МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра загальної математики

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА

на тему: **«ПОРІВНЯННЯ АЛГЕБРАЇЧНОГО ТА ГЕОМЕТРИЧНОГО ПІДХОДІВ ДО ОТРИМАННЯ ФОРМУЛИ ЕЙЛЕРА»**

Виконала: студентка 2 курсу, групи 8.1119-з
спеціальності 111 математика
(шифр і назва спеціальності)
освітньої програми математика
(назва освітньої програми)
А. В. Платонова
(ініціали та прізвище)
Керівник Викладач,кандидат фізико-математичних наук, доцент, Є.С.Стєганцев.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Рецензент
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Запоріжжя – 2020

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет математичний

Кафедра фундаментальної математики

Рівень вищої освіти магістр

Спеціальність 111 математика

Освітня програма математика

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри загальної математики, д.т.н., доцент

_____________ Зіновєєв І.В.

(підпис)

« ____ » __________ р.

З А В Д А Н Н Я

НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТЦІ

Платоновій Анастасії Володимирівні

(прізвище, ім'я та по-батькові)

1. Тема роботи (проекту) Порівняння алгебраїчного та геометричного підходів до отримання формули Ейлера

керівник роботи (проекту) Стєганцев Євгеній Вікторович

(прізвище, ім'я та по-батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від « 20 » травня 2020 року № 557-с

2. Строк подання студентом роботи 26 грудня 2019 р.

3. Вихідні дані до роботи 1. Постановка задачі.
2. Перелік літератури.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)
1. Постановка задачі
2. Ознайомитися з основними поняттями
3. Формула Ейлера для трикутників
4. Формула Ейлера для чотирикутників

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень) _________
Презентація.

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання ______________________________

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	19.05.2020	
2.	Збір вихідних даних.	09.06.2020	
3.	Обробка методичних та теоретичних		
	джерел.	13.06.2020	
4.	Розробка першого розділу.	17.08.2020	
5.	Розробка другого розділу.	20.10.2020	
6.	Попередній захист кваліфікаційної роботи.	30.11.2020	
7.	Оформлення та нормоконтроль		
	кваліфікаційної роботи.	01.12.2020	
8.	Захист кваліфікаційної роботи.	10.12.2020	

Студент ______________ А. В. Платонова
(підпис) (ініціали та прізвище)

Керівник роботи ______________ Є. В. Стєганцев
(підпис) (ініціали та прізвище)

Нормоконтроль пройдено

Нормоконтролер ______________ О. Г. Спиця
(підпис) (ініціали та прізвище)

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Порівняння алгебраїчного та геометричного підходів до отримання формули Ейлера»: 43с., 30 рис., 10 джерел.

ВПИСАНЕ КОЛО, КОЛО, ТЕОРЕМА ПОНСЕЛЕ, ТРИКУТНИК, ОПИСАНЕ КОЛО, ЧОТИРИКУТНИК, ФОРМУЛА ЕЙЛЕРА.

Об’єкт дослідження – вписані та описані кола.

Мета роботи: порівняти алгебраїчний та геометричний підходи до отримання формули Ейлера.

Метод дослідження – аналітичний.

Кваліфікаційну роботу присвячено дослідженню порівняння алгебраїчного та геометричного підходів до отримання формули Ейлера. Наведено декілька доведень цієї формули, сформульовано теорему Понселе.

SUMMARY

Master’s Qualification Thesis "Comparison of algebraic and geometric approaches to obtaining the Euler formula": 43 pages, 30 figures, 10 s references.

ENTERING A CIRCLE, A CIRCLE, PONCELLE’S THEOREM, A TRIANGLE, A DESCRIPTION OF A CIRCLE, A QUADRANGLE, EYLER’S FORMULA.

The object of research is inscribed and described circles.

Purpose: to compare algebraic and geometric approaches to obtaining Euler’s formula.

The research method is analytical.

The qualification work is devoted to the study of the comparison of algebraic and geometric approaches to obtaining Euler’s formula. Several proofs of this formula are given, and Poncelet’s theorem is formulated.

ЗМІСТ

ВСТУП

З часів Древньої Греції біли добре відомі властивості трикутника. Ще у відомих "Началах" Евкліда доводиться, що точка перетину серединних перпендикулярів до сторін трикутника буде центром описаного кола навколо цього трикутника. Архімед визначив, що положення центра ваги однорідної трикутної пластинки лежить на кожній з трьох медіан. Причому, центром тяжіння буде точка перетину медіан трикутника.

Через деякий час було доведено, що три висоти трикутника також перетинаються в одній точці, яка має назву ортоцентр.

Закономірність в розташуванні цих трьох чудових точок трикутника – центру O описаного кола, центроїда G, ортоцентра H – вперше виявив відомий математик Леонард Ейлер.

Формула Ейлера – теорема планіметрії, пов’язує відстань між центрами вписаного і описаного кіл і їх радіусами.

В даній кваліфікаційній роботі розглядається кола, трикутники та чотирикутники, розглянуті їх основні поняття та властивості. Розглядається формула Ейлера для трикутників та чотирикутників, наведені різні доведення. Крім того, представлена теорема Понселе, як напряму пов’язана з формулою Ейлера.

1 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1.1 Коло, основні поняття та властивості

Означення 1.1 [4]Множина точок площини, віддалених від даної точки на дану відстань називається колом.

Означення 1.2 [1] Відрізок, що з'єднує центр з якою-небудь точкою на колі називається радіусом.

Означення 1.3 [4] Відрізок, що з'єднує дві точки кола, називається хордою.

Теорема 1.1 [4]Якщо дві хорди кола, AB і CD перетинаються в точці M, то добуток відрізків однієї хорди дорівнює добутку відрізків іншої хорди: $AM \cdot MB = CM \cdot MD$, рис(1.1).

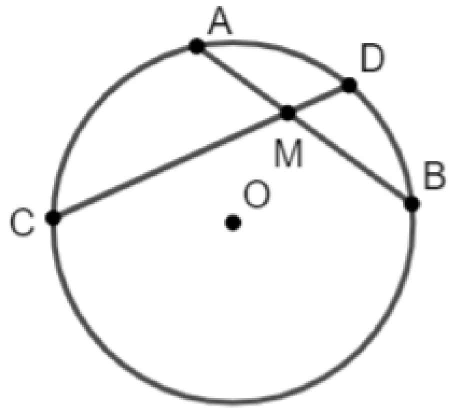

Рисунок 1.1

Теорема 1.3 [6] Якщо обертати хорду навколо деякої точки всередині кола, то добуток відрізків хорди залишається незмінним.

Означення 1.4 [5] Хорда, що проходить через центр кола, називається діаметром кола.

Нагадаємо, що існує 3 випадки взаємного розташування прямої та кола в залежності від співвідношення між радіусом r кола і відстанню d прямої від центру кола:

а) $d < r$. Якщо відстань від центру кола до прямої менше радіуса кола, то коло і пряма мають дві загальні точки.

б) $d = r$. Якщо відстань від центру кола до прямої дорівнює радіусу кола, то пряма і коло мають єдину спільну точку.

в) $d > r$. Якщо відстань від центру кола до прямої більше радіусу кола, то пряма і коло не мають спільних точок.

Пряма, що має з колом рівно одну спільну точку, називається дотичною до кола, а їх загальна точка називається точкою дотику прямої та кола. Пряма, що має з колом дві спільні точки, називається січною.

Теорема 1.4 [1] Дотична до кола перпендикулярна радіусу, проведеному до точки дотику (рис. 1.2).

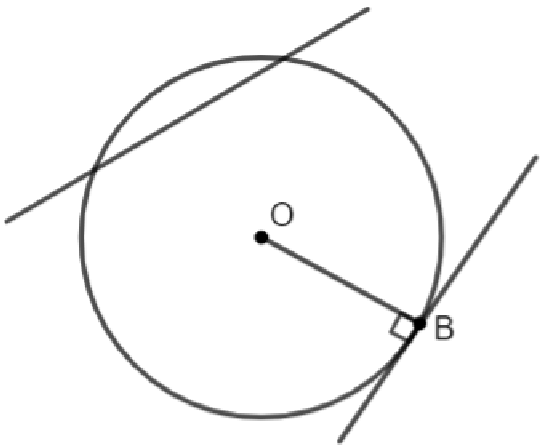

Рисунок 1.2

Теорема 1.2 Якщо з даної точки проведені до кола дві дотичні, то відрізки дотичних рівні між собою і центр кола лежить на бісектрисі кута з вершиною в цій точці: $AB = AC$ (рис. 1.3).

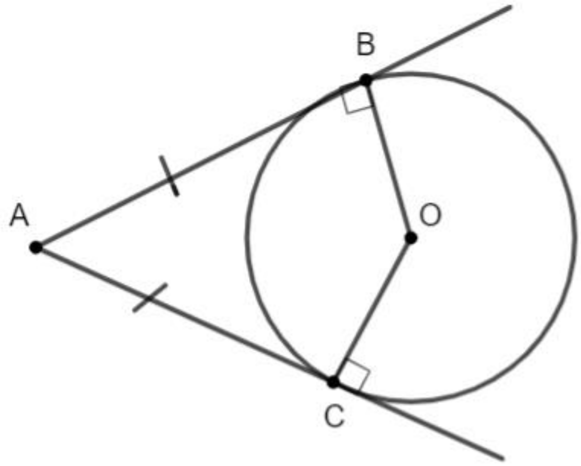

Рисунок 1.3

Теорема 1.5 [2]Якщо з даної точки проведені до кола дотична та січна, то квадрат довжини відрізка дотичної дорівнює добутку всього відрізка січної на його зовнішню частину: $AC^2 = CD \cdot BC$ (рис. 1.4).

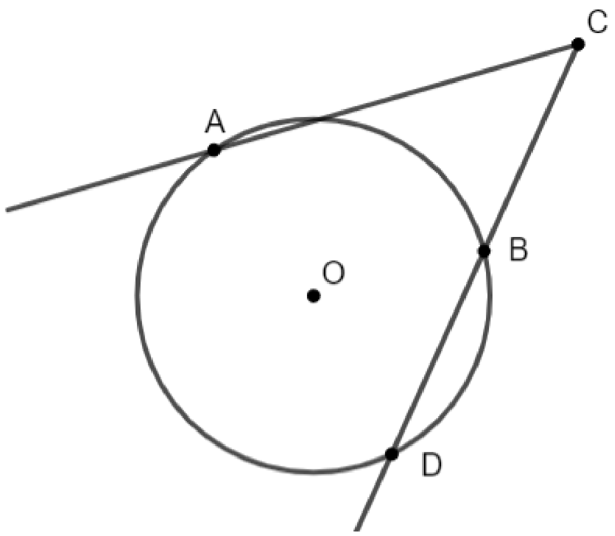

Рисунок 1.4

Теорема 1.6 [5]Добуток всього відрізка однієї січної на її зовнішню частину дорівнює добутку всього відрізка іншої січної на її зовнішню частину: $AC \cdot BC = EC \cdot DC$ (рис. 1.5).

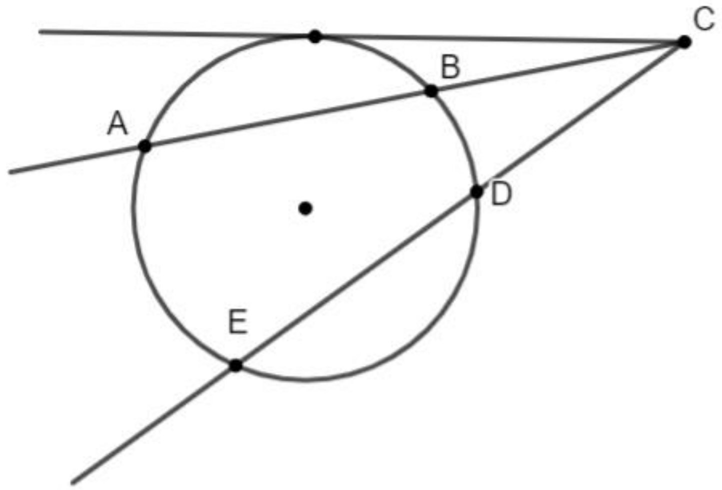

Рисунок 1.5

Означення 1.5 [5] Якщо всі сторони багатокутника дотикаються до кола, тоді коло називається вписаним в багатокутник, а багатокутник – описаним навколо цього кола.

Означення 1.6 [5] Якщо всі вершини багатокутника лежать на колі, тоді коло називається описаним навколо багатокутника, а багатокутник – вписаним в це коло.

1.2 Трикутники, основні поняття та властивості

Означення 1.7 [6] Трикутник – це геометрична фігура, що складається з трьох точок, які не лежать на одній прямій та які з’єднані відрізками.

Означення 1.8 [1] Бісектрисою кута трикутника називається промінь, що виходить з вершини трикутника і ділить його навпіл.

Бісектриси трикутника перетинаються в одній точці – центрі вписаною в трикутник кола.

Означення 1.9 [6] Висотою трикутника називається перпендикуляр, опущений з вершини трикутника на протилежну сторону (або її продовження).

Означення 1.10 [2] Відрізок, що з'єднує вершину трикутника та середину протилежної сторони називається медіаною.

Три серединних перпендикуляра трикутника перетинаються в одній точці, яка є центром описаного кола.

Точка перетину серединних перпендикулярів в гострокутна трикутнику лежить всередині трикутника; в тупокутному – поза трикутником; в прямокутному – на середині гіпотенузи.

Означення 1.11 [1] Серединний перпендикуляр трикутника – це перпендикуляр, проведений до середини сторони трикутника.

Означення 1.12 [6] Середня лінія трикутника – це відрізок, що з'єднує середини двох сторін трикутника і паралельний третій стороні.

У будь-який трикутник можна вписати коло і навколо будь-якого трикутника можна описати коло.

Два трикутника називаються рівними, якщо у них рівні відповідні сторони і відповідні кути.

Теорема 1.7 [5] Сума кутів трикутника дорівнює 180°.

Коло, вписане в трикутник – коло, яке дотикається до всіх сторін трикутника. трикутник при цьому називають описаним (рис. 1.6).

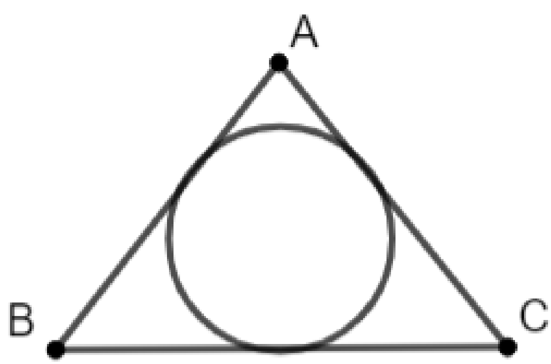

Рисунок 1.6

Теорема 1.8 [5] У будь-який трикутник можна вписати коло, і притому тільки одне.

Теорема 1.9 [5] Центр кола, вписаного в трикутник, знаходиться на перетині бісектрис трикутника (рис. 1.7).

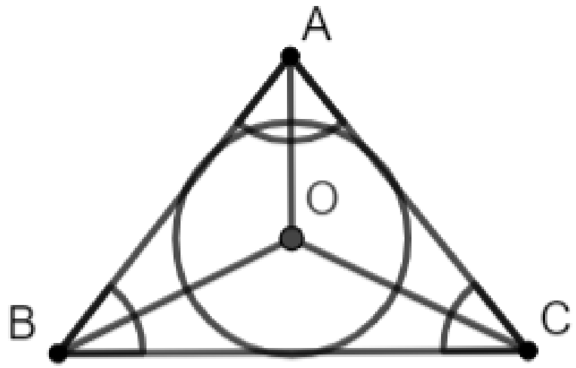

Рисунок 1.7

Причому,

$$\angle ABO = \angle CBO,$$
$$\angle BAO = \angle CAO,$$
$$\angle BCO = \angle ACO.$$

Радіус вписаного кола, проведений в точку дотику, перпендикулярний до відповідної сторони (рис. 1.8).

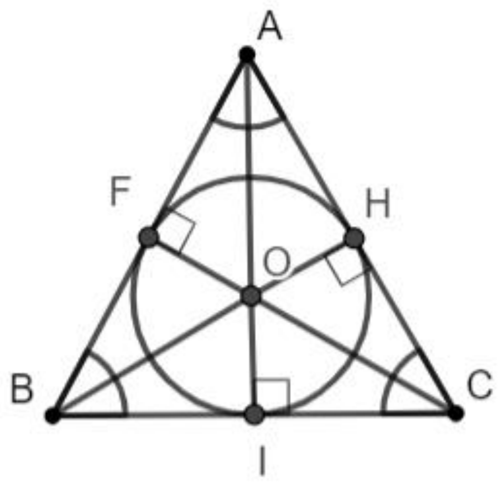

Рисунок 1.8

Причому,

$$OF \perp AB,$$
$$OH \perp AC,$$
$$OI \perp BC.$$

Радіус вписаного кола можна обчислити за формулами:

$$r = \frac{S}{p},$$

де S – площа трикутника, p – півпериметр

$$p = \frac{a + b + c}{2},$$
$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c},$$

де h_a, h_b, h_c – висоти трикутника, проведені відповідно до сторін a, b, c трикутника.

$$r = (p - a)tg\frac{A}{2} = (p - b)tg\frac{B}{2} = (p - c)tg\frac{C}{2},$$
$$r = \sqrt{\frac{(p - a)(p - b)(p - c)}{p}}.$$

Радіус кола, вписаного в правильний трикутник зі стороною a:

$$r = \frac{a}{2\sqrt{3}}.$$

Радіус кола, вписаного в рівнобедрений трикутник, основа якого дорівнює a , а бічна сторона – b:

$$r = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{2b - a}{2b + a}}.$$

Радіус кола, вписаного в прямокутний трикутник і з катетами a та b та гіпотенузою c:

$$r = \frac{a + b - c}{2}.$$

Коло, описане навколо трикутника – коло, яке містить вершини трикутника. Трикутник при цьому називають вписаним (рис. 1.9).

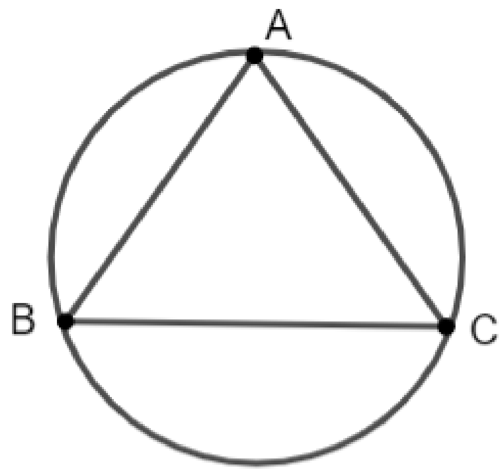

Рисунок 1.9

Теорема 1.10 [6] Навколо будь-якого трикутника можна описати коло, і до того ж тільки одне.

Центр кола, описаного навколо трикутника, знаходиться на перетині серединних перпендикулярів (рис. 1.10).

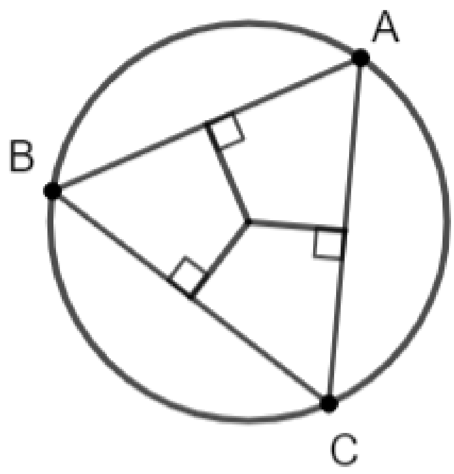

Рисунок 1.10

Причому центр кола лежить всередині трикутника, якщо трикутник гострокутний; поза колом, якщо трикутник тупокутний; лежить на середині гіпотенузи, якщо трикутник прямокутний.

Радіус R кола, описаного навколо трикутника, дорівнює відношенню твори сторін a, b, c трикутника до його площі, збільшеної в чотири рази:

$$R = \frac{abc}{4S},$$

де, a, b, c – сторони трикутника. S – його площа.

Радіус кола,описаного навколо правильного трикутника, дорівнює:

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

де a – довжина сторони.

Радіус кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника, основа якого дорівнює a , а бічна сторона – b:

$$R = \frac{b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}}.$$

Радіус кола, описаного навколо прямокутного трикутника і з катетами a та b та гіпотенузою c:

$$R = \frac{c}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

Теорема 1.11 (теорема синусів) [5] Відношення довжини сторони трикутника до синуса протилежного кута дорівнює двом радіусів описаного навколо трикутника кола.

$$\frac{AB}{sin\angle C} = \frac{AC}{sin\angle B} = \frac{BC}{sin\angle A} = 2R.$$

Радіус кола, описаного навколо трикутника, дорівнює відношенню сторони трикутника до подвоєного синусу протилежного кута (наслідок теореми синусів):

$$R = \frac{AB}{2sin\angle C} = \frac{AC}{2sin\angle B} = \frac{BC}{2sin\angle A}.$$

де, a, b, c – сторони трикутника, $\angle A, \angle B, \angle C$ – відповідні кути.

Теорема 1.12 (теорема косинусів) [5] Квадрат будь-якої сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін трикутника мінус подвоєний добуток цих сторін на косинус кута між ними.

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2 \cdot BC \cdot AC \cdot cos\angle ACB.$$

Відстань від центра кола, вписаного в довільний трикутник, до центра кола, описаного навколо цього трикутника обчислюється за формулою:

$$OO_1 = \sqrt{R^2 - 2Rr},$$

де R – радіус описаного кола, r – радіус вписаного кола.

1.3 Чотирикутники, основні поняття та властивості

Означення 1.13 [6]Чотирикутником називають фігуру, яка складається з чотирьох точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій та чотирьох відрізків, які послідовно з’єднують ці точки. Чотирикутник позначають послідовно записуючи його вершини (рис. 1.11).

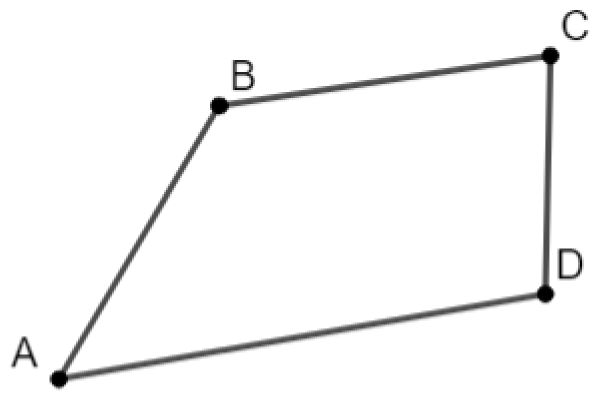

Рисунок 1.11

Чотирикутники бувають опуклі та неопуклі. Чотирикутник називають опуклим, якщо він лежить з одного боку від кожної прямої, яка містить його сторону. Чотирикутник називають неопуклим, якщо він не лежить з одного боку від кожної прямої, яка містить його сторону.

Елементами чотирикутника є його вершини, сторони та кути. На рисунку A, B, C, D – вершини чотирикутника, AB, BC, CD, AD – сторони чотирикутника, кути $\angle DAB, \angle ABC, \angle BCD, \angle CDA$ – кути чотирикутника.

Дві вершини називають сусідніми, якщо вони є кінцями однієї сторони. Дві несусідні вершини чотирикутника називаються протилежними. Сторони чотирикутника називаються сусідніми, якщо вони виходять з однієї вершини. Сторони чотирикутника, які не мають спільної вершини, називаються протилежними.

Означення 1.14 [6] Відрізок який сполучає протилежні вершини чотирикутника називається його діагоналлю.

Кожен чотирикутник має дві діагоналі, які перетинаються. Кожна діагональ розбиває чотирикутник на два трикутники.

Кожна сторона чотирикутника менша за суму трьох інших його сторін. Щоб установити, чи можна з чотирьох відрізків утворити чотирикутник, треба перевірити чи буде найдовший з них менший за суму трьох інших. Сума кутів опуклого чотирикутника дорівнює 360°.

Кут, суміжний з кутом чотирикутника, називається зовнішнім кутом чотирикутника. При кожній вершині чотирикутника є два зовнішні кути, які рівні між собою. Сума зовнішніх кутів чотирикутника, взятих по одному при кожній вершині дорівнює 360°.

Площу чотирикутника можна обчислити за формулою:

$$S = \frac{d_1 d_2 sin\varphi}{2}.$$

Описаний чотирикутник – чотирикутник, кожна сторона якого дотикається до даного кола, тоді коло називається вписаним (рис. 1.12).

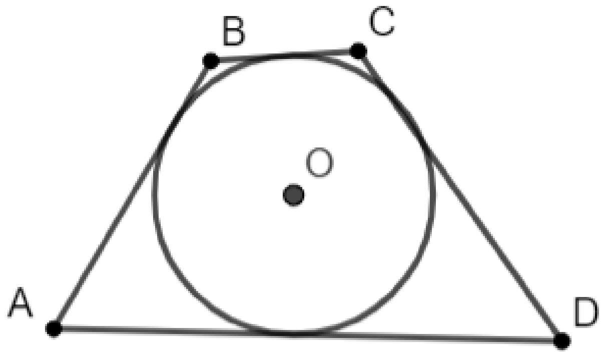

Рисунок 1.12

Центр кола, вписаного в чотирикутник – точка перетину бісектрис усіх його кутів.

Якщо чотирикутник описаний навколо кола, то сума його протилежних сторін дорівнює сумі двох інших його сторін.

$$AB + CD = AD + BC.$$

Точка перетину діагоналей описаного чотирикутника співпадає з точкою перетину діагоналей чотирикутника, вершинами якого служать точки дотику сторін даного чотирикутника із вписаним колом (рис. 1.13).

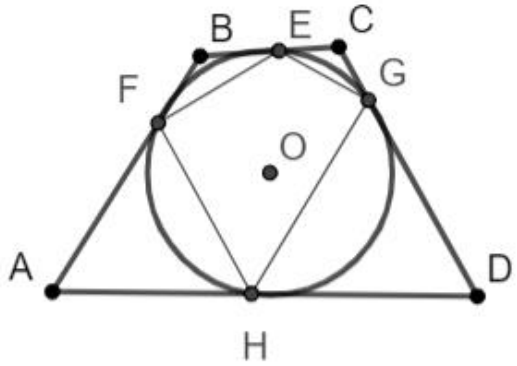

Рисунок 1.13

Якщо в чотирикутнику сума двох його протилежних сторін дорівнює сумі двох інших його сторін, то в чотирикутник можна вписати коло.

Якщо чотирикутник описаний, то сума кутів, під якими видно з центра вписаного кола дві його протилежні сторони, дорівнює 180° (рис. 1.14):

$$\angle AOB + \angle COD + \angle AOD + \angle BOC = 180°.$$

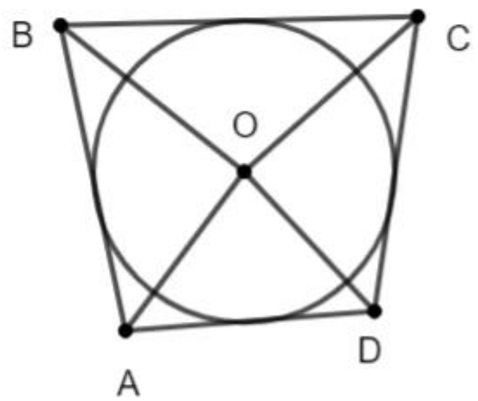

Рисунок 1.14

Діагоналі описаного чотирикутника і відрізки, які сполучають точки дотику кола до протилежних сторін, проходять через одну точку (рис. 1.15).

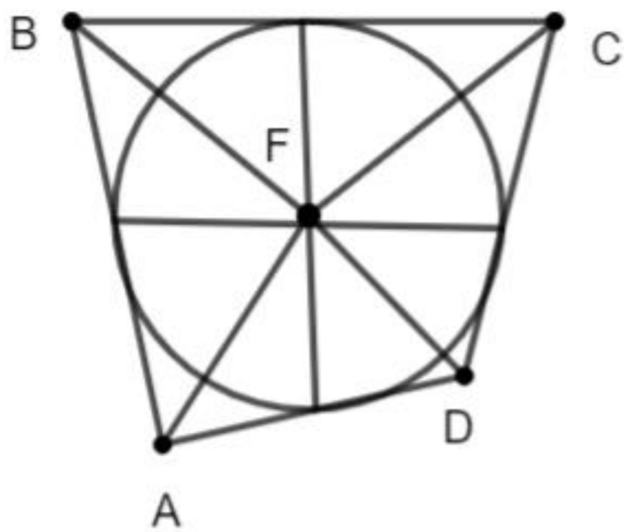

Рисунок 1.15

Площа описаного чотирикутника дорівнює добутку півпериметра чотирикутника на радіус вписаного кола.

$$S = pr,$$

де $p = \frac{a+b+c+d}{2}$.

Площу опуклого чотирикутника, в який можна вписати коло, можна обчислити за формулою:

$$S = \sqrt{abcd} sin\frac{B+D}{2},$$

де a, b, c, d – сторони чотирикутника, два кути B і D – протилежні кути чотирикутника.

Відома ще одна формула для обчислення площі чотирикутника:

$$S = \sqrt{abcd},$$

де a, b, c, d – довжини сторін чотирикутника.

Площу опуклого чотирикутника, в який можна вписати коло й навколо якого можна описати коло, можна зайти за формулою:

Вписаний чотирикутник – чотирикутник, усі вершини якого належать даному колу, тоді коло називають описаним (рис. 1.16).

Центр кола описаного навколо чотирикутника – точка перетину серединних перпендикулярів, проведених до усіх його сторін.

Якщо чотирикутник вписаний у коло, то сума його протилежних кутів дорівнює 180°.

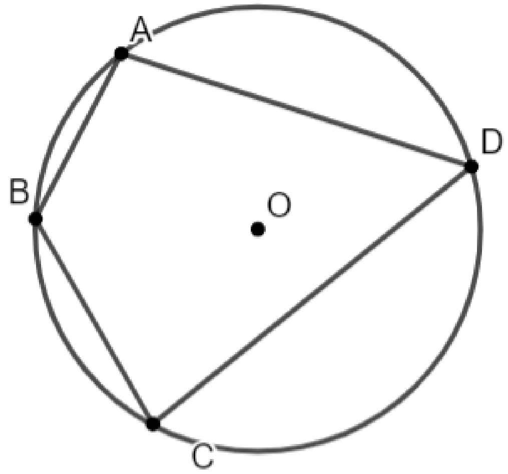

Рисунок 1.16

Теорема 1.13 (Теорема Птоломея) [8]Добуток діагоналей вписаного чотирикутника дорівнює сумі добутків його протилежних сторін $d_1 d_2 = ac + bd$ (рис. 1.17).

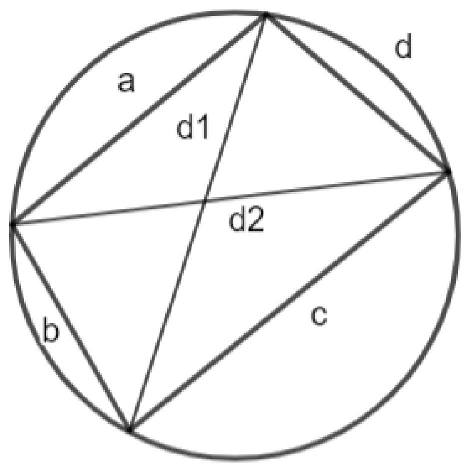

Рисунок 1.17

Якщо сума протилежних кутів чотирикутника дорівнює 180°, то навколо нього можна описати коло.

Площа вписаного чотирикутника зі сторонами a, b, c, d обчислюється за формулою:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

де $p = \frac{a+b+c+d}{2}$.

Якщо чотирикутник зі сторонами a, b, c, d вписано в коло, то його діагоналі можна знайти за формулами:

$$d_1 = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}},$$

$$d_2 = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}.$$

Якщо чотирикутник $ABCD$ вписаний в коло радіуса R, то його площу S можна обчислити за формулою:

$$S = 2R^2 sinAsinBsin\alpha,$$

де α – кут між діагоналями чотирикутника $ABCD$

Якщо чотирикутник із перпендикулярними діагоналями вписаний в коло, то сума квадратів протилежних сторін чотирикутника дорівнює квадрату діагоналей описаного кола (рис. 1.18).

$$BC^2 + AD^2 = 4R^2,$$

де R –радіус кола.

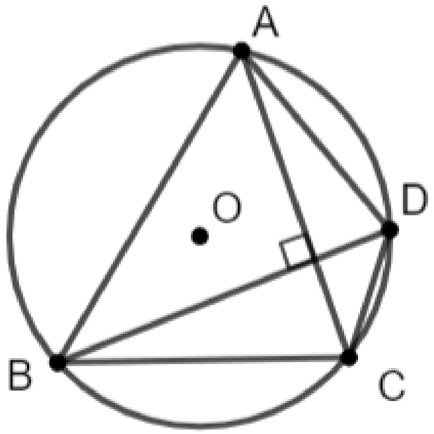

Рисунок 1.18

В будь-якому описаному чотирикутнику суми протилежних сторін рівні. Якщо суми протилежних сторін опуклого чотирикутника рівні, то в нього можна вписати коло.

В будь-якому вписаному чотирикутнику сума протилежних кутів дорівнює 180°. Якщо сума протилежних кутів чотирикутника дорівнює 180°, то навколо нього можна описати коло.

2 ФОРМУЛА ЕЙЛЕРА

2.1 Формула Ейлера для трикутників

Розглянемо теорему, що пов'язує радіуси вписаного та описаного кіл та наведемо її доведення.

Теорема 2.1 (формула Ейлера) [3] В будь-якому трикутнику радіус R описаного кола, радіус r вписаного кола і відстань d між центрами цих кіл пов'язані рівністю $R^2 - d^2 = 2Rr$.

Наведемо один спосіб виведення цієї формули. Для цього розглянемо трикутник ABC та побудуємо його бісектрису кута A. Нехай вона перетинає описане коло в точці D. Побудуємо нове коло з центром в точці D, воно буде проходити через вершину B (рис. 2.1).

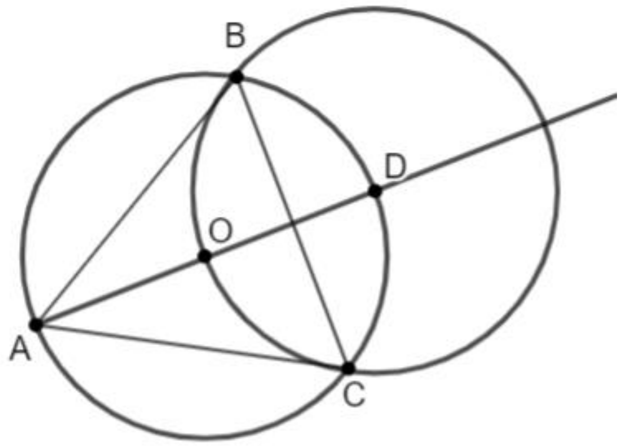

Рисунок 2.1

Виявляється, що при цьому воно пройде й через вершину C. Це легко зрозуміти, оскільки дуги BD та DC рівні, тому і відстані від точки D до двох вершин рівні. Крім того, треба звернути увагу на те, що точка перетину кола з бісектрисою буде співпадати з центром O вписаного кола. Сформулюємо наступну теорему.

Теорема 2.2 [9] Нехай в трикутнику ABC точка O – центр вписаного кола, а точка D лежить на перетині бісектриси кута A з вписаним колом. Тоді коло з центром в D, що проходить через вершину B, проходить й через точку O.

Щоб довести теорему, покажемо, що $BD = OD$, тобто, що трикутник BDO є рівнобедреним (рис. 2.2). Для цього обчислимо його кути. Введемо позначення для кутів трикутника ABC: α, β та γ. Зауважимо, що кут BDO спирається на дугу AB, як і кут ACB. Тому $\angle BDO = \angle ACB = \gamma$.

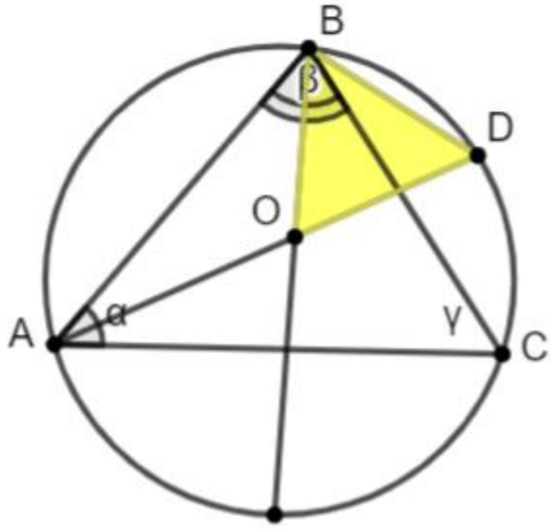

Рисунок 2.2

Обчислимо два інших кута трикутника BDO. Простіше знайти кут OBD, який складається з двох кутів. Один з них спирається на половину дуги, що стягує хорду AC, тому він дорівнює $\frac{\beta}{2}$. Інший кут спирається на дугу DC, тобто на половину дуги, що стягує хорду BC, тому дорівнює $\frac{\alpha}{2}$. Отже, $\angle OBD = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$. Так як на всі три кута трикутника BDO припадає 180°, тоді

$$\angle BOD = 180° - \gamma - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = \angle OBD.$$

Тому трикутник BDO дійсно рівнобедрений, та теорема доведена.

Тепер перейдемо до доведення формули Ейлера. Обчислимо добуток $AO \cdot OD$ двома способами. В першому способі використовується теорема 1.2. Отже, ми можемо провести через точку O хорду, так, як нам зручно – добуток буде таким самим. Проведемо хорду через центр описаного кола O_1 – отримаємо діаметр описаного кола (рис. 2.3).

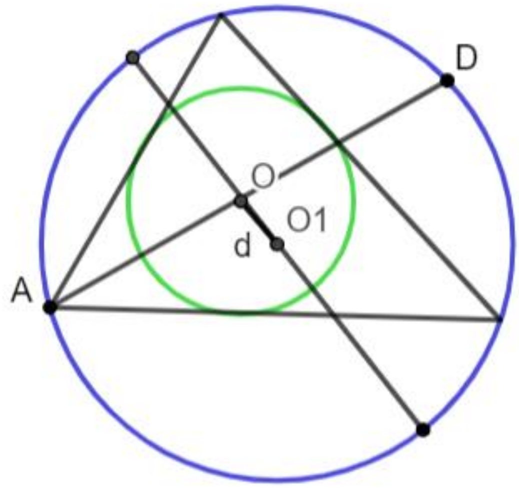

Рисунок 2.3

Точка O ділить цей діаметри на два відрізка довжинами $R + d$ та $R - d$ (нагадаємо, що $d = OO_1$ – відстань між центрами кіл). Тому добуток цих відрізків дорівнює $R^2 - d^2$.

Обчислимо добуток безпосередньо $AO \cdot OD$. Для цього вичислимо довжини відрізків AO та OD. Подивимося на блакитний трикутник (рис. 2.4).

З означення синуса одразу отримаємо, що

$$AO = \frac{r}{sin\frac{\alpha}{2}}.$$

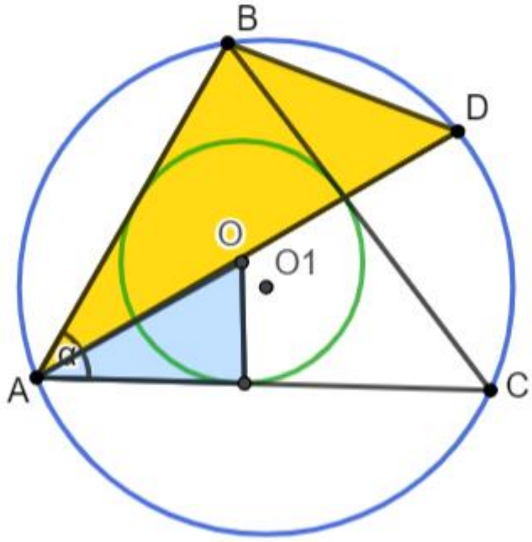

Рисунок 2.4

Довжина іншого відрізка обчислюємо в два кроки. З теореми 2.2 ми знаємо, що $OD = BD$, а за теоремою синусів для трикутника ABD, вписаного в синє коло:

$$OD = BD = 2Rsin\frac{\alpha}{2}.$$

Перемножимо отримані вирази для AO та OD, отримаємо, що $AO \cdot OD = 2Rr$. Отже, $R^2 - d^2 = 2Rr$. Тобто формула Ейлера доведена.

Наведемо ще одне доведення формули Ейлера. Але спочатку наведемо формулювання формули Ейлера з іншими позначеннями.

Теорема 2.3 [8] Нехай O, I – центри описаного та вписаного кіл трикутника, R, r– їх радіуси. Тоді

$$OI^2 = R^2 - 2Rr.$$

Доведення. Проведемо пряму через I та вершину C трикутника ABC та знайдемо другу точку C' перетину цієї прямої з описаним навколо ABC кола (рис. 2.5).

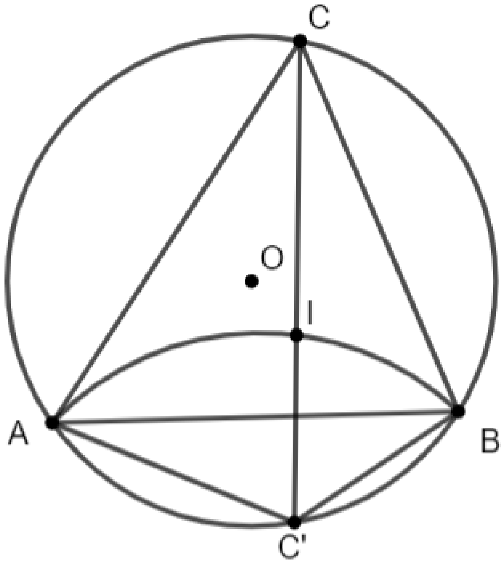

Рисунок 2.5

Так як

$$C'A = C'B, \angle AIB = \pi - \frac{(\angle A + \angle B)}{2} = \frac{(\pi + \angle C)}{2}$$

та

$$\angle AC'B = \pi - \angle C,$$

де C' – центр кола, описаного навколо трикутника AIB. Отже,

$$IC' = C'B = 2R sin\frac{\angle C}{2}.$$

З іншого боку

$$IC = \frac{r}{sin\frac{\angle C}{2}}.$$

Отримаємо

$$R^2 - OI^2 = CI \cdot C'I = 2Rr.$$

Теорема доведена.

Теорема 2.4 [6] Нехай O, R – центр та радіус описаного навколо трикутника ABC кола; P – довільна точка всередині трикутника; A_1, B_1, C_1 – проекція P на прямі BC, CA, AB; S, S_1 – площі трикутників ABC та A_1, B_1, C_1. Тоді

$$\frac{S_1}{S} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{OP^2}{R^2}\right).$$

Це відношення також називається формулою Ейлера.

Доведення. Нехай A_2, B_2, C_2 – другі точки перетину прямих AP, BP, CP з описаним колом трикутника ABC (рис. 2.6).

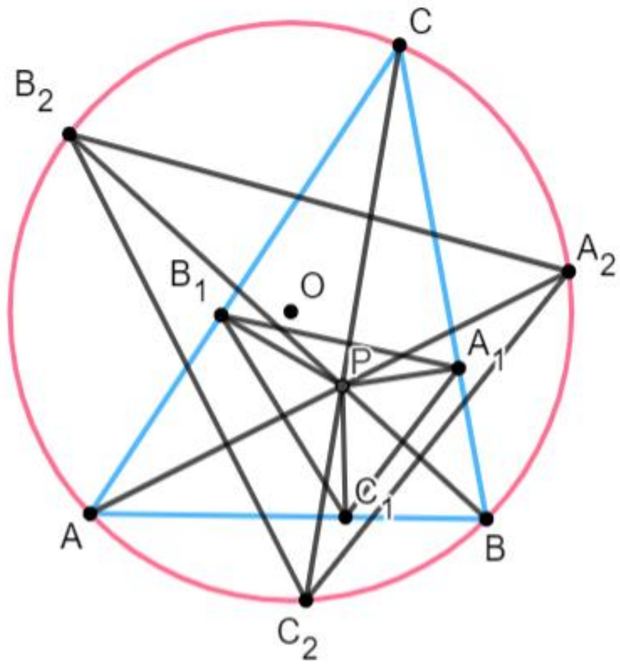

Рисунок 2.6

Так як чотирикутник BC_1PA_1 – вписаний, $\angle PC_1A_1 = \angle CBP = \angle CC_2B_2$. Аналогічно, $\angle PC_1B_1 = \angle CC_2A_2$, а отже, $\angle A_1C_1B_1 = \angle A_2B_2C_2$. Таким чином, відповідні кути трикутників $A_1B_1\,C_1$та $A_2B_2C_2$ рівні, тобто ці трикутники подібні, й для їх площин S_1, S_2 виконується рівність

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{A_1C_1 \cdot B_1\,C_1}{A_2C_2 \cdot B_2C_2}.$$

З іншого боку, так як трикутники ABC та $A_2B_2C_2$ вписані в одне коло, то

$$\frac{S_2}{S} = \frac{A_2B_2 \cdot A_2C_2 \cdot B_2C_2}{AB \cdot AC \cdot BC}.$$

Крім цього, з вписаності чотирикутників BC_1PA_1, AC_1PB_1 отримаємо

$$A_1C_1 = PB sin\angle B = \frac{PB \cdot AC}{2R},$$

$$B_1C_1 = \frac{PA \cdot BC}{2R},$$

а з подібності трикутників PA_2B_2 та PBA отримаємо

$$\frac{A_2B_2}{AB} = \frac{PB_2}{PA}.$$

В результаті маємо

$$\frac{S_1}{S} = \frac{A_1C_1}{AC} \cdot \frac{B_1C_1}{BC} \cdot \frac{A_2B_2}{AB} = \frac{PB}{2R} \cdot \frac{PA}{2R} \cdot \frac{PB_2}{PA} = \frac{PB \cdot PB_2}{4R^2} = \frac{R^2 - OP^2}{4R^2}.$$

Зауважимо, що якщо обчислювати площу трикутника додатною або від'ємною, в залежності від його орієнтації, тоді формула Ейлера буде вірною для будь-якої точки площини. Зокрема, якщо точка P лежить на описаному колі трикутника ABC, тоді площа трикутника, що утворився проекціями кола, буде дорівнювати нулю, тобто ці проекції лежать на одній прямій. Ця пряма називається прямою Сімпсона.

Означення 2.1 [1] Пряма Сімпсона – основи перпендикулярів, проведених з довільної точки кола, описаного навколо трикутника до прямих, що містять сторони цього трикутника, лежать на одній прямій (рис. 2.7)

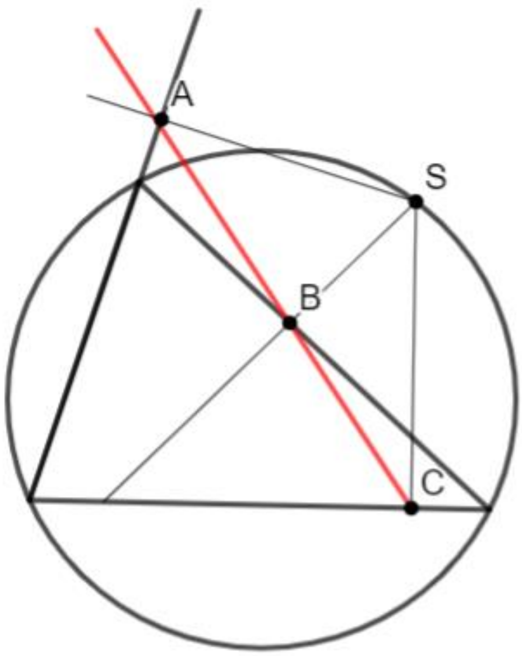

Рисунок 2.7

Крім того, є ще алгебраїчний метод доведення формули Ейлера – векторне доведення [8]. В цьому випадку доведення можна розділити на дві частини. Перша частина є афінною задачею, тоді вектор $\overline{OI}$ розглядається як лінійна комбінація векторів $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$ (O, I – відповідно центри описаного та вписаного в трикутник ABC кіл). Результат буде мати наступний вигляд:

$$\overline{OI} = \frac{a}{a+b+c}\overline{OA} + \frac{b}{a+b+c}\overline{OB} + \frac{c}{a+b+c}\overline{OC},$$

де a, b, c – довжини сторін трикутника.

Друга частина є метричною задачею – обчислення скалярного квадрату вектора $\overline{OI}$, який і є лівою частиною формули Ейлера $d^2 = R^2 - 2Rr$. При обчисленні слід використати дві формули площі трикутника – через радіуси вписаного та описаного кіл.

Наведемо детальне виведення формули Ейлера з точки зору алгебраїчного підходу.

Обчислимо квадрат вектора $\overline{OI}$:

$$\overline{OI}^2 = \left(\frac{a}{a+b+c}\overline{OA} + \frac{b}{a+b+c}\overline{OB} + \frac{c}{a+b+c}\overline{OC}\right)^2,$$

$$\overline{OI}^2 = \frac{a^2}{(a+b+c)^2}\overline{OA}^2 + \frac{b^2}{(a+b+c)^2}\overline{OB}^2 + \frac{c^2}{(a+b+c)^2}\overline{OC}^2 +$$

$$+\frac{2ab}{(a+b+c)^2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{OB} + \frac{2ac}{(a+b+c)^2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{OC} + \frac{2bc}{(a+b+c)^2}\cdot\overline{OB}\cdot\overline{OC}.$$

Зауважимо, що $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ та $\overline{OC}$ це радіуси описаного кола навколо трикутника, тобто $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = R$, тому в останній рівності зробимо заміну.

$$\overline{OI}^2 = \frac{a^2}{(a+b+c)^2}R^2 + \frac{b^2}{(a+b+c)^2}R^2 + \frac{c^2}{(a+b+c)^2}R^2 +$$

$$+\frac{2ab}{(a+b+c)^2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{OB} + \frac{2ac}{(a+b+c)^2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{OC} + \frac{2bc}{(a+b+c)^2}\cdot\overline{OB}\cdot\overline{OC}.$$

Скористаємося теоремою косинусів, з якої випливають наступні рівності:

$$2 \cdot \overline{OA} \cdot \overline{OB} = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - \overline{AB}^2,$$
$$2 \cdot \overline{OA} \cdot \overline{OC} = \overline{OA}^2 + \overline{OC}^2 - \overline{AC}^2,$$
$$2 \cdot \overline{OB} \cdot \overline{OC} = \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 - \overline{BC}^2.$$

Підставимо їх у рівність для знаходження $\overline{OI}^2$

$$\overline{OI}^2 = \frac{a^2}{(a+b+c)^2}R^2 + \frac{b^2}{(a+b+c)^2}R^2 + \frac{c^2}{(a+b+c)^2}R^2 +$$
$$+\frac{ab}{(a+b+c)^2} \cdot (\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - \overline{AB}^2) + \frac{ac}{(a+b+c)^2} \cdot (\overline{OA}^2 + \overline{OC}^2 - \overline{AC}^2) +$$
$$+\frac{bc}{(a+b+c)^2} \cdot (\overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 - \overline{BC}^2);$$
$$\overline{OI}^2 = \frac{a^2}{(a+b+c)^2}R^2 + \frac{b^2}{(a+b+c)^2}R^2 + \frac{c^2}{(a+b+c)^2}R^2 +$$
$$+\frac{ab}{(a+b+c)^2} \cdot (2R^2 - \overline{AB}^2) + \frac{ac}{(a+b+c)^2} \cdot (2R^2 - \overline{AC}^2) +$$
$$+\frac{bc}{(a+b+c)^2} \cdot (2R^2 - \overline{BC}^2).$$

З умови задачі маємо, що $\overline{AB}^2 = c^2$, $\overline{AC}^2 = b^2, \overline{BC}^2 = a^2$. Підставляючи ці вирази, будемо мати:

$$\overline{OI}^2 = \frac{a^2}{(a+b+c)^2}R^2 + \frac{b^2}{(a+b+c)^2}R^2 + \frac{c^2}{(a+b+c)^2}R^2 +$$
$$+\frac{2ab}{(a+b+c)^2} \cdot R^2 - \frac{abc^2}{(a+b+c)^2} + \frac{2ac}{(a+b+c)^2} \cdot R^2 - \frac{ab^2c}{(a+b+c)^2} +$$
$$+\frac{2bc}{(a+b+c)^2} \cdot R^2 - \frac{a^2bc}{(a+b+c)^2}.$$

Зведемо подібні:

$$\overline{OI}^2 = \frac{(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2} \cdot R^2 - \frac{abc(a+b+c)}{(a+b+c)^2} + \frac{2ab}{(a+b+c)^2} \cdot R^2 +$$

$$+\frac{2ac}{(a+b+c)^2} \cdot R^2 + \frac{2bc}{(a+b+c)^2} \cdot R^2,$$

$$\overline{OI}^2 = \frac{(a+b+c)^2 - 2ac - 2ab - 2bc}{(a+b+c)^2} \cdot R^2 - \frac{abc(a+b+c)}{(a+b+c)^2} +$$

$$+\frac{2ab}{(a+b+c)^2} \cdot R^2 + \frac{2ac}{(a+b+c)^2} \cdot R^2 + \frac{2bc}{(a+b+c)^2} \cdot R^2,$$

$$\overline{OI}^2 = \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2} \cdot R^2 - \frac{2ac}{(a+b+c)^2} \cdot R^2 - \frac{2ab}{(a+b+c)^2} \cdot R^2$$

$$-\frac{2bc}{(a+b+c)^2} \cdot R^2 - \frac{abc}{(a+b+c)} + + \frac{2ab}{(a+b+c)^2} \cdot R^2$$

$$+\frac{2ac}{(a+b+c)^2} \cdot R^2 + \frac{2bc}{(a+b+c)^2} \cdot R^2,$$

$$\overline{OI}^2 = R^2 - \frac{abc}{(a+b+c)}.$$

Виразимо abc та $(a+b+c)$ з формул площі трикутників та

$$S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow abc = 4SR.$$

$$S = r \cdot \frac{a+b+c}{2} \Rightarrow a+b+c = \frac{2S}{r}.$$

Підставимо їх в останню рівність для $\overline{OI}^2$:

$$\overline{OI}^2 = R^2 - \frac{4SR}{\frac{2S}{r}}.$$

Остаточно отримаємо:

$$\overline{OI}^2 = R^2 - 2Rr.$$

Тобто ми вивели формули Ейлера за допомогою алгебраїчного підходу, він є більш формалізованим та простим, ніж геометричним підхід.

2.2 Формула Ейлера для чотирикутників

Нехай x, y, z, t – відрізки діагоналей чотирикутника зі сторонами a, b, c, d; кут між діагоналями φ, P – середина AC, а Q – середина BD (рис. 2.8), тоді

$$OP = \frac{x+z}{2} - x = \frac{z-x}{2}$$

та

$$OQ = \frac{t-y}{2}.$$

Теорема косинусів для трикутника OPQ має вигляд:

$$PQ^2 = \left(\frac{t-y}{2}\right)^2 + \left(\frac{z-x}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{t-y}{2}\right)\left(\frac{z-x}{2}\right) cos\varphi,$$

або

$$4PQ^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - 2ty - 2xz + 2(tx + yz - yx - zt)cos\varphi.$$

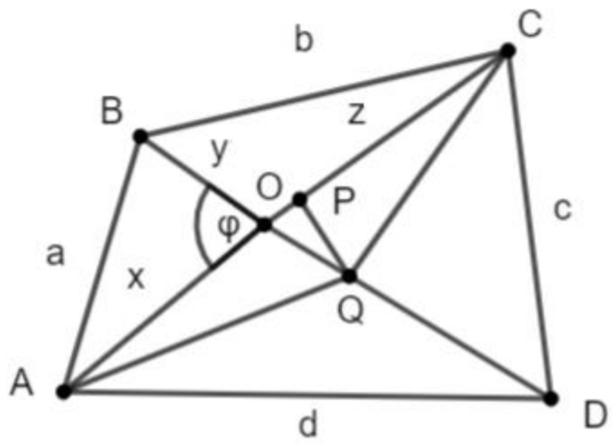

Рисунок 2.8

Введемо до розгляду трикутники AOB, AOD, BOC, COD.

Для них виконуються рівності:

$$\begin{cases} a^2 = x^2 + y^2 - 2xycos\varphi, \\ b^2 = y^2 + z^2 + 2yzcos\varphi, \\ c^2 = z^2 + t^2 - 2ztcos\varphi, \\ d^2 = x^2 + t^2 + 2xtcos\varphi, \end{cases}$$

з яких випливає, що

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2t^2 + (yz + xt - zt - xy)cos\varphi.$$

Віднімаючи один вираз з іншого, отримаємо формулу Ейлера:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = d_1^2 + d_2^2 + 4PQ^2.$$

У випадку паралелограма $PQ = 0, a = c, b = d$, тоді прийдемо до відомої формули:

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2).$$

Цим виразом можна скористатися для більш простішого отримання формули Ейлера. А саме, якщо вважати трикутник ABD як половину відповідного паралелограма, тоді

$$a^2 + d^2 = 2(QB^2 + AQ^2).$$

Аналогічно, якщо вважати трикутник BCD половиною паралелограма, маємо

$$b^2 + c^2 = 2(QC^2 + BQ^2).$$

Таким чином,

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4BQ^2 + 2(AQ^2 + QC^2).$$

Тепер розглядаємо трикутник ACQ як половину паралелограма. В цьому випадку

$$AQ^2 + QC^2 = 2(PQ^2 + AP^2).$$

Враховуючи, що $4BQ^2 = d_2^2, 4AP^2 = d_1^2$, отримаємо формулу Ейлера. Попарно додаючи та віднімаючи в той же системі з чотирьох рівностей, можна отримати наступний вираз:

$$b^2 + d^2 - a^2 - c^2 = (xy + zt + yz + xt)2cos\varphi = 2(x + z)(y + t)cos\varphi,$$

звідки остаточно отримаємо формулу:

$$b^2 + d^2 - a^2 - c^2 = 2d_1d_2cos\varphi.$$

Можна в формулу ввести знак модуля, але тут прийнято, що кут лежить навпроти сторони . Якщо кут буде більше 90 градусів, тоді і в цьому випадку формула залишається в незмінному вигляді, так як знак правої частини формули відповідає знаку лівої частини.

В даній формулі прихована наступна теорема.

Теорема 2.5 [3] Діагоналі чотирикутника належать перпендикулярним прямим тоді та тільки тоді, коли квадрати його протилежних сторін рівні.

Розглянемо площі трикутників, на які діагоналі ділять чотирикутник. Для зручності введемо наступні позначення:

$$S_{ABO} = S_1, S_{BOC} = S_2, S_{COD} = S_3, S_{AOD} = S_4.$$

Так як $S_1 \cdot S_2 = \frac{1}{4} xyztsin^2\varphi$, то отримаємо рівність: $S_1 \cdot S_2 = S_3 \cdot S_4$. В такому випадку вся площина

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \frac{(S_1 + S_4)(S_3 + S_4)}{4S_4}.$$

Це означає, що площа чотирикутника дорівнює

$$S = \frac{1}{2} AD \cdot \frac{BM \cdot CK}{ON},$$

де $BM, ON, \cdot CK$ – висоти, що опущені до основи AD (рис. 2.9).

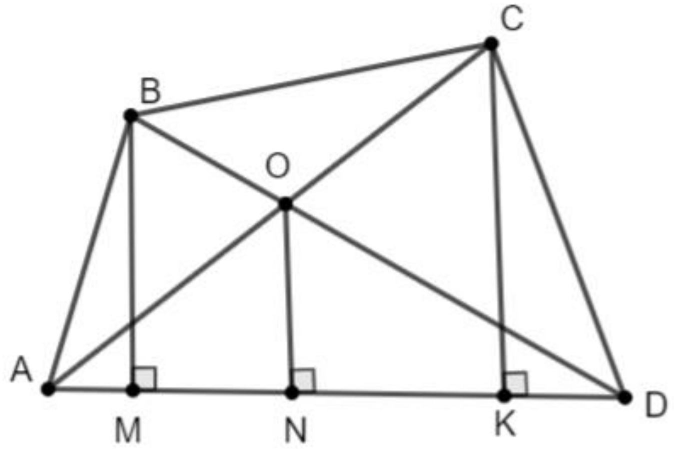

Рисунок 2.9

Ця формула схожа на відому формулу для трикутників, тільки замість висоти деяка середня висота чотирикутника $\frac{BM \cdot CK}{ON}$.

Повертаючись до рис 2.1, визначимо площу трикутника OPQ

$$S_{OPQ} = \frac{1}{2} OP \cdot OQ \cdot sin\varphi = \frac{1}{8}(zt + xy - zy - xt) sin\varphi,$$

або

$$S_{OPQ} = \frac{|S_1 + S_3 - S_2 - S_4|}{4}.$$

2.3 Теорема Понселе

Розглянемо теорему Понселе, яка виводиться з формули Ейлера. Сформулюємо цю теорему для випадку трикутника.

Теорема 2.6 [10] Якщо Ω та ω – відповідно описане та вписане кола деякого трикутника ABC, тоді у будь-якого вписаного в Ω трикутника $A'B'C'$, сторони якого $A'B'$ та $A'C'$ дотикаються ω, сторона $B'C'$ також дотикається ω (рис. 2.10).

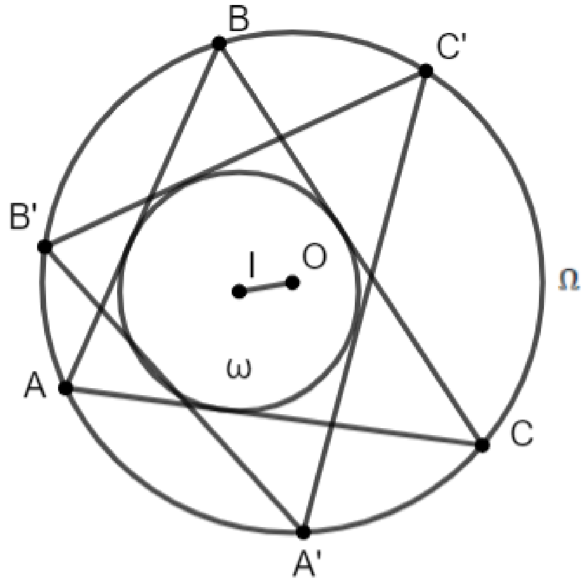

Рисунок 2.10

Доведення. Випадок вписаного кола можна отримати як простий наслідок формули Ейлера, що пов’язую відстані між центрами вписаного та описаного кіл трикутника та радіуси цих кіл. Нагадаємо цю формулу: якщо d – відстань між центами, а R та r – радіуси описаного та вписаного кіл трикутника ABC відповідно, тоді $d^2 = R^2 - 2Rr$.

Для того, щоб довести першу частину теореми, зауважимо, що з формули Ейлера випливає, що за будь-якими двома параметрами R, r та d третій відновлюється однозначно. Зокрема, якщо дано R та d, то величина радіуса вписаного кола задана єдиним чином. Побудуємо тепер для довільної точки A' на колі Ω, описаного навколо трикутника ABC, хорди $A'B'$ та $A'C'$, що дотикаються до вписаного в ABC кола ω.

Припустимо, що відрізок $B'C'$ не дотикається ω. Тоді ми можемо зменшити або збільшити радіус (змінив при цьому положення точок B' та C', але не змінюючи центр самого кола ω, а також кола Ω та точку A') таким чином, пряма стане дотичною до. Справді, якщо радіус прямує до нуля, тоді пряма $B'C'$ не має спільних точок з ω, а коли r становиться досить великим, коло перетинає пряму $B'C'$. Отже, в деякий момент пряма та коло дотикаються один одного. Але в такому випадку ми отримаємо трикутник

$A'B'C'$, вписаний в те саме ж коло Ω, що й трикутник ABC, та описаний навколо кола ω', центр якого співпадає з центром кола ω, а радіус інший. Це суперечить раніше зробленому спостереженню.

Тобто теорема доведена.

Розглянемо теорему Понселе для випадку чотирикутників, навколо яких можна описати деяке коло. Варіантів розташування кіл та видів дотикання достатньо багато, але ми розглянемо лише розташування, що проілюстроване на рис. 2.11.

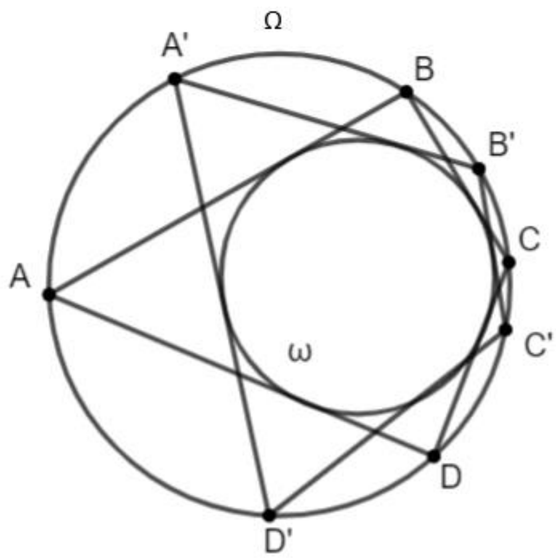

Рисунок 2.11

Навіть в цьому випадку зовсім не легко знайти приклад такого вписано-описаного чотирикутника, відмінного від тривіального – квадрат. Тому перше, що нам потрібно зробити, це описати досить широкий клас чотирикутників, що задовольняють задану властивість. Почнемо з доведення наступного твердження.

Твердження 2.1 Нехай $ABCD$ – довільний вписаний чотирикутник. Нехай E – точка перетину його діагоналей. Опустимо з E перпендикуляри на сторони чотирикутника (або на їх продовження), та нехай K, L, M та N – основи цих перпендикулярів. Тоді в чотирикутник $KLMN$ можна вписати коло з центром в точці E.

Доведення. Подивимося на рис. 2.12. Так як EK та EN перпендикулярні відрізкам AB та AD відповідно, чотирикутник $EKAN$ можна вписати в коло (сума протилежних кутів цього чотирикутника дорівнює $90° + 90° = 180°$).

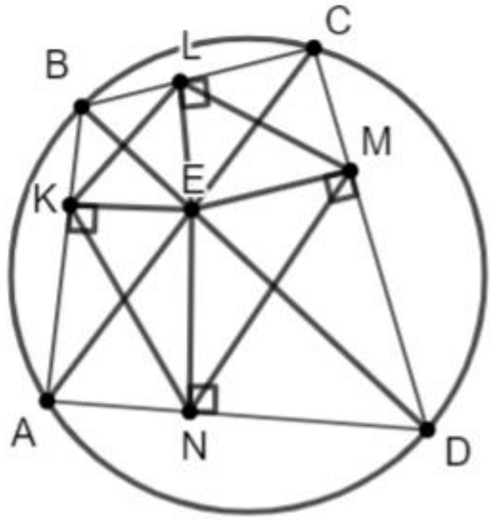

Рисунок 2.12

Тому кути KNE та KAE рівні так як спираються на одну дугу. Аналогічно з розгляду чотирикутника $ENDM$ отримаємо $\angle ENM = \angle EDM$. Але так як чотирикутник $ABCD$ вписаний, маємо

$$\angle EAK = \angle CAB = \angle CDB = \angle EDM.$$

Отже, $\angle KNE = \angle ENM$, тобто EN – бісектриса кута KNM. Аналогічно всі відрізки EK, EL та EM теж є бісектрисами відповідних кутів чотирикутника $KLMN$. Так як бісектриси кутів цього чотирикутника перетинаються в одній точці (точці E), в цей чотирикутник можна вписати коло.

ВИСНОВКИ

У кваліфікаційній роботі порівнюються алгебраїчний та геометричний підходи до отримання формули Ейлера.

Перший розділ присвячено основним поняттям та властивостям, що стосуються кола, трикутника та чотирикутника. Більш детально описуються вписані та описані трикутника, а також вписані та описані чотирикутники. Наведено основні формули та теореми.

Другий розділ присвячено формулі Ейлера для трикутника та чотирикутника. Наведено різні доведення та виведено цієї формули для трикутників. Доведено формулу для випадку вписаного та описаного чотирикутника. З’ясувалось, що з формули Ейлера випливає теорема Понселе. Вона справедлива для багатокутників, але у роботі розглянуті її формулювання лише для трикутників та чотирикутників.

У роботі розглядається алгебраїчний, а саме векторне доведення, та геометричний метод доведення формули Ейлера. З’ясувалось, що алгебраїчний підхід до отримання формули є більш формалізованим та простим, ніж геометричним підхід.

Отримані результати можна застосовувати при проведенні факультативів з геометрії або при викладенні спецкурсів.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Кокстер Г. С. М. Введение в геометрию. Москва : Наука, 1991. 348 с.
2. Кокстер Г. С. М., Грейтцер С. Л. Новые встречи с геометрией. Москва : Наука, 1978. 403 с.
3. Малышев И. Г. Геометрия вписанных и описанных четырехугольников. Н. Новгород : Нижегородский институт развития образования, 2019. 62 с.
4. Мерзляк А. Г., Полонский В. Б., Якір М. С. Геометрія 8 клас. Харків : Гімназія, 2016. 222 с.
5. Мерзляк А. Г., Полонский В. Б., Якір М. С. Геометрія 7 клас. Харків : Гімназія, 2015. 224 с.
6. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. Москва : Айрис-пресс, 2013. 288 с.
7. Понарин Я. П. Элементарна геометрия. Планиметрия, преобразования плоскости. Москва : МЦНМО, 2004. 312 с.
8. Стєганцев Е. В., Гречнева М. О. Порівняння алгебраїчних та геометричних підходів на прикладі доведення формули Ейлера. *Актуальні проблеми математики та інформатики* : тези доповідей Одинадцятої Всеукраїнської, вісімнадцятої регіональної наукової конференції молодих дослідників (Запоріжжя, 27-28 квіт. 2020). Запоріжжя : ЗНУ, 2020. С. 80–81.
9. Шабат Г.Б., Сгибнев А.И. Формула Ейлера и теорема Понселе. *Поліном*. 2009. №2. С. 22–27.
10. Шарыгин Г. И. Лекции по элементарной геометрии Москва : МЦНМО, 2014. 217 с.