чіткість суджень, логічну обгрунтованість думок». Мо Цзи та його послідовники розробляли логіку і теорію пізнання. Основним логічним методом вони вважали “бянь” (судження). З його допомогою визначалися істина і хибність, законна і незаконна дія; встановлювалися тотожність і відмінність; з’ясовувались співвідношення між іменами (поняттями) і дійсністю, усувалися сумніви.

Мислителі та вчені Стародавнього Китаю, зокрема, прихильники логіки Мо Цзи вважали, що два протилежних судження не можуть бути істинними або хибними одночасно, оскільки лише одне з них є істинним, тоді як інше – хибне. Вони займалися дослідженням та розробкою логічних систем, впритул підійшли до розуміння змісту закону тотожності, основного принципу закону виключеного третього.

Послідовники Мо Цзи пропонували сім методів міркування або висунення гіпотез. Ними вони вважали: а) “хуо”, тобто ймовірність, б) “цзя”, або уявлення, в) ”сяо”, або наслідування певного зразка, г) “бі”, тобто зіставлення, д) “моу”, або порівняння, е) “юань”, або посилання на думку опонента, ж) “гуй”, або поширення судження на інші об’єкти. [10, с. 13].

У Стародавній Греції проблеми та питання становлення логіки почали досліджуватись математиками у VI ст. до н.е., які створили метод дедуктивної аргументації з постулатів без звернення до безпосередньої практичної перевірки обговорюваних положень. Згодом і Сократом, який розмірковував над сутністю і значенням логічних методів індукції та дедукції. Відомий філософ Платон, послідовник Сократа, з’ясував визначення і поділ понять, дав характеристику логічній формі судження, яку він вважав основним елементом мислення і впритул наблизився до відкриття основних законів логіки.

На виникнення логіки як науки значний вплив здійснили давньогрецькі софісти, відомі як перші професійні вчителі "мудрості" і красномовства (Протагор, Гіппій та інші). Але не дивлячись на все істинним засновником логіки вважають учня Платона, видатного давньогрецького мислителя Арістотеля. Своєму головному твору з логіки він дав назву "Аналітика", в якому детально проаналізував силогізм як особливу форму умовиводу, розкрив сутність доведення, прийоми визначення і поділу понять та їхнє значення в науці. Тут він також описує імплікацію $A \to B$, яку вважає істинною не тільки тоді, коли A та B

істинне, але також і коли A хибне, а B істинне. Крім того, Арістотелю належать такі твори як "Топіка", "Категорії", "Про софістичні спростування", "Про тлумачення". Згодом послідовники Арістотеля об'єднали всі його логічні трактати під загальною назвою "Органон". [10, с.37].

Арістотелем була розглянута ціла низка важливих логічних проблем в праці, яка згодом одержала назву "Метафізика". Деякі польські вчені навіть приписують Арістотелю авторство головних тверджень математичної логіки, що відносяться до теорії тотожності предметів (нижче $\supset$ – знак слідування) [10, с. 38]:

а) $((a \equiv c)\&(b \equiv c)) \supset (a \equiv b)$;

б) $((a \equiv b)\&P(a)) \supset P(b)$;

в) $(P(a)\&\bar{P}(b)) \supset (a \not\equiv b)$.

Послідовники Арістотеля, так звані «перипатетики», одним з яких є Феофаст, який вводить означення «modus ponens», що звучить як «Якщо p, то q; якщо p істинне, значить і q. Саме після цього почалось уточнення логіки предикатів за допомогою принципів логіки висловлювань.

Вплив логічних концепцій Арістотеля та його наступників також прослідковується в роботах давньоримського філософа Боеція, де він дає означення терміну «висловлювання» як розповідного речення, нерозривно пов'язаного з висловлюваним значенням. А також саме він розглянув всі можливі випадки заперечення членів кон'юнкції.

У період Середньовіччя (із середини XII ст.) відбулося своєрідне "друге відкриття" логіки Арістотеля через арабські джерела, зокрема Авіценою, який формулює імплікацію з використанням тимчасової змінної «*t*». Він розглядає чотири форми висловлювань:

а) «для всіх часових моментів вірно, що коли має місце A, тоді має місце і B» $(\forall^t(A_t \supset B_t))$;

б) «іноді буває так, що коли наступає A, наступає і B» $(\exists^t(A_t\&B_t))$;

в) «ніколи не буває так, що коли наступає A, наступає і B» $(A^t\overline{(A_t\&B_t)})$;

г) «іноді буває не так, наступає A, наступає і B» $(\forall^t(A_t\&\bar{B}_t))$. [10, с. 105].

Ще один представник логіки Європейського Середньовіччя це П’єр Абеляр з роботою «Діалектика», де вже починають зустрічатися модально-імплікативні трактування умовних висловлювань. Наприклад, можна виділити такі правила, що стосуються імплікації:

а) «якщо антецедент істинний, то істинний і консеквент»;

б) «якщо антецедент можливий, то можливий і консеквент»;

в) «якщо консеквент хибний, то хибний і антецедент»;

г) «якщо консеквент неможливий, то неможлиий і антецедент». [10, с. 117].

Також можна відзначити ще Дунса Скота, який значну увагу приділяє поняттю слідування одного міркування з іншого. Він формулює правила логічного слідування [10, с. 159]:

а) «із тези, що суперечить консеквенту, випливає пропозиція, несумісне з антецедентом, але не навпаки»;

б) «якщо антецедент можливий, то можливий і консеквент»;

в) «з неможливим антецедентом, можливе правильне слідування».

Основоположником англійського матеріалізму був Ф. Бекон, який критикував дедуктивний метод Арістотеля і на противагу йому свій головний філософський здобуток назвав "Новий Органон". Тут він виклав основи індуктивної логіки, а також розробив методи визначення причинних зв’язків між явищами.

Наступні реформи в логіці здійснив Г. Лейбніц, який обґрунтував ідею числення розуму, подібного до математичного числення, що базується на універсальній логічній мові та відрізняється від природних мов точністю і однозначністю висловлювань. Зокрема, він пропонує використовувати математичні методи в логіці, тобто описувати закони людського мислення точною і строгою мовою, щоб зробити їх дієвим інструментом наукового дослідження. Тому німецького математика і філософа Г. Лейбніца можна вважати одним із основоположників математичної логіки.

Друга половина XVIII ст. та XX ст. відзначились цілою низкою відкриттів у різноманітних галузях науки і техніки, завдяки яким логіка трансформувалась в низку цікавих теоретичних ідей. Яскравий представник цього періоду Август де Мogран, якого вважають основоположником логічної теорії відношень. Але засновником логіки цього періоду вважають Джорджа Буля. В основу створюваної ним логічної теорії покладено гіпотезу про тісні зв'язки між алгеброю і логікою, завдяки яким за певних умов формули і прийоми алгебри можуть бути успішно перенесені в логіку, і навпаки. Він розробив відповідне логічне числення, в якому застосував закони й операції математики (додавання класів, множення тощо).

Дж. Буль детально проаналізував закони комутативності, асоціативності, дистрибутивності. Його ідеї зацікавили відомого російського математика і логіка П.С. Порецького і відобразились ним в роботі «Про способи розв'язання логічних рівнянь і про зворотний спосіб математичної логіки».

Сучасна символічна (математична) логіка являє собою подальший розвиток традиційної формальної логіки. Саме успіхи математичної логіки перетворили стару формальну логіку на науку з точними поняттями і послідовними доведеннями. Для математичної логіки характерним є вивчення законів і форм мислення за допомогою методів математики і використання «мови символів» (знаків), що дає можливість зробити логіку точною наукою, а думку, виражену в символах математичної логіки, – чіткою і однозначною. Мова символів, певною мірою застосовувана ще Арістотелем, на сучасному етапі набула значного поширення, в зв'язку з чим термін «символічна логіка» використовується тепер як синонім математичної логіки.

Давид Гільберт (1862–1943) – видатний німецький математик і логік, сформулював систему основоположних принципів аксіоматики геометрії, арифметики й фізики, через які намагався довести незалежність і несуперечність, що лежать в основі аксіом. Він досяг значних успіхів у застосуванні методу формалізації в тлумаченні логічних умовиводів, у розробці числення висловлювань і предикатів, у дослідженні аксіоматизації знань. Він здійснив строго аксіоматичну побудову геометрії Евкліда, що наперед визначило подальший розвиток досліджень з аксіоматизації наукового знання, запропонував розгорнутий план обґрунтування математики шляхом її повної формалізації. Щоправда, ця програма виявилась нездійсненною, проте її ідеї сприяли виникненню і розвитку метаматематики (теорії доведень).

На початку XX ст. нідерландський математик Л.Е.Я. Брауер (1881-1966) висловив сумнів у тому, що закони класичної логіки мають абсолютну істинність. У зв'язку з цим він запропонував інноваційну програму, спрямовану на повернення математикам впевненості, яку похитнуло відкриття парадоксів теорії множин. Вона дістала назву інтуїціонізму. Брауер вважав, що основу математики становлять не логічні конструкції, які так підносив Гільберт, а інтуїція, завдяки якій математичні поняття та висновки набувають безпосередньої ясності.

У XX ст. радянський математик П.С. Новиков (1901–1975) зазначав, що конструктивна логіка з'явилась у зв'язку зі спробами звільнити математичне мислення від неефективних методів. Типовим прикладом вияву неефективності в класичній математиці вважалось доведення існування математичних об'єктів із заданими властивостями, які не дають змоги здійснити конструктивну побудову індивідуального об'єкта з цими самими властивостями. Тому, за Новиковим, конструктивний підхід диктує інше, ніж у класичній математиці, осмислення логічних понять.

Бертран Рассел – британський математик, логік, соціолог, філософ, Нобелевський лауреат з літератури, має великі заслуги у сфері розробки мови сучасної логічної символіки.

Значним є внесок у розвиток сучасної логіки і деяких інших учених, зокрема представників львівсько-варшавської школи, до якої належали К.Твардовський, Я.Лукасевич, С.Лесьневський, А. Тарський, Т. Котарбіньський, К. Айдукевич та інші.

Логіко-філософська думка в Україні також активно розвивалася. Такі філософи, як В. Іванов, В. Шинкарук, А. Яценко широко досліджували ціннісні форми свідомості. Проблеми логіки філософського і наукового знання вивчались Т. Ойзерманом, В. Шинкаруком, М. Поповичем і С.Б. Кримським. Ці вчені та їх учні С.А. Васильєв, А.Є. Конверський, В.Д. Титов та інші зробили певний внесок у розвиток символічної логіки, логічної семантики й семіотики і пробудили інтерес до цієї цікавої і конче необхідної галузі знань як важливого засобу пізнання об'єктивної дійсності.

1.2 Поняття логічного слідування в логіці висловлювань і аналіз міркувань

Під висловлюванням розуміють розповідне речення, про яке можна однозначно сказати, чи воно істинне, чи хибне. Зазвичай висловлювання позначають буквами латинського алфавіту $A,B,C\ldots,p,\ q,\ r,\ s\ldots$. При цьому вважають, що константи 0 та 1 теж є висловлюваннями. Якщо висловлювання Аістинне, то пишуть: А=1, якщо хибне, то А=0. Числа 0 та 1 називають значеннями істинності висловлювання. [8, с. 7].

Найпростішою логічною операцією, яка застосовується до висловлювань є заперечення. Для його позначення користуються наступними символами: $\sim A$ *або* $\overline{A}$, що читаються *«не А»* або *«невірно,що А»* та визначаютьза допомогою матриці (таблиці) істинності, в лівій колонці якої даються два значення істинності ("істиннiть", "хибність") початкового висловлювання, а в правій колонці – його заперечення (табл. 1).

Істинність висловлювання буде позначатися літерою "і" або числом 1, хибність – буквою "х" або числом 0. Якщо висловлювання істинне, то його заперечення буде хибним, і навпаки.

Таблиця 1.1 – Таблиця істинності

A	$\bar{A}$
0	1
1	0

Кон'юнкція (логічне множення) двох або кількох простих висловлювань утворюється за допомогою логічної зв'язки *«і»*, позначається AB або $A \wedge B$. Вона вважаться істинною, якщо всі члени кон'юнкції будуть істинними. Наявність хоча б одного хибного висловлювання перетворює всю зв'язку в хибне висловлювання. [11, с. 6].

Диз'юнкція (логічне додавання) двох або більше простих висловлювань утворюється за допомогою логічної зв'язки *«або»*і позначається $A \vee B$.

В результаті операції імплікації утворюється складне висловлювання з двох простих висловлювань за допомогою логічної зв'язки, що позначається словами *"якщо А, то В", «з А випливає В», «А достатня умова для В», «В необхідна умова для А»* і позначається $A \longrightarrow B$.

Імплікативне висловлювання складається з двох простих висловлювань. Те, що вводиться словом *"якщо"*, називається антецедентом (попереднім висловлюванням), або підставою, а те, що починається словом *"то"* – консеквентом (наступним висловлюванням) або наслідком даного висловлювання. За допомогою цих понять визначаються необхідні і достатні умови. Наприклад, у висловлюванні *«Якщо трикутник має рівні сторони, то і всі кути його будуть рівні»* умова рівності сторін є достатньою умовою (підставою) для наслідку – рівність його кутів. Водночас можна сказати, що рівність кутів є необхідною умовою для рівності його сторін. [1, с. 30].

Імплікація є операцією формалізованої мови, а не конкретним умовним висловлюванням, яке можна розуміти по-різному в різних контекстах (причинний зв'язок, відношення між достатніми і необхідними умовами,зв'язок підстави і наслідку). Коли до уваги не береться відмінність між формалізованою і звичайною мовою, між імплікативним та умовним висловлюванням, тоді виникають парадокси імплікації, найбільш відомі з яких пов'язані з ототожненням імплікації з логічним слідуванням. Той факт, що в імплікації істинний консеквент виходить з будь-якого антецедента – істинного і хибного, стали тлумачити як твердження, що істина слідує із чого завгодно. Або іншими словами, що хибний антецедент імплікує будь-який – істинний або хибний –

консеквент та вважати, що з хибного висловлювання слідує будь-яке висловлювання. Але ці твердження не узгоджуються з нашими інтуїтивними уявленнями, і тому виступають як парадокси так званої матеріальної імплікації.

Операція еквівалентності об'єднує два висловлюваня, що мають однакові значення істинності та позначається $A \leftrightarrow B$ і читається *«якщо А, тоВ і навпаки», «А еквівалентне В», «А необхідна і достатня умова для В», «В тодіі тільки тоді, коли А».* В даному випадку висловлювання істинне лише тоді, коли обидва висловлювання *А, В* істинні або обидва хибні.

Наприклад є два висловлювання: *«Сума внутрішніх кутів трикутника дорівнює 180°»* і *«π<4»*. Позначимо їх через *А* та *В* та створимо еквіваленцію $A \leftrightarrow B$. *«Сума внутрішніх кутів трикутника дорівнює 180° тоді і тільки тоді, коли π<4»*. Оскільки обидва висловлювання є істинними, то і їх еквіваленція також буде істинним висловлюванням. [1, с.45].

Виходячи з цього можна побудувати таблицю істинності для цих логічних операцій (табл. 1.2)

Таблиця 1.2 – Таблиця істинності

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \longrightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1

Будь-яке складне висловлювання представляє собою деякий логічний вираз, що називається формулою. За прийнятим в логіці означенням:

а) «будь-яка змінна, що позначає висловлювання, являється формулою»;

б) «символи 0 та 1 також формули»;

в) «якщо *А* формула, то $\overline{A}$ формула»;

г) «якщо *А* та *В* формули, то $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \longrightarrow B$, $A \leftrightarrow B$ формули»;

д) «інших формул немає».

Наприклад, послідовність A,B,$\overline{B}$, $A \wedge \overline{B}$,$A \wedge \overline{B} \longrightarrow B$ є побудовою формули $A \wedge \overline{B} \longrightarrow B$.

Як і в звичайній алгебрі порядок виконання логічних операцій можна регулювати дужками. Якщо їх поставити в останній формулі таким чином: $A \wedge (\overline{B} \longrightarrow B)$, то побудова формули запишеться послідовністю A,B,$\overline{B}$,$\overline{B} \longrightarrow B$, $A \wedge (\overline{B} \longrightarrow B)$.

У відсутності дужок прийнято наступний порядок (за спаданням пріоритету) виконання дій: заперечення, кон'юнкція, диз'юнкція, імплікація, еквіваленція. [7, с.8].

Формулу A, значення якої при кожному наборі значень змінних дорівнює 1, називають тавтологією і позначають $\vdash A$. Іноді такі формули також називають тотожно-істинними формулами або законами логіки. Для доведення того, що формула являється тавтологією, достатньо для неї побудувати таблицю істинності і переконатися, що в останньому стовпчику лише одні одиниці.

Наведемо список основних тавтологій, особливість яких полягає в тому, що в кожній із них використовується імплікація:

а) $A \wedge (A \longrightarrow B) \longrightarrow B$ – закон заключення;

б) $A \wedge B \longrightarrow A$ або $A \wedge B \longrightarrow B$ – закони видалення кон'юнкції;

в) $A \longrightarrow A \vee B$ або $B \longrightarrow A \vee B$ – закони введення диз'юнкції;

г) $(A \vee B) \wedge B \longrightarrow A$ закон видалення диз'юнкції;

д) $A \longrightarrow \bar{\bar{A}}$ закон введення подвійного заперечення;

е) $\bar{\bar{A}} \longrightarrow A$ закон видалення подвійного заперечення;

є) $(A \longrightarrow B) \wedge (B \longrightarrow A) \longrightarrow (A \leftrightarrow B)$ закон введення еквіваленції;

ж) $(A \leftrightarrow B) \longrightarrow (A \longrightarrow B)$ закон видалення еквіваленції;

$(A \leftrightarrow B) \longrightarrow (B \longrightarrow A)$;

з) $(A \longrightarrow B) \longrightarrow (\bar{B} \longrightarrow \overline{A})$ закон контрапозиції;

и) $(\bar{A} \longrightarrow B) \wedge (\overline{A} \longrightarrow \overline{B}) \longrightarrow A$ закон доведення від супротивного;

і) $(A \longrightarrow B) \wedge (B \longrightarrow C) \longrightarrow (A \longrightarrow C)$ закон силогізму;

ї) $(A \longrightarrow C) \wedge (B \longrightarrow C) \longrightarrow (A \vee B \longrightarrow C)$;

й) $(A \longrightarrow B) \wedge (A \longrightarrow C) \longrightarrow (A \longrightarrow B \wedge C)$;

к) $(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \longrightarrow (A \leftrightarrow C)$ закон транзитивності еквіваленцій.

В логіці висловлювань формула B називається логічним наслідком формул $A_1, A_2, \dots, A_n$ $(n \geq 1)$, якщо формула $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \longrightarrow B$ є тавтологією. Запис логічного слідування для даних формул виглядає наступним чином: A_1, $A_2, \dots, A_n \vDash B$ і читається «із $A_1,\ A_2, \dots, A_n$ логічно слідує B».[1, с. 48].

Приклад.

Відомо теорему «Якщо многокутник *ABCDE* правильний, то його можна вписати в коло»можна розглядати як реалізацію відношення логічного слідування. Дійсно, позначимо A: многокутник *ABCDE* правильний, B: многокутник *ABCDE* можна вписати в коло. Тоді ця теорема запишеться у вигляді істинної імплікації $A \longrightarrow B$ і, за означенням, висловлювання B є логічним наслідком висловлювання A.

Зауважимо, що твердження «Якщо многокутник *ABCDE* неправильний, то його не можна вписати в коло» теж є імплікацією, але вона може бути як істинною так і хибною. Отже, ми не можемо стверджувати, що з висловлювання «многокутник *ABCDE* неправильний» випливає висловлювання «цей многокутник не можна вписати в коло», або інакше, друге висловлювання не є логічним наслідком першого.

Міркування вважають правильним, коли із кон’юнкції його посилок слідує логічний наслідок. Тому для перевірки правильності міркування достатньо виконати наступні дії:

а) представити у вигляді формул усі посилки та наслідки;

б) перевірити, чи формула наслідку є логічним слідуванням формул посилок.

Приклад.

Використаємо висловлювання з попереднього прикладу для такого міркування: «Якщо многокутник ABCDE правильний, то його можна вписати в коло. Многокутник ABCDE неправильний. Значить, його не можна вписати в коло». Подаємо його у формалізованому вигляді: *A* відповідатиме висловлюванню *«многокутник ABCDE правильний»; B – «многокутник ABCDE можна вписати в коло»*.

Тоді формули, що відповідають двом посилкам міркування та його наслідку, матимуть вигляд $A \longrightarrow B, \overline{A}$ і $\bar{B}$. Далі необхідно встановити чи являється формула $\bar{B}$ логічним слідуванням формул $A \longrightarrow B$ і $\overline{A}$. Для цього перевіряють чи формула $(A \longrightarrow B) \wedge \overline{A} \longrightarrow \bar{B}$ являється тавтологією: $(A \longrightarrow B) \wedge \overline{A} \longrightarrow \bar{B} \equiv \left(\overline{A} \vee B\right) \wedge \overline{A} \longrightarrow \bar{B} \equiv \overline{A} \longrightarrow \bar{B}$. Оскільки формула $\overline{A} \longrightarrow \bar{B}$ не є тавтологією, то і саме міркування не є правильним.

Відносно цього випливають такі властивості міркувань:

а) акщо міркування правильне, то це ще не доводить істинності наслідку. Так, наприклад, міркування 3 – правильне, але його наслідок хибний;

б) якщо наслідок істинний, то це ще не слідування правильності міркування. Наприклад, в міркуванні 2 истинним є і наслідок і посилки, але саме міркування неправильне;

в) якщо в правильному міркуванні усі посилки істинні, то і наслідок – істинний.

Таким чином, різниця між правильним і неправильним міркуванням заключається в тому, що посилки правильного міркування гарантують істинність наслідку. В неправильному міркуванні навіть при істинних посилках наслідок може бути як істинним так і хибним.

1.3 Логічне слідування як бінарне відношення на множині всіх висловлювань та його властивості

Наведемо спочатку найважливіші відомості про бінарні відношення на довільній множині.

Підмножину R декартового степеня M^n деякої множини M називають n-місним відношенням на множині M. Кажуть, що елементи $a_1, a_2, \dots, a_n \in M$ перебувають у відношенні R, якщо $(a_1, a_2, \dots, a_n)\in R$.

При n = 1 відношення $R \subseteq M$ називають одномісним, або унарним. Таке відношення часто називають також ознакою, або характеристичною властивістю елементів множини M.

Найпопулярнішими в математиці є двомісні, або бінарні відношення. Якщо елементи $a, b \in M$ перебувають у відношенні R, тобто $(a, b) \in R$, то це часто записують також у вигляді aRb. Зауважимо, що бінарні відношення іноді розглядають як окремий випадок відповідностей (а саме – як відповідності між однаковими множинами), тому багато означень і понять для відношень подібні до аналогічних означень і понять для відповідностей. [12, с.114].

На множині N натуральних можна виділити такі відношення:

а) R_1 – відношення «менше чи дорівнює», тоді $4R_1 9, 5R_1 5, 1R_1 m$ для будь-якого $m \in N$;

б) R_2 – відношення «ділиться на», тоді $24R_2 3, 49R_2 7,\ mR_2 1$ для будь-якого $m \in N$;

в) R_3 – відношення «є взаємнопростими», тоді $15R_3 8, 366R_3 121, 1001R_3 612$;

г) R_4 – відношення «складаються з однакових цифр», тоді $127R_4 721, 230R_4 302,\ 3231R_4 3213311$.

На множині точок координатної площини R^2 виділяють наступні відношення:

а) R_5 – відношення «лежать на однаковій відстані від початку координат», тоді (3,2)$R_5\left(\sqrt{5}, -\sqrt{8}\right)$, (0,0)$R_5(0,0)$;

б) R_6 – відношення «симетричні відносно осі ординат», тоді $(-3,2)R_6$(3,2), (1,7)$R_6(-1,7)$; або $(a, b)R_6(-a, b)$ для будь-яких $\alpha, b \in R$;

в) R_7 – відношення «менше або дорівнює», тоді $(a, b)R_7(c, d)$, якщо $\alpha \leq$ c і $b \leq d$. Зокрема, (1,7)$R_7(20,14), (-12,4)R_7(0,17)$.

Нехай R – відношення на множині M, тоді бінарним відношенням притаманні наступні властивості [12, с.118]:

а) відношення R називається рефлексивним, якщо для всіх $a \in M$ виконується aRa. Очевидно, що відношення R_1, R_2, R_4, R_5, R_7 – рефлексивні;

б) відношення R називають антирефлексивним (іррефлексивним), якщо для жодного $a \in M$ не виконується aRa. Відношення більше, менше, є синонімом антирефлексивні, а відношення R_6 не є ні рефлексивним, ні антирефлексивним;

в) відношення R називають симетричним, якщо для всіх $a, b \in M$ таких, що aRb, маємо bRa;

г) відношення R називають антисиметричним, якщо для всіх $a, b \in M$ таких, що aRb і bRa, маємо a = b. Наприклад, відношення R_3, R_4, R_5, R_6 – симетричні, а відношення R_1, R_2, R_7 – антисиметричні. Неважко переконатися, що відношення R симетричне тоді й тільки тоді, коли $R = R^{-1}$;

д) відношення R називають транзитивним, якщо із співвідношень aRb і bRc випливає aRc. Наприклад, відношення R_1, R_2, R_4, R_5, R_7 транзитивні, а відношення R_3, R_6 не транзитивні;

е) повним відношенням R на множині $a_1 \times a_2 \times \dots a_n$ називають відношення, для якого $R = a_1 \times a_2 \times \dots a_n$, тобто$R$ повністю співпадає з множиною $a_1 \times a_2 \times \dots a_n$.

Неважко переконатися, що відношення R транзитивне тоді й тільки тоді, коли R ° R ⊆ R (критерій транзитивності відношення).

Зауважимо, що коли відношення R має будь-яку з наведених вище властивостей, тоді обернене відношення R^{-1} також має ту саму властивість. Отже, операція обернення зберігає всі п’ять властивостей відношень.

Доведемо, що відношення R на множині M транзитивне тоді й тільки тоді, коли R ° R ⊆ R. Припустимо, що R – транзитивне відношення, $(x, y) \in R^\circ R$, тоді існує z такий, що $(x, z) \in R$ і $(z, y) \in R$, отже, $(x, y) \in R$ (за властивістю транзитивності R). Навпаки, нехай виконується включення $R^\circ R \subseteq R$. Розглянемо елементи $(x, y) \in R$ і $(y, z) \in R$, тоді $(x, z) \in R^{\circ}R$ і з умови отримаємо $(x, z) \in R$. Отже, R – транзитивне відношення.

Перейдемо до розгляду множини M всіх висловлювань. Введене у попередньому пункті поняття логічного слідування виділяє з множини M пари висловлювань (необов’язково простих) за таким правилом: формула B називається логічним наслідком формул $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n \geq 1)$, якщо формула $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \longrightarrow B$ є тавтологією. Позначимо складне висловлювання $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$ символом A і розглянемо пару (A, B), вона є елементом декартового квадрату M^2 множини всіх висловлювань. Тоді, за означенням, сукупність всіх пар, виділених з M^2 за вказаним правилом, є бінарним відношенням на множині M. Будемо позначати його символом L.

З’ясуємо, що дає такий підхід до трактування поняття логічного слідування. Для цього спочатку дослідимо, які властивості має це бінарне відношення.

Твердження. Бінарне відношення L логічного слідування на множині всіх висловлювань рефлексивне і транзитивне.

Доведення. Очевидно для будь-якого висловлювання a вірно, що $\mathrm{a}L\mathrm{a}$, оскільки $a \longrightarrow a$ є тавтологією. Отже, L є рефлексивним.

Доведемо транзитивність. Нехай для висловлювань $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}$ маємо aLb і bLc. Це означає, що формули $a \longrightarrow b$ і $b \longrightarrow \mathrm{c}$ є тавтологіями. Розглянемо формулу $a \longrightarrow c$. Припустимо, що вона не є тавтологією, тобто серед значень істинності цієї формули є 0 (хибність). За означенням імплікації це можливо тільки тоді, коли $a = 1$ і $c = 0$. Підставимо ці значення у формули $a \longrightarrow b$ і $b \longrightarrow c$, які за умовою є тавтологіями. Тоді з першої отримаємо $b = 1$. Але при $b = 1$ і $c = 0$ друга формула $b \longrightarrow c$ приймає значення 0, що неможливо, оскільки вона є тавтологією. Отримали протиріччя, значить наше припущення невірне і формула $a \longrightarrow c$ є тавтологією. Звідси випливає транзитивність бінарного відношення логічного слідування.

Можна показати, що бінарне відношення L має також властивість 4 – антисиметричність. Нагадаємо означення:

Відношення R називають антисиметричним, якщо для всіх $a, b \in M$ таких, що aRb і bRa, маємо $a = b$.

Припустимо, що для висловлювань a та b виконується aRb і $bRa,$ тобто кожне з висловлювань є логічним наслідком іншого. Ми говорили, що в цьому випадку висловлювання а та в називаються рівносильними і позначали $a \Leftrightarrow b$. Отже, в означені антисиметричності $a = b$ означає $a \Leftrightarrow b$. Ця природна модифікація означення дозволяє стверджувати, що бінарне відношення L $є$ антисиметричним.

Зауважимо ще такий очевидний факт, що не кожні два висловлювання знаходяться у відношенні логічного слідування, тобто це відношення не є повним, не має властивість 6.

Підсумовуючи дослідження властивостей відношення $L,$ сформулюємо таке твердження про його вид

Твердження Бінарне відношення L логічного слідування на множині всіх висловлювань є відношенням часткового порядку.

1.4 Числення висловлювань на базі імплікативних аксіом

Формальна система (формальна аксіоматична теорія) – результат строгої формалізації теорії, що передбачає повне абстрагування від змісту слів використаної мови, причому всі умови, що регулюють використання цих слів у теорії, явно подано аксіомами і правилами виведення.

Для формальної аксіоматичної теорії повинні справджуються такі умови:

а) визначено деяку злічену множину символів цієї теорії. Скінченні послідовності яких називають виразами теорії;

б) визначено підмножину виразів теорії, які називають формулами теорії;

в) визначено деяку множину формул теорії, які називають аксіомами.

Визначено скінченну множину відношень між формулами, які називають правилами виведення. При цьому для кожного правила виведення R існує натуральне число n, при якому для довільної множини n формул і довільної формули A можна встановити, чи знаходяться дані n формул з формулою A у відношенні. Якщо відповідь ствердна, то формулу A називають безпосереднім наслідком даних n формул згідно з правилом R.

Аксіоми зазвичай поділяють на:

а) логічні аксіоми, спільні для певного класу теорій;

б) нелогічні або власні аксіоми, що визначають специфіку й зміст конкретної теорії.

Виведенням у визначеній формальній аксіоматичній теорії називають будь-яку скінченну послідовність формул, у якій кожна формула або є аксіомою; або є безпосереднім наслідком деяких попередніх формул згідно з одним із правил виведення.

Формулу A теорії називають теоремою, якщо в даній теорії існує виведення, у якому останньою формулою є дана формула. Таке виведення називають виведенням формули A.

Формулу A називають наслідком множини формул H або кажуть, що з множини формул H випливає формула A, якщо існує така скінченна послідовність формул, у якій A – остання формула, а кожна формула:

а) або є аксіомою;

б) або є елементом Н;

в) або є безпосереднім наслідком деяких попередніх формул згідно з одним із правил виведення.

Таку послідовність формул називають виведенням A з H. Елементи H називають гіпотезами. Для скорочення запису висловлювання *«A є наслідком H»* і *«з H випливає A»* прийнято писати так: $H \vdash A$.

У скороченому записі *«A є наслідком порожньої множини гіпотез»* позначення для порожньої множини, як праволо, не використовують: $\vdash A$. Останній запис є також скороченим записом висловлювання *«A є теоремою»*.

Існують такі властивості правил виведення:

а) «Якщо H є підмножиною G та $H \vdash A$, то $G \vdash A$»;

б) «$H \vdash A$ тоді й лише тоді, коли в H існує скінченна підмножин G, при якій $G \vdash A$»;

в) «Якщо $H \vdash A$ та всі елементи H виводяться з G, то $G \vdash A$».

Якщо всі формули аксіоматичної теорії є теоремами, то її називають суперечливою. В іншому випадку – несуперечливою. [11, с. 31].

Формальна теорія є повною, якщо для довільної її формули або виводиться ця формула, або виводиться її заперечення. В іншому випадку, коли теорія містить висловлювання, які неможливо ні довести, ні спростувати в межах самої теорії її називають неповною.

Теорію називають розв’язною, якщо існує алгоритм, що для довільної формули за скінченну кількість кроків встановлює, чи існує її виведення. Інакше теорію називають нерозв’язною.

Окрему аксіому теорії називають незалежною, якщо її неможливо вивести з решти аксіом цієї теорії. Всю систему аксіом теорії називають незалежною, якщо кожна її аксіома є незалежною.

Числення висловлювань або пропозиціональна логіка – це формальна теорія, основним об’єктом якої є поняття логічного висловлювання. Така логіка є найпростішою і максимально близькою до людського способу неформальних міркувань, і тому її ще називають логікою нульового порядку.

Логікою першого порядку називають числення предикатів – формальна система математичної логіки, в якій допускають висловлювання відносно змінних, фіксованих функцій і предикатів.

Побудову формальної аксіоматичної теорії розпочинають з вичерпного опису мови формулювання висловлювань цієї теорії. Мова пропозиційної логіки будується на основі множини функціональних символів, а логіка предикатів – множини предикатних символів.

До таких символів належать:

а) $\in$ – читається як «належить»;

б) $=$ – читається як «дорівнює» або «збігається з»;

в) символи змінних, такі як a, b, c, ..., x, y, z, a_1, b_1. Передбачають зліченність символів, тобто можливість встановити взаємно однозначну відповідність між ними й підмножиною усіх натуральних чисел;

г) логічні або пропозиційні зв'язки:

1) ¬ або ~ – читається як «не (справджується)»;

2) ∧ або & – читається як «і»;

3) ∨ – читається як «або»;

4) ⇒ або → або ⊃ – читається як «випливає»;

5) або ↔ або ≡ або ~ – читається як «еквівалентно» або «(справджується) тоді й лише тоді, коли (справджується)»;

6) кома, дужки для структурування запису;

Перераховані символи утворюють алфавіт логіки першого порядку. Більш складні конструкції логіки першого порядку визначаються індуктивно:

а) терм – це символ змінної або має вигляд $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, f – функціональний символ арності n, а $x_1,x_2, \ldots,x_n$ – терми;

б) формула – це або атом, або одна з таких конструкцій: $\neg A$, $(A\wedge B)$, $(A\vee B)$, $(A\Rightarrow B)$, $(A\Leftrightarrow B)$, $\forall xA$ та $\exists xA$ при довільних формулах A і B та змінній x.

У численні висловлювань для кожної логічної зв'язки потрібно визначити правило, яке встановлює істинність формули. Найзручніше це зробити за допомогою таблиць істинності, у яких традиційно для двозначної логіки нулем позначають хибність, одиницею – істинність. Зауважимо, що розглядають і багатозначні логіки, у яких результат визначення істинності формули може набувати більше ніж два різних значення. [11, с. 32].

У наступній таблиці істинності (табл. 1.3) для двозначної логіки означено дію вже згаданих зв'язок і нових: штриха Шеффера | та стрілки Пірса ↓.

Таблиця 1.3 – Таблиця істинності

A	B	$A\wedge B$	$A\vee B$	$A\Rightarrow B$	$A\Leftrightarrow B$	$A\mid B$	$A\downarrow B$
0	0	0	0	1	1	1	1

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$	$A \mid B$	$A \downarrow B$
0	1	0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	0	0

Серед логічних зв'язок можна виділити ті, через які можна означити решту. Такі зв'язки називають елементарними. Як правило розглядають пари: (¬, ∧), (¬, ∨) чи (¬, ⇒). Однак і однією зв'язкою (штрихом Шеффера | чи стрілкою Пірса ↓) можна породити решту. Породити тут означає означити дію через дію елементарних зв'язок. Використовують також знак, який читають: «запис ліворуч позначає те, що записано праворуч». Наприклад,

$$(A \downarrow B) \leftrightharpoons ((\neg A) \wedge (\neg B)).$$

Змінну x називають зв'язаною у формулі F, якщо F має такий вигляд: $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \Rightarrow B)$, $(A \Leftrightarrow B)$, $\forall x A$ або $\exists x A$, причому x уже зв'язана в A і B. Інакше змінну x називають незв'язаною у формулі F. Формулу без незв'язаних змінних називають замкнутою формулою. Теорією першого порядку називають довільну множину замкнутих формул.

Для довільних формул A, B, C наступні формули є аксіомами числення висловлювань:

A_1 $A \Rightarrow (B \Rightarrow A))$;

A_2 $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$;

A_3 $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (B \Rightarrow (A \Rightarrow C))$;

A_4 $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$;

A_5 $(A \wedge B) \Rightarrow A$;

A_6 $(A \wedge B) \Rightarrow B$;

A_7 $A \Rightarrow (A \vee B)$;

A_8 $B \Rightarrow (A \vee B)$;

A_9 $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg A))$;

A_{10} $\neg\neg A \Rightarrow A$;

A_{11} $A \Rightarrow \neg\neg A$

Єдиним правилом виведення числення висловлювань слугує правило *modus ponens: B* є безпосереднім наслідком формул A *і* $A \Rightarrow B$*.* Інакше кажучи, якщо виведено формули A *й* $A \Rightarrow B$, то B також виведено. Традиційний запис цього правила такий [11, с.34]:

$$(\text{MP})\,\frac{A, A \Longrightarrow B}{B}.$$

Числення висловлювань є несуперечливою, повною, розв'язною теорією. Усі ці три твердження доводяться в рамках самої логіки висловлювань.

1.5 Поняття логічного слідування в модальній логіці

Модальна логіка з'явилась у часи античності та середньовіччя, але систематичні її розробки припадають на початок минулого століття.

Вагомий внесок у розвиток модальної логіки належить американському логіку К.І. Льюїсу, який у публікаціях 1916 і 1932 рр., виходячи з досягнень сучасної йому символічної логіки, запропонував формалізовану систему класичних модальностей і спробував побудувати теорію строгої імплікації, переглянув класичне поняття логічного слідування.

Ще одним з найбільш відомих дослідників у галузі модальної логіки є Я. Лукасевич, який звертає увагу на недостатність засобів двозначної логіки при аналізі висловлювань, в яких не просто щось стверджується або заперечується, а де висловлюється думка про неможливість чогось, про майбутні події, про неминучість чогось.

Під поняттям «модальна логіка» розуміють напрям сучасних логічних досліджень; модальна система, створена на підставі певного типу модальності.

До операторів модальної логіки висловлювань належать слова "необхідно", "можливо", "насправді", "випадково", "дозволено", "заборонено", "доведено", "спростовано", "знає", "вірує", котрі входять до структури висловлювань і надають їм нового змісту. [10, с.44].

Модальність (лат. Modus – спосіб) – властивість висловлювання, що визначає характер об’єктивних відношень між предметами та явищами, про які йдеться у висловлюванні; тип зв’язку між суб’єктом і предикатом у структурі висловлювання й уточнення його логічного статусу.

В залежності від цього, розрізняють наступні типи модальностей:

а) алетичні ("необхідно", "можливо", "насправді", "випадково");

б) деонтичні ("обов’язково", "дозволено", "заборонено");

в) епістемічні ("знає", "вірує", "сумнівається", "відомо", "невідомо", "переконаний");

г) часові ("було", "є", "буде") тощо.

Кожен тип модальності визначають з погляду об’єктивних (фактичних) і логічних детермінантів. Алетична модальність, зокрема, детермінується з погляду об’єктивних законів природи, суспільства й логічних законів, деонтична модальність – з погляду прийнятних у суспільстві правових і моральних норм, епістемічна модальність – з погляду закономірностей пізнання об’єктивного світу, часова модальність – з погляду часових характеристик того, що відбувається в світі. [4, с.250].

На підставі визначення об’єктивних (фактичних) і логічних детермінантів розрізняють онтологічну й логічну модальність.

Онтологічна модальність – фактична детермінованість висловлювань з певним типом модальності, коли їх істинність або хибність визначають на підставі дійсного стану справ (фактичних даних).

Логічна модальність – це логічна детермінованість висловлювань з певним типом модальності, коли їх істинність або хибність визначають логічними законами.

За логічною характеристикою розрізняють абсолютні та порівняльні (відносні) модальності, що означають властивість і відношення.

Абсолютні модальності характеризують властивості певних емпіричних або абстрактних об’єктів, а порівняльні – відношення між об’єктами. У кожній модальній системі виділяють особливі абсолютні модальності, котрі визначають властивості об’єкта, про який мовиться у висловлюванні, та порівняльні модальності, що визначають відношення між об’єктами. Скажімо, у модальній системі з часовими модальностями абсолютна модальність виражена словами "було", "є", "буде", а порівняльні модальності – словами "раніше", "одночасно", "пізніше".

Модальна система – формально-логічна система (модель, теорія, числення модальних висловлювань), створена на підставі певного типу модальності засобами особливої мови на загальних принципах побудови некласичних логік.

У модальних системах виділяють немодальну частину та суто модальну частину. Немодальна частина становить побудову матриць і аксіом за принципом двозначності (класичної символічної логіки). В той час як модальна частина означає введення певного типу модальності та встановлення логічних відношень між висловлюваннями з введеним типом модальності.

Розрізняють семантику та синтаксис модальної логіки. У семантичному аспекті визначають структуру модальних висловлювань на змістовному рівні. Це дає змогу виявити властивості висловлювань із певним типом модальності й виокремити онтологічні та логічні модальності, ввести терміни, що виокремлюють сферу міркувань з модальними висловлюваннями – висловлювання, властивість, відношення, терміни, які виокремлюють вид модальності – алетична, деонтична, епістемічна, часова та істиннісне значення висловлювання.

За значенням істинності модальна система є багатозначною, тобто висловлювання з певним типом модальності набуває $n > 2$ істиннісних значень.

У синтаксичному аспекті структуру модальних висловлювань визначають абстрактно від їх змісту і формалізують засобами штучно створеної мови, на підставі чого здійснюють логічні операції над символами, що зображають логічні відношення між модальностями (числення модальностей). [4, с.256].

Мова модальної логіки являє собою систему символів, що створюють алфавіт. До нього входять символи, введені в класичну символічну логіку, та нові символи, що позначають терміни, введені в модальну логіку.

1.6 Критика К.І.Льюїсом класичної теорії логічного слідування

Після виходу в світ праці Б. Рассела та В. Уайтхеда "Принципи математики" людство отримало класичну теорію логічного слідування, в основу якої було покладено відношення матеріальної імплікації. Дана теорія логічного слідування дала позитивні результати і в певних межах була досить адекватною, але відразу після своєї появи виявила до себе прискіпливий інтерес, який часто межував із спробами її ревізії.

Матеріальна імплікація являється узагальненням відношення між умовою і результатом, причиною і наслідком, підставою і висновком, попереднім і наступним, а також абстракцією смислового, змістовного зв’язку між антецедентом і консеквентом. [4, с.226]. Воно дозволяє зв’язувати не лише причину і наслідок, істинні висловлювання, які зв’язані за змістом, а й протилежні їм. Використовуючи в теорії логічного слідування матеріальну імплікацію, можна досліджувати найрізноманітніші предметні області, зв’язки та відношення, які існують між ними: чи то йдеться про числа, чи то про історичні події, чи то про астрономічні об’єкти тощо.

Така універсальність теорії логічного слідування є її значним досягненням, але вона має низку небажаних наслідків, за якими в логіці закріпилася назва «парадокси матеріальної імплікації». Образність цієї назви полягає в тому, що у відношеннях матеріальної імплікації немає того, що в логіці прийнято називати парадоксами, тобто внутрішньої суперечності. Тут є інше: невідповідність логічного слідування звичайному умовному зв'язку («якщо…, то…»).

У численні матеріальної імплікації істинними будуть:

а) «Якщо через провідник пропустити електричний струм, то він нагріється»;

б) «Якщо Земля – планета, то Париж – столиця Франції»;

в) «Якщо 2х2 = 5, то число планет 9»;

г) «Якщо 2х2 = 5, то число планет 5».

Лише в першому випадку антецедент і консеквент істинні і змістовно зв'язані. В решті прикладів антецедент з консеквентом або одночасно не істинні і не пов'язані за змістом, а якщо і істинні, то не мають смислового зв'язку, хоча і в цих випадках імплікація істинна.

Звідси випливають дві залежності:

а) «Істина слідує з будь-чого» $p \supset (q \supset p)$;

б) «Із хиби слідує будь-що» $p \supset (p \supset q)$.

Таблиця істинності для імплікації дуже виразно це ілюструє .

Таблиця 1.4 – Таблиця істинності

	p	q	$p \supset q$
1	i	i	i
2	i	x	x
3	x	i	i
4	x	x	i

З таблиці видно, що дефініція імплікації забороняє 2-й рядок, решту все дозволяє. Це відбувається за принципом «все, що незаборонено, те дозволяється». Тому, виходячи із даної дефініції ніяких «парадоксів» не виникає. Дискомфорт виникає тоді, коли ми виходимо за межі цієї дефініції і мимоволі забуваємо, що вона є абстракцією умовного зв'язку і, що таблиця істинності для імплікації не є ізоморфним зліпком зображення умовного зв'язку. Тоді 1-й та 3-й рядки таблиці є ілюстрацією першого формулювання "парадоксу", а 3 і 4 – другого. [4, с. 229].

У зв'язку з цим пошуки моделі логічного слідування, яке було б прийнятним змістовному, смисловому тлумаченню полягають не в тому, щоб знайти ще якусь імплікацію поряд з матеріальною, чимось схожу на матеріальну, але щоб вона не мала названих недоліків.

До понять системи строгої імплікації К.Льюїса належать такі твердження: "породжує", "сумісно", "незалежно","вивідне судження", "стверджуване судження".

Складовими системи строгої імплікації, або алфавітом є:

а) *p, q, r, ...p, q, r, ...* – висловлювання;

б) $\sim p$ – заперечення (читається "p – хибне", або "не – p");

в) *(pq)* – логічний добуток (читається: "p – істинне і q – істинне", "p і q");

г) $\lozenge\, p$ – (читається: "p можливо", "можливо, щоб p було істинним");

д) $p = q$ – логічна еквівалентність.

Крім вихідних елементів система містить низку дефініцій [4, с.231]:

Df 1: $p \vee q = \sim (\sim p \ \wedge \sim q)$ – читається: "в крайньому випадку одне із двох, p або q, істинне, разом хибними вони не можуть бути".

Df 2: $p \prec q = \sim \lozenge\ (p \ \wedge \sim q)$. Ця дефініція є визначенням строгої імплікації. Читається: "Хибно, що можливо, щоб "p" було істинним і водночас "q" було хибним"; "Не можне бути, щоб "p" було істинним, а "q" хибним"; "Забороняється, щоб "p" було істинним, а "q" – хибним.

Df 3: $(p = q) = (p \prec q)\ \wedge\ (q \prec p)$ – читається: "p строгоеквівалентне q тоді і тільки тоді, коли p строго імплікує q, а q строго імплікує p".

Льюїс визначає аксіоми своєї системи, в структурі яких фігурують лише логічний добуток, заперечення і строга імплікація.

В дедуктику системи Льюїса входить три правила: підстановки, ад'юнкції, інференції.

Правило підстановки має два формулювання:

а) будь-які два еквівалентні один одному вирази взаємозамінювані;

б) кожен вираз, який значимий у термінах системи, може бути підставлений замість p, або q, або r в будь-якому реченні чи теоремі.

В правилі ад'юнкції говориться про те, що будь-які два вирази, що стверджуються окремо, можуть стверджуватися разом.

Правилом інференції, якщо стверджується p істверджується $(p \prec q)$, то стверджуваним є і q.

Льюїс проводить порівняння матеріальної і строгої імплікації. В зв'язку з цим він до наведених вище трьох дефініцій додає ще дві:

Df 4. $p \supset q = \sim (p \ \wedge \sim q)$ – читається: "невірно, що p – істинне, а q – хибне".

Df 5. $(p \equiv q) = \sim (p \ \wedge \sim q) \wedge \sim (q \ \wedge \sim p)$ – читається: "p та q або обидва істинні, або обидва хибні".

Порівнюючи матеріальну імплікацію зі строгою, Льюїс приходить до висновку, що строга імплікація за обсягом поняття вужче, ніж матеріальна, тому, за законом оберненого відношення має місце залежність:»Якщо приймається строга імплікація, то приймається іматеріальна, але не навпаки» – $(p \prec q) \prec (p \ \supset \ q)$.

Льюїс не вважає ці формули за парадокси, оскільки вони не суперечать змістовному тлумаченню логічного слідування, як це відбувається з подібними виразами в системі матеріальної імплікації. В цілому концепція Льюїса є значимим внеском у розвиток сучасної модальної логіки.

Загалом К.Льюїсу вдалося чітко розмежівати матеріальну (або інтуїтивно-змістовну) і строгу (або необхідну) імплікації. Згодом ця система дістала назву числення алетичних модальностей, які дають змогу досліджувати проблеми логічного слідування, яке тісно пов'язане з поняттями необхідності й можливості.

2 ВІДНОШЕННЯ ЛОГІЧНОГО СЛІДУВАННЯ У НАВЧАННІ МАТЕМАТИКИ

2.1 Зв'язок між поняттями алгебри множин та логіки висловлювань

Поняття множини належить до основних понять математики. Воно не має точного визначення і належить до так званих аксіоматичних понять. [12, с.86].

Об'єкти, які входять до складу множини, називаються її елементами. Той факт, що елемент x належить множині A, позначається $x \in A$. Запис $x \notin A$ означає, що елемент x не належить множині A. Розглядається також множина, яка не містить жодного елемента, і називається вона порожньою та позначається $\varnothing$.

Згідно до інтуїтивного принципу об'ємності дві множини є рівними тоді і тільки тоді, коли вони складаються із однакових елементів. Рівність двох множин A та B позначається $A = B$.

Властивості відношення рівності множин:

а) $A = A$;

б) якщо $A = B$, то $B = A$;

в) якщо $A = B$ і $B = C$, то $A = C$.

Множина, яка складається із елементів $a_1, a_2, \dots, a_n$ позначається $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

Множина A називається підмножиною множини B, якщо кожний елемент множини A є елементом множини B. У такому разі пишуть $A \subseteq B$.

Властивості операції включення:

а) $A \subseteq A$;

б) якщо $A \subseteq B$ і $B \subseteq A$, то $A = B$;

в) якщо $A \subseteq B$ і $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$;

г) для довільної множини А $\varnothing \subseteq$ А.

Множина усіх підмножин множина A називається булеаном множини A і позначається $B(A)$ або A^2.

До основних операцій над множинами відносяться доповнення, перетин, об’єднання, різниця, та симетрична різниця, для позначення яких використовуються відповідно символи $^{-}$, $\cap, \cup, \setminus, \Delta$:

$\bar{A} = \{x \mid x \in U, x \notin A$ – доповнення множини A до універсальної множини U.

$A \cap B = \{x \mid x \in A, x \in B$ – перетин множин A та B.

$A \cup B = \{x \mid x \in A$ або $x \in B$ – об’єднання множин A та B.

$A \setminus B = \{x \mid x \in A, x \notin B$ – різниця множин A та B.

$A \Delta B \overset{\text{def}}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ – симетрична різниця множин A та B (позначення def = читається як "рівне за визначенням").

Множина усіх підмножин деякої універсальної множини U разом із заданими на ній операціями називається алгеброю множин.

Основні закони алгебри множин наведемо таблично:

Таблиця 2.1 – Основні закони алгебри множин

$A \cap B = B \cap A$ $A \cup B = B \cup A$ $A \Delta B = B \Delta A$	закони комутативності
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$	закони асоціативності
$A \cap A = A$ $A \cup A = A$	закони ідемпотентності
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$	закони дистрибутивності
$A \cap U = A$ $A \cup U = U$ $A \Delta U = \bar{A}$	властивості універсальної множини

Продовження таблиці 2.1

$A \cap \varnothing = \varnothing$ $A \cup \varnothing = A$ $A \,\Delta\, \varnothing = A$	властивості порожньої множини
$\bar{\bar{A}} = A$	закон подвійного доповнення
$A \cap \bar{A} = \varnothing$ $A \cup \bar{A} = U$ $A \,\Delta\, \bar{A} = U$	властивості доповнення
$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$	закони де Моргана
$A \setminus B = A \cap \bar{B}$ $A \setminus A = \varnothing$ $U \setminus A = \bar{A}$	властивості різниці
$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ $A \Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$ $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ $\overline{A \Delta B} = \bar{A} \Delta B = A \Delta \bar{B}$ $A \Delta A = \varnothing$	властивості симетричної різниці

Ще одним методом доведення теоретико-множинних співвідношень (рівностей або включень) є метод логічних таблиць. [12, с. 89].

Значення твердження, що об’єкт є елементом множини M (тобто $x \in M$), позначають символом 1. В іншому разі, якщо $x \notin M$, пишуть 0.

Доведемо методом логічних таблиць теоретико-множинну рівність:

$$A \setminus (B \Delta C) = (A \setminus \bar{B}) \Delta (A \setminus C) \; .$$

За допомогою індексів занумеруємо порядок виконання операцій у лівій та правій частинах. Матимемо $A \setminus_2 (B \Delta_1 C) = (A \setminus_1 \bar{B}) \Delta_3 (A \setminus_2 C)$. Запис *(k)* у таблиці позначатиме результат операції з номером k. Будуємо відповідні логічні таблиці:

Таблиця 2.2 – Таблиця істинності

$x \in A$	$x \in B$	$x \in C$	Ліва частина		Права частина		
			$x \in (1)$	$x \in (2)$	$x \in (1)$	$x \in (2)$	$x \in (3)$
0	0	0	0	**0**	1	0	**0**
0	0	1	1	**0**	1	0	**0**
0	1	0	1	**0**	0	0	**0**
0	1	1	0	**0**	0	0	**0**
1	0	0	0	**1**	1	0	**1**
1	0	1	1	**0**	1	0	**0**
1	1	0	1	**0**	0	1	**0**
1	1	1	0	**1**	0	1	**1**

Правило заповнення таблиці розглядають для випадку:

$$(x \in A) \wedge (x \notin B) \wedge (x \in C).$$

За таких умов виконується $x \in B\Delta C$ (у таблиці цей факт позначено $x \in (1)$). Тоді зі співвідношень $x \in A$ та $x \in B\Delta C$ випливає, що $x \notin A \setminus (B\Delta C)$, тобто x не є елементом множини в лівій частині.

За тих самих умов у правій частині матимемо послідовно: $x \in \bar{B}$ (оскільки $x \notin B$), $x \notin A \setminus \bar{B}$ (оскільки $x \in A$ та $x \in \bar{B}$), $x \notin A \setminus C$) (оскільки $x \in A$ та $x \in C$) і, нарешті, $x \notin (A \setminus \bar{B})\Delta(A \setminus C)$ (оскільки $x \notin A \setminus \bar{B}$ та $x \notin A \setminus C$).

Повний збіг значень в останніх (виділених) стовпцях таблиці, що відповідають лівій і правій частинам даної теоретикомножинної рівності, свідчить, що ця рівність справджується.

Доведемо теоретико-множинне включення $M1 \subseteq M2$ за допомогою методу логічних таблиць аналогічно попередньому прикладу. Будуємо логічні таблиці для множин *M1* та *M2*. Включення справджується, якщо в будь-якому рядку цих двох таблиць імплікація значення, що відповідає множині *M1*, і значення, що відповідає *M2*, є істинною (тобто твердження $\forall x((x \in M1) \rightarrow (x \in M2))$ – істинне).

Побудуємо відповідні логічні таблиці для доведення такого теоретико-множинного включення: $A \setminus (B \cup C) \subseteq (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Маємо $A \setminus_2 (B \cup_1 C) \subseteq (A \setminus_1 B) \cup_3 (A \setminus_2 C)$.

Імплікації виділених значень у всіх рядках таблиці є істинними, тому включення справджується. Аналіз отриманих логічних таблиць свідчить також, що в наведеному співвідношенні знак включення $\subseteq$ не можна замінити на знак рівності. Наприклад, для випадку $(x \in A) \wedge (x \notin B) \wedge (x \in C)$ (відповідний рядок таблиці – (1,0,1)) такий об'єкт x є елементом правої множини, однак він не належить лівій множині.

Таблиця 2.3 – Таблиця істинності

$x \in A$	$x \in B$	$x \in C$	Ліва частина		Права частина		
			$x \in (1)$	$x \in (2)$	$x \in (1)$	$x \in (2)$	$x \in (3)$
0	0	0	0	**0**	0	0	**0**
0	0	1	1	**0**	0	0	**0**
0	1	0	1	**0**	0	0	**0**
0	1	1	1	**0**	0	0	**0**
1	0	0	0	**1**	1	1	**1**
1	0	1	1	**0**	1	0	**1**
1	1	0	1	**0**	0	1	**1**
1	1	1	1	**0**	0	0	**0**

Перевіримо правильність такого твердження:

а) якщо $A \cap B \subseteq \bar{C}$ і $A \cup C \subseteq B$, то $A \subseteq \bar{C}$;

б) $A \cap B \subseteq C$ тоді й тільки тоді, коли $A \subseteq \bar{B} \cup C$;

в) якщо $A \cap B \subseteq C$, то $A \subseteq C$ і $B \subseteq C$.

а) позначимо елементарні твердження $x \in A$, $x \in B$ та $x \in C$ через a, b, c, відповідно. Тоді перевірка правильності сформульованого твердження зводиться до з'ясування коректності такого логічного висновку: $(a \wedge b) \to (\neg c), (a \vee c) \to b \vdash a \to (\neg c)$.

Тобто слід визначити, чи є тавтологією формула:

$$((a \wedge b) \rightarrow (\neg c)) \wedge ((a \vee c) \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow (\neg c)).$$

Побудовою таблиці істинності або методом відшукання контрприкладу переконуємось, що остання формула є тавтологією. Отже, твердження правильне.

б) використаємо ті самі елементарні твердження, що й у попередньому пункті. Відповідна до наведеного твердження формула

$$((a \wedge b) \rightarrow c)) \sim (a \rightarrow (\neg b \vee c))$$

є тавтологією, що свідчить про його правильність.

в) аналогічно попереднім пунктам запишемо відповідну наслідковість $a \wedge b \rightarrow c\,(a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow c)$. Неважко переконатись, що ця наслідковість не виконується. Наприклад, для елемента x такого, що $x \in A,\ x \notin B$ та $x \notin C$, засновок $a \wedge b \rightarrow c$ буде істинним, а висновок $(a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow c)$ – хибним.

2.2 Теорема як логічне слідування. Види теорем. Необхідні та достатні умови

Доведення в математиці та інших дедуктивних науках є ланцюжком правильних висновків, що йдуть від вихідних для даної теорії посилок, визнаних дійсними, до твердження, яке доводиться.

Математичне рішення, істинність якого встановлюється за допомогою доведення, називають теоремою.

Назва «теорема» походить від грецького слова теорема – вистава, видовище (тому що в стародавності часто теореми доводилися привселюдно, на площах, і вони носили характер суперечки, диспуту).

У шкільному курсі математики для словесного формулювання теореми використовуються три форми судження:

а) категоричне (приклад – середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює їх напівсумі);

б) умовне (приклад – якщо в три кутнику два кути рівні, то трикутник рівнобедрений);

в) розділове (приклад – площина і пряма, яка не лежить на ній, або не перетинаються, або перетинаються в одній точці).

Теорема складається з трьох частин:

а) роз'яснювальна частина, де описується безліч *М* об'єктів, про які йде мова в цій теоремі;

б) умова теореми, тобто деякий предикат *A(x)*, заданий на множині *M*;

в) висновок теореми – деякий предикат *B(x)*, заданий на множині *M*.

У символах математичної логіки теорема може бути записана наступним чином: $(\forall x \in M)(A(x) \rightarrow B(x))$, де $(\forall x \in M)$ – роз'яснювальна частина теореми; $A(x)$ – умова теореми; $B(x)$ – висновок теореми.

Основним інструментом доведення теорем є умовиводи. Умовивід – міркування, у ході якого з одного або декількох суджень (званих посилками умовиводу) виводиться нове судження (зване висновком або наслідком), що логічно випливає з посилок.

Формою дедуктивних умовиводів, що використовуються при доведенні теореми, є силогізм. У силогізмі міститься три поняття, а складається він із двох посилок і висновку. Його структуру можна представити в такому виді:

Всі *M* є *P* – більша посилка (БП);

K є *M* – менша посилка (МП);

K є *P* – висновок (В).

Наведемо приклад силогізму: «Всі ромби *(М)* є паралелограми *(Р)*. Квадрат *(К)* є ромб *(М)*. Отже, квадрат *(К)* є паралелограм *(Р)*».

Ланцюжок послідовно зв'язаних силогізмів, що встановлює істинність теореми, називається доведенням теореми [1, с. 115].

Спільними методами доведення теорем у курсі математики середньої школи є синтетичний, аналітичний методи, доведення протиріччям, доведення методом перебору, доведення методом виключення, метод нескінченних винятків, метод повної індукції, метод математичної індукції, метод конструювання.

Серед усіх методів доведення теорем у шкільному курсі геометрії основне навантаження несе синтетичний метод, бо він є складовою частиною доведення. Аналіз і синтез практично невіддільні один від одного і складають єдиний аналітико-синтетичний метод.

При доведенні необхідно дотримувати наступних правил доказового міркування. Необхідно, щоб теза була висновком, що логічно випливає з аргументів за загальними правилами умовиводів, або була би отримана відповідно до правил побічного доведення. [5, с.104].

Коли говорять, що з одного або декількох висловлювань $A_1, A_2, \dots A_n$ випливає висловлювання *B,* то мають на увазі наступне: завжди, коли виявляться істинними всі висловлювання $A_1, A_2, \dots A_n$, істинним буде й висловлювання *B*.

Задача математичної логіки (зокрема, алгебри висловлювань) у питаннях логічного слідування полягає в тому, щоб вказати такі форми висловлень $A_1, A_2, \dots A_n$, B коли останнє висловлення неодмінно було б наслідком *n* перших, незалежно від конкретного змісту всіх цих висловлень. Форми висловлень виражаються, як нам відомо, формулами алгебри висловлень.

Формула $H(x_1, x_2, \dots, x_n)$ є логічним слідуванням або наслідком формул $F_1(x_1, x_2, \dots, x_n), F_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, F_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$, якщо вона приймає значення істинність при будь-яких наборах $a_1, a_2, \dots, a_n$, які перетворюють формули $F_1, F_2, \dots, F_n$ в істинність. Позначається $F_1, F_2, \dots, F_n \vDash B$.

Теорема. Формула H є логічним наслідком формули F тоді і тільки тоді, коли формула $F \to H$ є тавтологією і схематично виглядає так $F \Big| = H \leftrightarrow F \to H$.

Необхідність: Нехай H логічно слідує з F $(F| = H)$, тоді за означенням якщо $\lambda\big(F(x_1, x_2, \dots, x_n)\big) = 1$ то $\lambda\big(H(x_1, x_2, \dots, x_n)\big) = 1$. Дане твердження можна записати в такому вигляді: $\lambda\big(F(x_1, x_2, \dots, x_n)\big) \to \lambda\big(H(x_1, x_2, \dots, x_n)\big)$.

Скористаємось формулою $\lambda(A) * \lambda(B) \cong \lambda(A * B)$ і наш вираз набуде вигляду $\lambda\big(F(x_1, x_2, \dots, x_n) \to H(x_1, x_2, \dots, x_n)\big) = 1$.

Достатність: Оскільки $F \to H$ є тавтологією, то для будь-якого набору $a_1, a_2, \dots, a_n$ виконується рівність $\lambda\big(F(x_1, x_2, \dots, x_n) \to H(x_1, x_2, \dots, x_n)\big) = 1$.

Скориставшись $\lambda(A * B) \cong \lambda(A) * \lambda(B)$ маємо $\lambda\big(F(x_1, x_2, \dots, x_n)\big) \to \lambda\big(H(x_1, x_2, \dots, x_n)\big) = 1$. Згідно даної формули і означення ми можемо стверджувати, що якщо $\lambda\big(F(x_1, x_2, \dots, x_n)\big) = 1$ то $\lambda\big(H(x_1, x_2, \dots, x_n)\big) = 1$.

За означенням логічного слідування H є наслідком F. Доведено**.** [1, с.117]

Теорема. Для будь-яких формул $F_1, F_2, \dots, F_n, H$ наступні записи є рівносильними:

а) $F_1, F_2, \dots, F_n \ \vDash H$;

б) $F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_n \ \vDash H$;

в) $\vDash F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_n \ \to H$.

Доведення. а) => б):

Нехай існує набір значень $a_1, a_2, \dots, a_n$, таких, що $\lambda(F_1\left(\overline{a_1, a_n}\right) \wedge F_2(\overline{a_1, a_n}) \wedge \dots \wedge F_m(\overline{a_1, a_n})\Big) = 1$. З означення кон'юнкції випливає, що кожен елемент рівний 1: $\lambda(F_1) = 1, \lambda(F_2) = 1, \dots, \lambda(F_m) = 1$. Якщо кожен елемент Fi істинний, то згідно пункту а) $\lambda(H) = 1$, тобто з формули $F_1\overline{(a_1, a_n)} \wedge F_2\overline{(a_1, a_n)} \wedge \dots \wedge F_m\overline{(a_1, a_n)}$ випливає істинність формули H.

б) => а): Якщо $\lambda(F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_n) = 1$, то $\lambda(H) = 1$, $\lambda(F_1) \wedge \lambda(F_2) \wedge \dots \wedge \lambda(F_n) = 1$. За означенням кон'юнкції кожен елемент повинен дорівнювати 1, тобто з того, що $\lambda(F_i) = 1, (i = 1..n)$ випливає, що $\lambda(H) = 1$, тобто H є логічним наслідком даної формули.

Рівносильність пунктів б), в) випливає з умови попередньої теореми. Доведено**.**

Теорема. Відношення логічного слідування між формулами алгебри висловлень має наступні властивості:

а) $\overline{F_1, F_m} \vDash F_i, i = \overline{1, m}$;

б) $\overline{F_1, F_m} \vDash B_1, B_1 \vDash B_2 \to \overline{F_1, F_m} \vDash B_2$;

в) $\overline{F_1, F_m} \vDash B \to \overline{F_1, F_m}, F \vDash B, F$ – довільна формула алгебри висловлювань;

г) $F_1, F_2, \dots F_{i-1}, F_i, F_{i+1}, \dots, F_m \vDash B \to F_1, F_2, \dots, F_{i-1}, F_{i+1}, \dots, F_m, \vDash B, \quad Fi$ – тавтологія.

Теорема. Дві формули алгебри висловлень рівносильні тоді й тільки тоді, коли кожна з них є логічним наслідком іншої: $F \cong H \leftrightarrow F \vDash H$ і $H \vDash F$.

Зауваження. Якщо деяка формула є тавтологією, то кожен її логічний наслідок також є тавтологією.

Схема логічного слідування записується у вигляді дробу, у знаменнику якого задається формула, яка є логічним слідуванням формул, що записані в чисельнику: $\frac{U \to B, U}{B}$; $\frac{F, G}{F \wedge G}$; $\frac{F \to G, \bar{G}}{\bar{F}}$; $\frac{F \wedge G}{F}$.

Зауваження! Якщо формули, що знаходяться в чисельнику схеми логічного слідування є тавтологіями, то формула, що знаходиться в знаменнику, є теж тавтологією.

Наприклад, правило (modus ponens) $\frac{F, F \to G}{G}$ означає, що від твердження про істинність посилки *F* за допомогою іншої посилки *F*→*G* переходять до твердження про істинність наслідку *G*. Дане правило називають також правилом висновку або відділення (від посилки *F* →*G* за допомогою посилки F відділяється висновок *G*).

$\frac{F \to G, \bar{G}}{\bar{F}}$ називається правилом modus tollens*:* від заперечення істинності посилки *G* за допомогою посилки *F* → *G* переходять до заперечення істинності *F*.

Правило (введення кон'юнкції): $\frac{F,G}{F\wedge G}$

Правило (видалення кон'юнкції): $\frac{F\wedge G}{F}, \frac{F\wedge G}{G}$

Правило (введення диз'юнкції): $\frac{F}{F\vee G}, \frac{G}{F\vee G}$

Правило (контрапозиції): $\frac{F\to G}{\bar{G}\to\bar{F}}$

Способи доведення схем логічного слідування:

а) утворити формулу $F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_m \to H$ і показати, що вона є тавтологією;

б) доводити методом від супротивного. Припустити, що існують такі $a_1, \dots a_m$, які при підстановці замість змінних $x_1, \dots, x_m$ дають наступні значення: $\lambda(H) = 0, \lambda(F_i) = 1, i = \overline{1, m}.$

Доведемо, що B є логічним наслідком формул A й $A \to B$, тобто $A, A \to B \longmapsto B$.

Побудуємо таблицю істинності для формул $A, A \to B, B$.

Таблиця 2.4 – Таблиця істинності

A	B	$A \to B$	B
1	**1**	**1**	**1**
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	0

Червоними кольорами виділені стовпці для формул з посилки, а синім – для наслідку. Згідно визначення, необхідно перевірити, щоб у всіх рядках, де одночасно зустрічаються дві червоні одиниці синя була також 1, а не 0 (цей рядок виділений жирним шрифтом). Таким чином, ми переконалися, що B є логічним наслідком формул й $A \to B$.

2.3 Логічне слідування в логіці предикатів

Логіка висловлювань дозволяє розв'язати численні задачі, пов'язані з мисленням і дослідженням правильності мислення, особливо в рамках природничо-математичних наук. Але неважко навести приклади, коли інструментів логіки висловлювань виявляється недостатньо. Навіть в шкільному курсі математики є багато прикладів подібного роду [8, с.62]:

а) «Якщо число ціле, то воно раціональне. Дане число ціле. Значить, воно раціональне»;

б) «Будь-яке ціле число є раціональним. Дане число ціле. Значить, воно раціональне».

Наприклад, ми хочемо з'ясувати правильність такого міркування: «Прямі *а* та *в* паралельні. Прямі *в* та *с* паралельні. Отже, прямі *а* та *с* паралельні». Маємо три висловлювання, які можемо позначити A, B, C. В логіці висловлювань це міркування запишеться формулою і його істинність випливала б з тавтологічності цієї формули, що очевидно не має місця. Отже, ми знаємо, що наведене міркування істинне, але довести це засобами логіки висловлювань не можемо. Аналіз міркувань подібного роду приводить до необхідності розширення логіки висловлювань і таким розширенням є логіка предикатів.

Твердження, яке залежить від n змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$ і перетворюється у висловлювання в результаті заміни всіх змінних їх значеннями з деяких множин $M_1, M_2, \dots, M_n$ відповідно, називається n –місним предикатом, заданим на множинах $M_1, M_2, \dots, M_n$. Позначається $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, змінні $x_1, x_2, \dots, x_n$ називають предметними. Підмножина множини $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$, на якій предикат перетворюється в істинне висловлювання, називається областю істинності предиката і позначається $I(P)$.

Якщо в означенні предиката $M_1 = M_2 = \dots = M_n$, то говорять, що n –місний предикат заданий на множині M.

З предикатами зустрічаються ще в середній школі. Кожне алгебраїчне рівняння або нерівність є предикатом. Завдання розв’язати рівняння або нерівність є по суті завданням знайти область істинності предиката. [8, с.63].

Якщо множина істинності предикату співпадає з його областю визначеності, то він називається тотожно істинним. Предикат з порожньою областю істинності називається тотожно хибним.

Два предикати, задані на одній і тій же множині, називаються рівносильними, якщо при будь-якому наборі значень змінних вони приймають однакові значення істинності.

Відношення рівносильності предикатів є відношенням еквівалентності. Цей факт є дуже корисним і широко використовується. Наприклад, при розв’язанні рівнянь або нерівностей (які є предикатами) це дозволяє переходити від одного з них до рівносильного йому. Ми називаєм такий перехід рівносильним перетворенням.

Відношення рівносильності формул, очевидно, має властивості рефлексивності, симетричності і транзитивності.

В таблиці 2.6 подано найчастіше вживані рівносильності логіки предикатів:

Таблиця 2.5 – Рівносильності логіки предикатів

$\overline{\forall x P(x)} \equiv \exists x \bar{P}(x)$ $\overline{\exists x P(x)} \equiv \forall x \bar{P}(x)$	закони де Моргана для кванторів
$\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$	дистрибутивний закон $\forall$ відносно $\wedge$
$\exists x(P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$	дистрибутивний закон $\exists$ відносно $\wedge$
$\forall x(a(x) \wedge \beta) \equiv \forall x a(x) \wedge \beta$ $\forall x(a(x) \vee \beta) \equiv \forall x a(x) \vee \beta$ $\exists x(a(x) \wedge \beta) \equiv \exists x a(x) \wedge \beta$ $\exists x(a(x) \vee \beta) \equiv \exists x a(x) \vee \beta$	закони пронесення кванторів при тій умові, що формула β не містить вільних входжень x
$\forall x(a(x) \to \beta) \equiv \exists x a(x) \to \beta$ $\exists x(a(x) \to \beta) \equiv \forall x a(x) \to \beta$	

Продовження таблиці 2.5

$\forall x \forall y a_1(x,y) \equiv \forall y \forall x a_1(x,y)$ $\exists x \exists y a_1(x,y) \equiv \exists y \exists x a_1(x,y)$	закони перестановки однойменних кванторів
$Qxa(x) \equiv Qua(u)$	перейменування зв'язаної змінної

Кажуть, що формула β логіки предикатів є логічним слідуванням формули α в логіці предикатів, якщо на кожній множині M при довільній інтерпретації формула β набуває значення 1 при всіх підстановках замість вільних змінних тих елементів множини M, при якому формула α набуває значення 1. Символічно це записують, як і в алгебрі висловлень, $\alpha \vDash \beta$, при цьому формулу α називають посилкою, чи припущенням, а β – висновком.

Логічне слідування $\alpha_1, \alpha_{2,} \dots, \alpha_n \vDash \beta$ має місце тоді, коли тотожно істинною є формула $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \alpha_n \to \beta$.

Наприклад, нехай множиною визначення наступних предикатів є множина дійсних чисел. Тоді предикат $|x| = 0$ є логічним наслідком предиката $3x^3 - 2x = 0$ (або з предиката $|x| = 0$ випливає предикат $3x^3 - 2x = 0$). З предиката $|x| < 0$ випливає будь-який предикат. З предиката $|x - 1| = 0$ не випливає предикат $3x^3 - 2x = 0$.

Приклад.

Перевірити, чи є правильним міркування:

«а) деякі рівнобедрені трикутники – прямокутні; б) жодний прямокутний трикутник не є правильним. Отже, деякі рівнобедрені трикутники не є правильними».

Запишемо логічну структуру міркування, замінюючи пропозиційні форми "x – рівнобедрений трикутник", "x – прямокутний трикутник" і "x – неправильний трикутник" відповідними предикатами $P(x)$, $Q(x)$ і $R(x)$.

Припущення а) $\exists x\big(P(x) \wedge Q(x)\big)$; б)$\forall x(Q(x) \to R(x))$, висновок: $\exists x(P(x) \wedge R(x))$.

2.4 Приклади використання логічного слідування та рівносильності при розв'язанні задач шкільного курсу математики

Поняття слідування відноситься до одного з найважливіших логічних понять математики. Це поняття використовується при формулюванні і доведенні теорем, розв`язуванні різних математичних задач.

У процесі викладання шкільного матеріалу застосовують усі відомі закони логіки, хоч і в неявному вигляді. Проте знання цих законів дає змогу вчителеві краще усвідомити коректність суджень, правильність побудови процесу навчання. Для прикладу наведемо логічний аналіз процесу розв'язання лінійного рівняння з параметрами: $(b-2)\cdot a^2x = b^2-4, a, b \in Q$.

Розв'язування подібних рівнянь пов'язане з певними логічними труднощами, які часто призводять до помилок. Логічний аналіз процесу розв'язування має допомогти вчителеві правильно побудувати навчання. Розв'язуючи рівняння при умові $(b-2)\cdot a^2 \neq 0$, дістаємо єдиний розв'язок $x = \frac{b+2}{a^2}$. Природно постає питання, які ж розв'язки має рівняння, коли ця умова не виконується. Умова $(b-2)\cdot a^2 \neq 0$ складена й може бути виражена за допомогою простіших умов так: $(b - 2 \neq 0)$ і (а $\neq$ 0) або $b \neq 2$ і α $\neq$ 0 (еквівалентність $((b - 2)\, a^2 \neq 0) \leftrightarrow (b \neq 2)$ і $(\alpha \neq 0)$ істинна при будь-яких наборах значень a і b). Умова $b \neq 2$ і $\alpha \neq 0$ не виконується, тобто речення хибне, коли його заперечення $b = 2$ або а $= 0$ є істинним реченням. [7, с.71].

Власне геометрична мова містить знаки для позначення ряду бінарних відношень (паралельності, перпендикулярності, подібності), тобто предикатні букви « || », «⊥», «∾». З допомогою знаків цих відношень і сталих або змінних для прямих, площин, фігур утворюються формули виду: а || b, а || а, а ⊥ b, $\Delta\, ABC \backsim \Delta\, A_1B_1C_1$ тощо.

Формула $\Delta\, ABC \backsim \Delta\, A_1B_1C_1$ є аналогом простого розповідного речення «Трикутники $\Delta\, ABC$ і $\Delta\, A_1B_1C_1$ подібні»; формула $a \perp b$ є аналогом простого речення «Прямі a і b перпендикулярні» і т. д. За допомогою сполучників або сполучних слів (відповідних логічних операцій) з елементарних формул шкільної математики утворюються формули довільної складності. Наприклад, формула $(a \parallel b) \wedge (a \perp c) \Rightarrow (b \perp c)$, утворена з елементарних формул за допомогою сполучника «і» (йому відповідає логічна операція ∧) та сполучних слів «з ... випливає ...» (=> – імплікація), є аналогом складного розповідного речення природної мови: «З того, що прямі a і b паралельні і пряма a перпендикулярна до прямої c, випливає, що пряма b також перпендикулярна до прямої c» (тут мається на увазі, що прямі a, b, c лежать в одній площині).

У шкільній математиці при записі математичних речень (формул) логічні операції виражаються словами розмовної мови. Проте це аж ніяк не заважає бачити в конкретному математичному реченні формулу шкільної математики і навпаки. І в цьому випадку математичні речення будують з формул шкільної математики за простими правилами, які можна об'єднати в таке означення:

а) «будь-яка формула є математичним реченням»;

б) «якщо A – математичне речення, то «Неправильно, що A» – також математичне речення»;

в) «якщо A і B – математичні речення, то «A і B», «A чи B», «Якщо A, то B», «A тоді і тільки тоді, коли B» – математичні речення»;

г) «якщо А (х) – математичне речення, яке має вільну змінну x, то «Для будь-якого $xA(x)$» і «Існує x таке, що $A(x)$» – математичні речення (в них x – зв'язана змінна)»;

д) «Інших математичних речень немає». [7, с.77].

Символікою математичної логіки досить зручно користуватися, записуючи розв'язування рівнянь, нерівностей, їх систем та сукупностей. У шкільній математиці в явному вигляді користуються символами логічних операцій імплікації (⇒) і еквіваленції (⇔). Візьмемо два речення, побудовані за допомогою сполучних слів «якщо..., то...»: а) «Якщо $x = 5$, то $x^2 = 25$» і б) «Якщо $x^2 = 25$, то $x = 5$». Про речення а) у шкільній математиці говорять, що воно правильне (істинне), а про речення б) – що воно неправильне (хибне). Як же розуміють логічну зв'язку «...якщо, то...»? Відомо, що в математичній логіці імплікація A => B може складатися з довільних висловлень A і B, які, можливо, за змістом не зв'язані. Істинність такої імплікації залежить лише від істинності чи хибності висловлень A і B, а не від їх змісту. Так, речення «Якщо 5^2 = 25, то суміжні кути в сумі становлять 180°» вважається істинною імплікацією, бо «Суміжні кути в сумі становлять 180°» – істинне висловлення. А в шкільному курсі математики речення A, B в записі A => B поєднуються між собою змістом, умовно-наслідковим або причинно-наслідковим зв'язком. Наприклад, в) «якщо чотирикутник – прямокутник, то всі його кути прямі»; г) «якщо 28 ділиться на 7, то й 28 • 10 також ділиться на 7» і т. д. [7, с.79]. Такі імплікації називають змістовно-умовними або просто умовними висловленнями. Для умовного висловлення A => B виконується та сама таблиця істинності, що й для будь-якої імплікації: таке висловлення, як і довільна імплікація, хибне лише тоді, коли відомо, що при істинному A хибне B. Так, речення в) хибне лише тоді, коли існує такий прямокутник, у якого хоча б один з кутів не дорівнює 90°. За означенням імплікації, обидві імплікації а) і б) – висловлювальні форми, бо вони містять змінну x. При цьому а) перетворюється на істинне висловлення при будь-якому значенні x, тобто висловлення $(\forall(x) \in \mathbb{R}\left((x=5) \Rightarrow (x^2=25)\right)$ істинне; а речення б) перетворюється на істинне висловлення при деяких значеннях x (наприклад, якщо x = 0, 1, 2, 6, 19, 100), а при деяких (наприклад, x = -5) – на хибне висловлення, тобто висловлення $(\forall(x) \in \mathbb{R}\left((x^2=25) \Rightarrow (x=5)\right)$ хибне. Таким чином, коли говорять, що речення а) істинне, а речення б) хибне, то сполучні слова «якщо..., то...» розуміють не як імплікацію, а як вираження відношення слідування.

Взагалі, нехай $A(x)$ і $B(x)$ – висловлювальні форми з вільною змінною x. У школі говорять, що з $A(x)$ випливає $B(x)$ і пишуть $A(x) \Rightarrow B(x)$, якщо $B(x)$ перетворюється на істинне висловлення при всіх тих значеннях x, при яких $A(x)$ перетворюється на істинне висловлення; іншими словами, коли $B(x)$ є логічним наслідком з $A(x)$, тобто коли $(\forall x) \in x\left(A(x) \Rightarrow B(x)\right) = 1$, де символ «⇒» вже означає логічну операцію імплікацію. Таким чином, у шкільній математиці знак «=>» позначає цілком певне відношення між математичними реченнями, а саме – відношення слідування.

Знаком «<=>» у шкільній математиці позначають відношення рівносильності речень: «Якщо з першого речення випливає друге і з другого випливає перше, то ці речення називаються рівносильними», тобто $A(x) \Leftrightarrow B(x)$ тоді й тільки тоді, коли $A(x) \Rightarrow B(x)$ і $B(x) \Rightarrow A(x)$ істинні твердження.

За логічним законом достатньої підстави кожне істинне твердження має бути обґрунтоване за допомогою певних міркувань. Зокрема більшість істин шкільної математики ми доводимо на основі міркувань. При цьому неодмінно користуємось так званими умовиводами. [9, с.184].

У математичній логіці умовиводами називають правила виведення, або дедуктивні схеми, і записують їх у вигляді співвідношень, основна роль у яких належить формулам математичної логіки. За допомогою розглянутих дедуктивних схем можна згідно із законами логіки будувати дедуктивні ланцюжки (тобто записувати процес міркувань мовою математичної логіки), які ведуть від заданих посилок (уже встановлених або прийнятих за домовленістю істин) до наслідків з них (нових істин). Отже, найчастіше в шкільній математиці користуються такими умовиводами:

а) правило висновку $A, A \Rightarrow B \vDash B$: з істинності тверджень виду *A* завжди випливає істинність твердження *B*;

б) правило заперечення $A \Rightarrow B, \bar{B} \vDash \bar{A}$: з істинності тверджень виду «з *A* випливає *B*» і «неправильно, що *B*» завжди випливає істинність твердження «неправильно, що *A*»;

в) окремий випадок правила силогізму $A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \vDash A \Rightarrow C$: з істинності тверджень виду «якщо *A*, то *B*» і «якщо *B*, то *C*» завжди випливає істинність твердження «якщо *A*, то *C*»;

г) правило диз’юнктивного силогізму $A \vee B, \bar{A} \vDash B$: з істинності речення виду «*A* або *B*» й хибності одного з простіших речень *A*, *B* завжди випливає істинність другого з речень *B*, *A*: якщо хибне *A*, то істинне *B*; навпаки, якщо хибне *B*, то істинне *A*;

д) правило введення посилки: якщо з істинності твердження M випливає істинність твердження N, то з істинності твердження виду «M і U», де U – довільне твердження, також випливає істинність твердження N;

е) правило вилучення посилки: якщо з істинності речення виду M_1 і M_2 випливає істинність речення N і з істинності речення M_1випливає істинність речення M_2, то істинність речення N випливає з істинності лише одного твердження M_1;

є) правило введення диз'юнкції: з істинності твердження M випливає істинність твердження виду M або N, де N – довільне твердження;

ж) правило вилучення диз'юнкції: якщо з істинності речення M випливає істинність речення N і з істинності речення U також випливає істинність N, то істинність речення N випливає з істинності речення такого виду «M або U»;

з) правило введення кон'юнкції: з істинності речень M і N завжди випливає істинність речення виду «M і N»;

и) правило вилучення кон'юнкції: з істинності твердження виду «M і N» завжди випливає як істинність твердження M, так і істинність N;

і) правило введення імплікації: якщо з істинності тверджень M_1 і M_2 випливає істинність твердження N, то з істинності простішого твердження 9)11 завжди випливає істинність твердження виду «з M_2 випливає M_1»;

й) правило вилучення імплікації: якщо з істинності твердження M_1 випливає істинність твердження «з M_2 випливає N», то з одночасної істинності тверджень M_1і M_2 випливає істинність твердження N;

ї) загальний випадок правила силогізму: якщо з істинності скінченної кількості тверджень $M_i(i = \overline{1,n})$ випливає істинність скінченної кількості тверджень $N_i(i = \overline{1,k})$ і з істинності останніх випливає істинність твердження N, то з істинності тверджень $M_i(i = \overline{1,n})$ також випливає істинність цього твердження N;

к) правило введення заперечення: якщо з істинності тверджень M_1 і M_2 випливає як істинність твердження N, так і істинність твердження $\overline{N}$, тобто твердження «неправильно, що N», то з істинності твердження M_1 випливає істинність твердження «неправильно, що M_2»;

л) правило вилучення заперечення: з істинності твердження виду «неправильно, що не виконується N» випливає істинність твердження N;

м) з істинності загального твердження «всі x мають властивість P» випливає істинність підпорядкованого йому частинного твердження «деякі x мають властивість P», але з істинності частинного твердження «деякі x мають властивість P» логічно не випливає істинність відповідного йому загального твердження «всі x мають властивість P»;

н) з хибності частинного судження «деякі x мають властивість P» випливає хибність загального твердження «всі x мають властивість P», але з хибності загального твердження «всі x мають властивість P» логічно не випливає ні хибність, ні істинність відповідного йому частинного твердження «деякі x мають властивість B». [7, с.94].

З шкільного курсу математики учні знають, що довести конкретну теорему – означає встановити, що вона випливає з якихось раніше обгрунтованих тверджень (аксіом, теорем, лем, означень) даної теорії, тобто є логічним наслідком з них. Дуже часто треба доводити теореми, логічна структура яких є імплікацією $A \Rightarrow B$, де A – умова, а B – висновок теореми. Якщо через Г позначити всі раніше обгрунтовані твердження шкільної математики (посилки), то довести теорему $A \Rightarrow B$ – значить установити, що $\Gamma \vDash A \Rightarrow B$, тобто що схема $\frac{\Gamma}{A \Rightarrow B}$ дедуктивна. Практично при доведенні, як правило, умову A приєднують до сукупності посилок Г і встановлюють, що $\Gamma, A \vDash B$, після чого вважають, що «теорему доведено». Це означає, по суті, неявний перехід від слідування $\Gamma, A \vDash B$ до слідування $\Gamma \vDash A \Rightarrow B$, тобто неявне застосування змістовного аналога теореми дедукції. Із сказаного вище можна зробити висновок, що всі інтуїтивні прийоми мислення в процесі викладання шкільного курсу математики легко обгрунтовуються й записуються за допомогою апарату математичної логіки. А це є однією з необхідних умов успішного навчання математики в школі.

Розглянемо теорему: «Якщо чотирикутник – паралелограм, то діагоналі його, перетинаючись, діляться навпіл». Бачимо, що це математичне речення умовне, тобто має форму імплікації двох простіших речень, що є конкретними предикатами, заданими на множині M усіх чотирикутників (істотно те, що на конкретній множині). Якщо x – довільний елемент множини M, тобто довільний чотирикутник, то, ввівши позначення $A(x) =$ «x – паралелограм» і $B(x)$ = «Діагоналі x діляться навпіл», сформульовану теорему можна записати так: $A(x) \Rightarrow B(x)$(тут «⇒» – символ відношення слідування). Оскільки ця імплікація істинна при будь-яких $x \in M$, то остаточно мовою логіки дану теорему можна записати так: $(\forall x \in M)(A(x) \Rightarrow B(x))$ (тут уже символ «⇒» – знак логічної операції імплікації).

Аналогічно теорему «Якщо сума цифр натурального числа ділиться на 3, то й саме число ділиться на 3» мовою логіки записують так:

$(\forall x \in N)\big(A(x) \Rightarrow B(x)\big)$, де $A(x)$ = «Сума цифр числа x ділиться на 3», $B(x)$ = «Число x ділиться на 3».

Розглянемо приклади.

а) нехай $(\forall x \in N)\big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big)$, – «Якщо натуральне число ділиться на 3, то сума цифр його також ділиться на 3». Тут M = N. Тоді обернене твердження має вигляд: $(\forall x \in N)\big(Q(x) \Rightarrow P(x)\big)$, – «Якщо сума цифр натурального числа ділиться на 3, то й саме число ділиться на 3»; протилежне: $(\forall x \in N)(\overline{P(x)} \Rightarrow \overline{Q(x)})$, – «Якщо натуральне число не ділиться на 3, то сума цифр його також не ділиться на 3»; обернене до протилежного: $(\forall x \in N)\big(\overline{Q(x)} \Rightarrow \overline{P(x)}\big)$, – «Якщо сума цифр натурального числа не ділиться на 3, то й саме число не ділиться на 3». Як бачимо, всі чотири твердження є істинними висловленнями;

б) нехай тепер $(\forall x \in M)\big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big)$, – «Якщо чотирикутник – прямокутник, то його діагоналі рівні». Тоді: $(\forall x \in M)\big(Q(x) \Rightarrow P(x)\big)$, – «Якщо діагоналі чотирикутника рівні, то він є прямокутником»; $(\forall x \in M)\big(\overline{P(x)} \Rightarrow \overline{Q(x)}\big)$, – «Якщо чотирикутник не прямокутник, то його діагоналі не рівні»; $(\forall x \in M)\big(\overline{Q(x)} \Rightarrow \overline{P(x)}\big)$, – «Якщо діагоналі чотирикутника не рівні, то він не є прямокутником». Областю визначення всіх цих математичних речень є множина всіх чотирикутників. Бачимо, що тут істинні лише два з чотирьох тверджень – пряма та обернена до протилежної теореми, а решта хибні.[7, с.98].

Теорема 1 З істинності прямої теореми не випливає істинність оберненої до неї теореми.

Доведення. Для доведення цього твердження достатньо за означенням логічного наслідку показати, що формула $(\forall x \in M)\big(Q(x) \Rightarrow P(x)\big),$ не є логічним наслідком з формули $(\forall x \in M)\big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big)$, тобто що формула $(\forall x \in M)\big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big) \Rightarrow (\forall x \in M)\big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big)$ не є загальнозначущою на довільній множині M. Справді, якби це було не так, то для довільного фіксованого елемента $a \in M$ висловлення $(P(a) \Rightarrow Q(a)) \Rightarrow (Q(a) \Rightarrow P(a))$ було б істинним, а це неправильно, бо: $\big(P(a) \Rightarrow Q(a)\big) \Rightarrow \big(Q(a) \Rightarrow P(a)\big) \equiv \overline{\overline{P(a)} \vee Q(a)} \vee \overline{Q(a)} \vee P(a) \equiv P(a) \wedge \overline{Q(a)} \vee \overline{Q(a)} \vee P(a) \equiv (P(a) \vee \overline{Q(a)} \vee P(a)) \wedge \overline{(Q(a)} \vee \overline{Q(a)} \vee P(a)) \equiv P(a) \vee \overline{Q(a)} \not\equiv 1,$ оскільки при $P(a) = 0$ і $Q(a) = 1$ ця формула хибна. Обгрунтований факт показує, що коли нам вдалося довести пряму теорему, то про істинність оберненої до неї теореми ми нічого конкретного не можемо сказати: вона може бути в одних випадках істинною, в інших – хибною. Звідси випливає, що в кожному конкретному випадку, коли треба дослідити обернену до даної теореми, її формулюють, а потім доводять чи спростовують. [7, с.106].

Теорема 2 Пряма теорема і обернена до протилежної є рівносильними між собою твердженнями.

Доведення. Для обгрунтування цього факту нам, по суті, потрібно довести рівносильність двох формул логіки предикатів $(\forall x \in M)\big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big)$ і $(\forall x \in M)\big(\overline{Q(x)} \Rightarrow \overline{P(x)}\big),$ на довільній множині M, тобто показати, що $(\forall x \in M)\big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big) \equiv (\forall x \in M)\big(\overline{Q(x)} \Rightarrow \overline{P(x)}\big)$. У даному випадку це зробити дуже просто. Справді, оскільки $P(x) \Rightarrow Q(x) \equiv \overline{P(x)} \vee Q(x)$ і $\overline{Q(x)} \Rightarrow \overline{P(x)} \equiv \overline{\overline{Q(x)}} \vee \overline{P(x)} \equiv Q(x) \vee \overline{P(x)} \equiv \overline{P(x)} \vee Q(x)$ при будь-якому $x \in M$, то $(\forall x \in M)\big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big) \equiv (\forall x \in M)\big(\overline{Q(x)} \Rightarrow \overline{P(x)}\big)$ Цей висновок дає змогу з істинності одного твердження автоматично робити висновок про істинність другого твердження. У логіці цей факт відомий під назвою закону контрапозиції: $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \overline{(B} \Rightarrow \bar{A})$. [7, с.107].

У математиці закон контрапозиції обґрунтовує одну з багатьох схем непрямого доведення (її не слід ототожнювати із загальним методом доведення від супротивного). Якщо імплікація $(\forall x \in M)\big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big)$ є істинним висловленням, то твердження $P(x)$ називають достатньою умовою для істинності твердження $Q(x)$, а твердження $Q(x)$ – необхідною умовою для істинності твердження $P(x)$.

З погляду математичної логіки наведене означення показує, що коли, взагалі кажучи, якийсь предикат $B(x)$ є логічним наслідком предиката $A(x)$, то предикат $A(x)$ є достатньою умовою для предиката $B(x)$, а предикат $B(x)$ водночас є необхідною умовою для предиката $A(x)$.

Розглянемо конкретний приклад. Нехай на множині M = {1, 2, 3, 8, 12, 13, 16, 17, 24} дано предикати $A(x)$ = «Число x ділиться на 8» і $B(x)$ = «Остання цифра числа x парна». Оскільки твердження $A(x) \Rightarrow B(x)$ = «Якщо число x ділиться на 8, то остання цифра його парна» на даній множині M істинне при будь-якому $x \in M$ тобто $(\forall x \in M)\big(A(x) \Rightarrow B(x)\big) = 1$, то звідси випливає, що умова $B(x)$ є необхідною для $A(x)$, а $A(x)$ є достатньою умовою для $B(x)$, тобто парність останньої цифри числа, яке належить даній множині M, є необхідною умовою для подільності цього числа на 8, а подільність числа на 8 є достатньою умовою для парності останньої цифри цього числа.

Побудуємо тепер речення з логічною структурою $A(x) \Rightarrow B(x)$. При даних $A(x)$ і $B(x)$ ця формула не є істинною при всіх $x \in M$, тобто $(\forall x \in M)\big(A(x) \Rightarrow B(x)\big) = 0$, бо хоча число 12 і має останню цифру парну, проте 12 не ділиться на 8. Отже, за означенням умова парності останньої цифри числа, яке належить даній множині M, не є достатньою для подільності цього числа на 8, а подільність числа на 8 не є необхідною умовою для парності останньої цифри цього числа.

При доведенні «достатності» логічно вважати заданим твердження $B(x)$, а доводити істинність твердження $A(x)$; при обгрунтуванні необхідності потрібно вважати заданим твердження $A(x)$, а доводити істинність $B(x)$. [7, с.110].

Правильне розуміння учнями суті необхідних і достатніх умов дає можливість їм правильно розуміти зміст різних формулювань однієї і тієї самої теореми, адже одну й ту саму теорему можна сформулювати по-різному, залежно від того, яку саме особливість її потрібно підкреслити при формулюванні. Наприклад, якщо якусь теорему записано в загальній формі $A(x) \Rightarrow B(x)$, то словесно її можна сформулювати так:

а) якщо істинне твердження $A(x)$, то істинне й твердження $B(x)$;

б) З істинності твердження $A(x)$випливає істинність твердження $B(x)$;

в) твердження $B(x)$ є необхідною умовою для істинності $A(x)$;

г) твердження $B(x)$ є наслідком з твердження $A(x)$;

д) твердження $A(x)$ є достатньою умовою для істинності $B(x)$;

е) твердження $B(x)$ істинне завжди, коли істинне твердження $A(x)$;

є) твердження $A(x)$ істинне тільки тоді, коли істинне $B(x)$;

ж) якщо твердження $B(x)$ хибне, то й $A(x)$ також хибне;

з) неможливі одночасна істинність твердження $A(x)$ і хибність твердження $B(x)$;

и) множина об’єктів, для яких істинне твердження $A(x)$, є підмножиною множини об’єктів, для яких істинне твердження $B(x)$.

Кожний з наведених варіантів формулювання теореми $A(x) \Rightarrow B(x)$ характеризує певну її особливість: умовний характер; відношення логічного слідування між її умовою та висновком; достатність умови для істинності висновку; необхідність висновку для істинності умови теореми; відношення областей істинності, тобто обсягів понять $A(x)$ і $B(x)$.

У кожному з варіантів формулювань один з логічних термінів: «якщо, то», «випливає», «є наслідком», «достатньо», «необхідно», «тоді й тільки тоді, коли», або відповідний його синонім. Але на практиці дуже часто теореми формулюють без перелічених логічних термінів, щоб формулювання було коротшим.

Наведемо для прикладу кілька різних логічних варіантів формулювання теореми, яка словесно виражається так: «Сума кутів опуклого n-кутника дорівнює 180° (n – 2)»:

а) якщо n-кутник опуклий, то сума його кутів дорівнює 180° (n –2);

б) 3 того, що n-кутник опуклий, випливає, що сума його кутів дорівнює 180° (n – 2);

в) з опуклості довільного n-кутника випливає, що сума його кутів дорівнює 180° (n – 2);

г) якщо сума кутів в n-кутнику не дорівнює 180° (n – 2), то він не опуклий;

д) n-кутнику достатньо бути опуклим, щоб сума його кутів дорівнювала 180° (n – 2);

е) властивість суми кутів n-кутника дорівнювати 180° (n – 2) є необхідною умовою того, щоб він був опуклим;

є) сума кутів n-кутника дорівнює 180° (n – 2) щоразу, коли він опуклий;

ж) n-кутник тільки тоді опуклий, коли сума його кутів дорівнює 180° (n–2);

з) неможливо, щоб n-кутник був опуклим і сума його кутів була відмінною від 180° (n – 2);

и) множина опуклих n-кутників є підмножиною множини всіх тих n-кутників, сума кутів кожного з яких дорівнює 180° (n – 2). [7, с. 116].

Цілком зрозуміло, що всі наведені формулювання даної теореми логічно рівносильні, тобто кожне з математичних речень виражає один і той самий логічний зміст.

Таким чином, завдяки використанню символіки й законів математичної логічки ми значно «механізуємо» розв’язування математичних задач, записавши дану вправу мовою математичної логіки, тотожні перетворення знайдених формул логіки здійснюємо формально, за допомогою відповідних законів логіки.

ВИСНОВКИ

Метою кваліфікаційної роботи було проаналізувати роль відношення логічного слідування в математичній науці та в навчанні математики.

Під час написання роботи ми дійшли висновків, що математична логіка – галузь математики, спрямована на вивчення математичних міркувань, на основі яких будуються математичні теорії як дедуктивні системи.

Математична логіка допомагає розв’язувати проблеми, що стосуються загальних властивостей математичних теорій – проблем несуперечливості, незалежності, повноти, розв’язуваності. Вона знайшла широке застосування в таких науках, як математична лінгвістика, математична психологія, біологія, економічні науки та різні галузі техніки.

Нині з’явилося багато некласичних логічних течій, проте, логіка як наука є єдиною теорією, оскільки і традиційна, і сучасна, і будь-який напрям некласичної логіки мають спільний предмет і методи, у яких чітко прослідковується використання логічного слідування.

Можна сказати, що математична логіка, разом з її складовими дає можливість краще зрозуміти структурно-логічну схему шкільного курсу математики, глибше вникнути в суть поняття доведення, з’ясувати зміст поняття логічного слідування, встановити зв’язки між різного роду теоремами тощо.

Значний внесок у розвиток математичної логіки зробили такі вчені як: Платон, Арістотель, Лейбніц, Дж.Буль, Д.Гільберт. Сучасна символічна (математична) логіка являє собою подальший розвиток традиційної формальної логіки, з точними поняттями і послідовними доведеннями.

Для математичної логіки характерним є вивчення законів і форм мислення за допомогою методів математики і використання «мови символів» (знаків), що дає можливість зробити логіку точною наукою, а думку, виражену в символах математичної логіки, – чіткою і однозначною. Мова символів, певною мірою застосовувана ще Арістотелем, на сучасному етапі набула значного поширення, в зв'язку з чим термін «символічна логіка» використовується тепер як синонім математичної логіки.

Стратегічним та найскладнішим завданням математичної логіки являється формування в учнів математичної грамотності, логічної компетентності – вміння володіти та застосовувати математичні методи доведення та спростування тверджень, виокремлення істотних властивостей об'єктів і абстрагуватись від несуттєвих.

Логічне мислення розвивається інтенсивніше, якщо створювати на уроках атмосферу пошани, заохочувати ініціативу і стимулювати творчість учнів. Системний розвиток логічного мислення повинен бути невідривним від уроку, кожен учень повинен брати участь в процесі рішення не тільки стандартних завдань, але і завдань розвиваючого характеру (активно або пасивно).

Розв'язування логічних задач і завдань на уроках математики і додаткових заняттях, розширює математичний кругозір здобувачів освіти і дозволяє чітко орієнтуватися в найпростіших життєвих ситуаціях, а також активніше використовувати математичні знання в повсякденному житті. Здійснюючи навчання школярів рішенню завдань, за допомогою спеціальних підібраних вправ, учити їх спостерігати, користуватися аналогією, індукцією, порівняннями і робити відповідні висновки.

Виходячи з цього, найважливішим завданням математичної освіти є озброєння учнів загальними прийомами мислення, просторової уяви, розвиток здатності розуміти зміст поставленої задачі, уміння логічно міркувати, засвоїти навички алгоритмічного мислення.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Будько А. Е., Будько Д. А. Математическая логика: Электронный учебно-методический комплекс для студентов математического факультета специальности «Математика. Информатика». Брест : БрГУ имени А. С. Пушкина, 2012. 229 с.

2. Кемени Дж., Снел Дж., Томпсон Дж. Введение в конечную математику/ под ред. И.М.Яглома. Москва: Издательство «Мир», 1965. 484 с.

3. Клини С. К. Математическая логика / под ред. Г. Е. Минца. Москва : Мир, 1973. 470 с.

4. Конверський А. С. Сучасна логіка (класична та некласична). Київ : Центр учбової літератури, 2017. 294 с.

5. Мощенський В. А. Избранные главы дискретной математики в утверждениях и упражнениях : пособие для студентов, обучающихся по спец. «Информатика». Минск : БГУ, 2012. 168 с.

6. Никольская И. Л. Математическая логика: Учебник. Москва : Высшая школа, 1981.127 с.

7. Середа В. Ю. Математична логіка у шкільному курсі математики : Посібник для самоосвіти вчителів. Київ : Рад.шк., 1984. 144 с.

8. Стєганцева П. Г., Грєчнєва М. О., Стєганцев Є. В. Математична логіка : навчальний посібник для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра спеціальності «Математика» освітньо-професійних програм : ЗНУ, 2020. 103 с.

9. Столяр А. А. Логическое введение в математику. Минск : Вышэйшая школа, 1971. 224 с.

10. Стяжкин Н. И. Формирование математической логики. Москва : Наука, 1967. 508 с.

11. Трохименко В. С. Конспект лекцій з математичної логіки та теорії алгоритмів. Вінниця : ВДПУ імені М.Коцюбинського, 2007. 85 с.

12. Трохимчук Р. М., Нікітченко М. С. Дискретна математика у прикладах і задачах : навч. посібник. Київ : Київський університет, 2017. 248 с.

13. Шкільняк С. С. Математична логіка: основи теорії алгоритмів : навч.посіб. Київ : Персонал, 2009. 280 с.