МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра загальної математики

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА

на тему: **«ЗАСТОСУВАННЯ ПРОЕКТИВНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ КОНІК ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ»**

Виконала: студентка 2 курсу, групи 8.1118-з
спеціальності 111 математика
(шифр і назва спеціальності)
освітньої програми математика
Т. С. Чорновіл
(ініціали та прізвище)
Керівник доцент кафедри загальної математики, доцент, к.ф.-м.н. Стєганцев Є. В.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)
Рецензент доцент кафедри фундаментальної математики, доцент, к.ф.-м.н. Ткаченко І.Г.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Запоріжжя – 2020

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет математичний

Кафедра загальної математики

Рівень вищої освіти магістр

Спеціальність 111 математика

(шифр і назва)

Освітня програма математика

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри загальної
математики, к.ф.-м.н., доцент

_____________Зіновєєв І. В.
(підпис)

“ ____ ” ______________20__ р.

ЗАВДАННЯ

НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТОВІ

Чорновіл Тетяні Сергіївні
(прізвище, ім’я та по-батькові)

1. Тема роботи Застосування проективних властивостей конік до розв’язання задач

керівник роботи Стєганцев Євгеній Вікторович, доцент, к.ф.-м.н.
(прізвище, ім’я та по-батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від « 29 » травня 2019 р. № 812-с

2. Строк подання студентом роботи 26.12.2019

3. Вихідні дані до роботи 1. Постановка задачі.
2. Перелік літератури.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)
1. Постановка задачі.
2. Основні теоретичні відомості.

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов’язкових креслень)
презентація

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		Завдання видав	Завдання прийняв

7. Дата видачі завдання 30.05.2019

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	25.06.2019	
2.	Збір вихідних даних.	09.07.2019	
3.	Обробка методичних та теоретичних	04.09.2019	
	джерел.		
4.	Розробка першого розділу.	30.10.2019	
5.	Розробка другого розділу.	29.11.2019	
6.	Оформлення і нормоконтроль	23.12.2019	
	кваліфікаційної роботи.		
7.	Захист кваліфікаційної роботи.	10.01.2020	

Студент ____________ Т. С. Чорновіл
(підпис) (ініціали та прізвище)

Керівник роботи ____________ Є. В. Стєганцев
(підпис) (ініціали та прізвище)

Нормоконтроль пройдено

Нормоконтролер ____________ О. Г. Спиця
(підпис) (ініціали та прізвище)

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Застосування проективних властивостей конік до розв'язання задач»: 85 с., 27 рис., 3 табл., 21 джерело, 1 додаток.

ІНВАРІАНТ, КОНІКА, ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ, ПОДВІЙНЕ ВІДНОШЕННЯ, ПОЛЯРНА ВІДПОВІДНІСТЬ, ПРОЕКТИВНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ, ПУЧКИ КОНІК.

Об'єкт дослідження – проективні властивості конік.

Предмет дослідження – застосування проективних властивостей конік до розв'язання задач.

Мета роботи – дослідити та проаналізувати застосування проективних властивостей конік до розв'язання задач.

Методи дослідження – аналітичний, порівняльний.

У кваліфікаційній роботі розглядається теорія приведення загального розв'язання кривих та поверхонь другого порядку до канонічного вигляду. Розглянуто та досліджено проективні властивості конік. На основі цього були розглянуті приклади застосування проективних властивостей конік до розв'язання задач.

Дана кваліфікаційна робота магістра є корисною при вивченні курсу як аналітичної геометрії, так і курсу геометрії вцілому.

SUMMARY

Master's Qualification Thesis «The Use of the Projective Properties of the Conics for the Solution of the Problems»: 85 pages, 27 figures, 3 tables, 21 references, 1 appendix.

INVARIANT, CONIC, SECOND ORDER LINES, DOUBLE RATIO, POLAR CORRESPONDENCE, PROJECTIVE TRANSFORMATIONS, CONIC BEAMS.

The object of study is the projective properties of the Conics.

The subject of study is the Use of the Projective Properties of the Conics for the Solution of the Problems.

The aim of the study is to investigate and analyze the Use of the Projective Properties of the Conics for the Solution of the Problems.

The methods of research are analytical comparative.

In the Master's qualifying paper the theory of bringing the general solution of curves and surfaces of the second order to the canonical appearance are considered. The projective properties of Conics are considered and investigated. Based on this, the examples of applying the projective properties of Conics to solving problems were considered.

This Master's qualification is useful in the study of both analytical geometry and the course of geometry in general.

ЗМІСТ

ВСТУП

Протягом всієї історії розвитку науки і техніки криві другого порядку незмінно привертали до себе увагу багатьох дослідників і вчених. З ними були знайомі ще давні греки.

Грецькі математики не знали ні методу координат, ні рівнянь, тим не менш всі властивості еліпса, гіперболи і параболи були їм добре відомі. Вони отримували і вивчали ці криві як плоскі перерізи конічної поверхні.

Першим у цьому був давньогрецький геометр Менехм (IV ст. до н.е.), який працював в Академії Платона. Саме йому приписується самостійне відкриття трьох видів конічних перерізів, які іноді і називають тріадою Менехма.

Вивчення еліпса, гіперболи і параболи Менехм проводив, розсікаючи поверхню конуса площиною, перпендикулярною до твірної. Але для отримання кожної з названих кривих йому доводилося брати різні конуси: для отримання еліпсу він брав конус з гострим кутом між протилежними твірними, для гіперболи – конус з тупим і для параболи – конус з прямим кутом.

Менехму вдалося отримати багато співвідношень, які виражають властивості кривих, які вивчаються.

Пізніше у III ст. до н.е. Архімед у своїй праці «Про коноїди і сфероїди» розглядає поверхні 2-го порядку. Коноїдами він називав тіла, отримані в результаті обертання параболічного чи гіперболічного сегмента навколо його осі, тобто тіла, які ми називаємо параболоїдами і гіперболоїдами.

До речі, найменування Архімеда було правильнішим, ніж прийняте нами, так як «параболоїд» значить «схожий на параболу», а «коноїд» – «схожий на конус». Наш термін неправильний, так як неможна говорити про схожість тіла і лінії; між тим термін Архімеда вказує, що мова йде про тіло, схоже на конус.

Подальшим вивченням конічних перерізів займався молодший сучасник Архімеда з міста Перги – Аполлоній Пергський (бл. 260-170 до н.е.). Його найвизначніша праця «Конічні перетини» («Коніка», «Конусні», звідси інша назва кривих – коніки) присвячена саме конічним перерізам, або кривим другого порядку. Фундаментальний трактат складався з восьми книг, де розглянуто майже 400 теорем. Грецький текст чотирьох з них зберігся, ще три дійшли до нас в арабському перекладі, восьму книгу реконструював в XVIII в. Едмонд Галлей. Праця Аполлонія надзвичайно багата змістом, деякі підходи, застосовані в ній, згодом переросли в окремі розвинені розділи геометрії.

Аполлоній розглядає загальний випадок утворення конічних перерізів при перетині довільного кругового двопорожнинного конуса площиною під будь-яким кутом. Вчений дістає еліпс, параболу або гіперболу залежно від того, перетинає площина всі твірні тільки однієї порожнини конуса, паралельна вона одній твірній чи перетинає обидві порожнини. Аполлоній ввів назви параболи, гіперболи й еліпса.

Для кожної з цих кривих Аполлоній відкриває і доводить основні її властивості. Зокрема, за основу класифікації кривих прийнято, по суті, властивості їх алгебраїчних рівнянь, які Аполлоній записував в словесно-геометричній формі і називав асимптотами кривої. З сучасного погляду можна сказати, що Аполлоній досліджував властивості конічних перерізів відносно прямокутної системи координат, у якій одна вісь збігалася з головним діаметром кривої (в еліпса – це була велика вісь), а друга – проходила через вершину кривої [19].

Всі докази Аполлонія носять чисто геометричний характер, і в цьому відношенні праця «Конічні перетини» – найвища точка, якої досягла грецька геометрична алгебра. Переклад міркувань Аполлонія на алгебраїчну мову був проведений в сімнадцятому столітті творцями аналітичної геометрії Декартом і Ферма. Не користуючись алгебраїчною символікою, Аполлоній дав закінчену теорію кривих другого порядку, причому ця теорія була викладена не тільки, без будь-яких алгебраїчних символів, але навіть без використання таких понять як «нуль» і «від'ємна величина», які були ще не відомі грецькій математиці.

Застосування конічних перетинів в давнину було обмежено. Криві другого порядку більшою мірою зацікавили вчених в XV-XVII століттях. Галілей, вивчаючи рух снаряда, випущеного з гармати, визначив, що він рухається по параболі. Параболічне дзеркало, лягло в основу конструкції параболічного телескопа і прожектора. Йоганн Кеплер встановив закони руху планет, які описують еліпс, в фокусі якого знаходиться Сонце. Астрономи визначили, що комети рухаються по еліпсам, параболам і гіперболам. Таким чином, ідеї Аполлонія, що довгий час були не актуальними, справили великий вплив на розвиток математики та природознавства Нового часу [21].

В даний час теорія кривих другого порядку займає вагоме місце в математиці, є основою для вирішення різноманітних математичних, фізичних та прикладних задач.

Об'єкт дослідження – проективні властивості конік.

Предмет дослідження – застосування проективних властивостей конік до розв'язання задач.

Мета роботи – дослідити та проаналізувати застосування проективних властивостей конік до розв'язання задач.

Для реалізації цієї мети були поставлені такі завдання:

а) розглянути визначення ліній другого порядку;

б) вивчити і проаналізувати основні види поверхонь другого порядку, а саме розглянути способи їх побудови, дослідити основні властивості цих поверхонь;

в) розглянути та дослідити проективні властивості конік;

г) подати приклади застосування проективних властивостей конік до розв'язання задач.

Методи дослідження – аналітичний, порівняльний.

Наукова новизна одержаних результатів визначається в тому, що робота стане в нагоді доступно і наочно розібратися в матеріалі, покаже практичне застосування проективних властивостей конік до розв’язання задач.

Апробація результатів дослідження здійснювалась у участі в ІІІ Міжнародній науково-практичній конференції «Наука та майбутнє»; надрукуванні статті «Застосування конік при розв’язуванні задач з параметром при підготовці до ЗНО з математики»; доповіді на методичному засіданні Нікопольського медичного коледжу.

1 ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

1.1 Визначення ліній другого порядку

Кривими другого порядку називаються лінії, які у прямокутній системі координат описуються алгебраїчними рівняннями другого ступеня відносно змінних x, y:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \tag{1.1}$$

де хоч би один з коефіцієнтів a_{11}, a_{12}, a_{22} є відмінний від нуля.

В залежності від того, які значення приймають коефіцієнти рівняння (1.1), розрізняють наступні основні криві другого порядку: коло, еліпс, гіперболу та параболу.

Такі лінії другого порядку, як еліпс, гіпербола та парабола називають також, конічними перерізами. Основою для такої назви є те, що дані лінії можна одержати, перетинаючи круговий конус площинами, які не проходять через вершину конуса. Зокрема, площини, які проходять паралельно до осі конуса, перетинають його по гіперболах (див. рис. 1а), а площини, які проходять паралельно до довільної твірної, перетинають конус по параболах (див. рис. 1б). Площини, які не паралельні ні до осі конуса, ні до його твірних, перетинають конус по еліпсах (див. рис. 1в). У випадку перпендикулярності площини до осі конуса в перетині утворюється коло [2].

Еліпсом називають множину точок площини, сума відстаней яких до двох заданих точок – фокусів еліпса є величина стала і більша за відстань між фокусами.

Фокуси еліпса позначають літерами F_1 і F_2, а суму відстаней точок еліпса до фокусів через $2a$.

При цьому не є винятком збіг фокусів еліпса. Очевидно, якщо фокуси збігаються то еліпс представляє собою окружність.

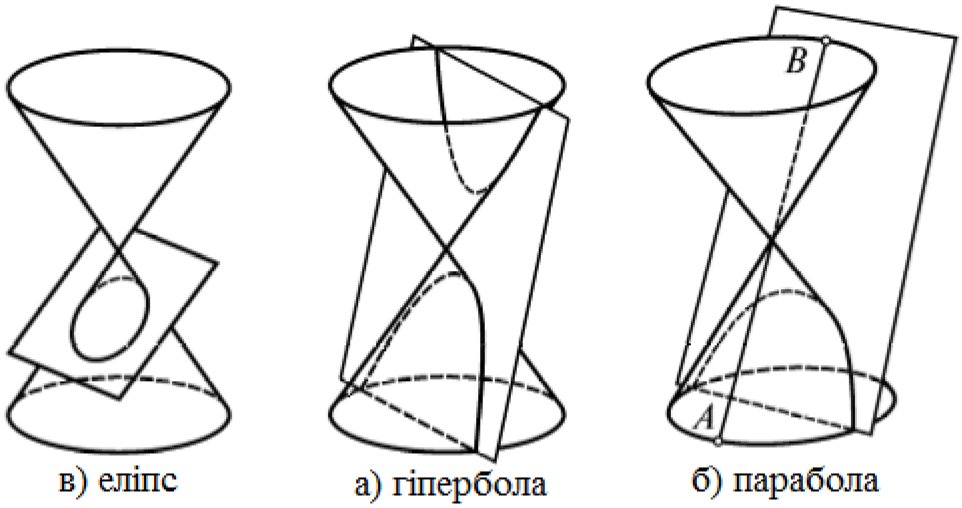

Рисунок 1.1 – Перетин конуса площиною

Виведемо канонічне рівняння еліпса. Для цього виберемо початок O декартової системи координат в середині відрізка F_1F_2, а вісь $0x$ і $0y$ направимо так, як зображено на рисунку 1.2

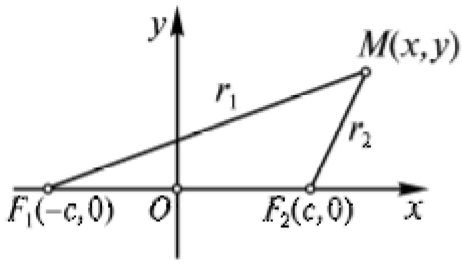

Рисунок 1.2

Нехай довжина відрізка F_1F_2 дорівнює 2c. Тоді в обраній системі координат точки F_1 і F_2, мають координати $F_1(-c;0)$ і $F_2(c;0)$. Позначимо суму відстаней точок еліпса до фокусів через $2a$. Зрозуміло, що $2a > 2c$, тобто $a > c$. Нехай M – точка площини з координатами $(x;y)$ (див. рис.1.2). Позначимо через r_1 та r_2 відстань від точки M до точок F_1 і F_2 відповідно. За означенням еліпса рівність

$$r_1 + r_2 = 2a, \tag{1.2}$$

є необхідною та достатньою умовою розміщення точки $M(x;y)$ на даному еліпсі.

Використовуючи формулу відстані між двома точками, отримаємо

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},\ r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \tag{1.3}$$

З рівності (1.1) та (1.2) слідує, що відношення

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a, \tag{1.4}$$

є необхідною та достатньою умовою розміщення точки M з координатами x та y на даному еліпсі. Тому відношення (1.4) можна розглядати як рівняння еліпса.

Спростимо це рівняння. Піднесемо до квадрата обидві частини рівності і розкриємо дужки

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x-c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\ ,$$

отримаємо

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

Знову піднесемо до квадрата і після спрощення маємо

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Оскільки за означенням $2a > 2c$, то різницю у дужках можна позначити $a^2 - c^2 = b^2$. Тоді остання рівність матиме вид

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

або після спрощення

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1.5}$$

Величину a називають великою піввіссю еліпса, b – малою піввіссю еліпса, c – половина відстані між фокусами. Ці величини пов’язані між собою співвідношенням

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Так як рівняння (1.5) представляє собою алгебраїчний наслідок рівняння еліпса (1.4), то координати x та y будь-якої точки M еліпса будуть задовольняти і рівняння (1.5). Оскільки при алгебраїчних перетвореннях, пов'язаних з звільненням від радикалів, можуть з’явитися «зайві корені», ми повинні переконатися в тому, що будь-яка точка M, координати якої задовольняють рівняння (1.5), розташована на даному еліпсі. Для цього, очевидно, досить довести, що величини r_1, і r_2 для кожної точки задовольняють співвідношення (1.2). Отже, нехай координати x та y точки M задовольняють рівняння (1.5). Підставляючи значення y^2 з (1.5) в праву частину виразу (1.3) для r_1 після нескладних перетворень знайдемо, що

$$r_1 = \sqrt{(a + \frac{c}{a}x)^2}.$$

Так як, $a+\frac{c}{a}x>0$, то $r_1=a+\frac{c}{a}x$. Аналогічно знайдемо $r_2=a-\frac{c}{a}x$. Таким чином, для точки M

$$r_1 = a+\frac{c}{a}x,\ r_2 = a-\frac{c}{a}x, \qquad (1.6)$$

тобто $r_1+r_2=2a$, і тому точка M знаходиться на еліпсі. Рівняння (1.5) називається канонічним рівнянням еліпса [8].

Зауваження 1.1 Якщо піввісь еліпса a і піввісь еліпса b рівні, то еліпс представляє собою окружність, радіус якого рівний $R=a=b$, а центр співпадає з початком координат.

Гіперболою називають геометричне місце точок площини, абсолютна величина різниці відстаней яких до двох даних точок, які є фокусами, буде величиною сталою (її позначають $2a$) і меншою за відстань між фокусами.

Фокуси гіперболи позначають літерами F_1 і F_2, відстань між фокусами позначають через $2c$, а різницю відстаней точок гіперболи до фокусів через $2a$.

Виведемо канонічне рівняння гіперболи. Для цього виберемо таку систему координат, щоб фокуси F_1 і F_2 лежали на осі $0x$, а вісь $0y$ проходила через середину відрізка F_1F_2 (див. рис. 1.3).

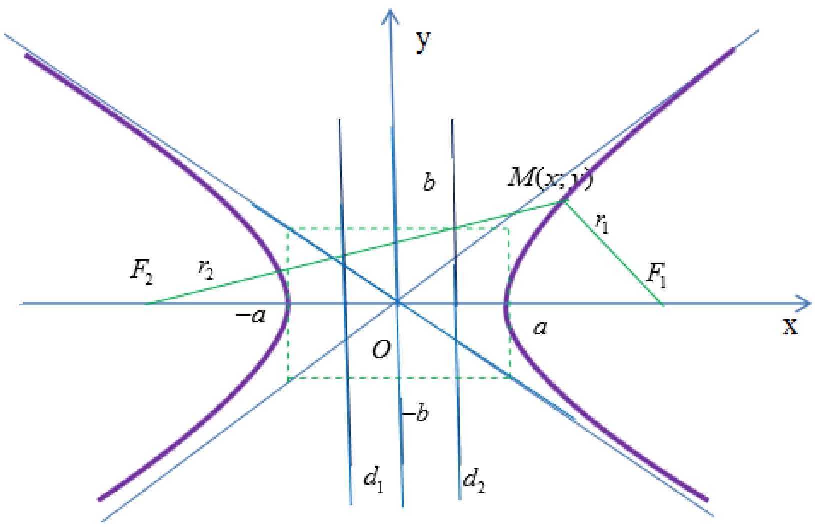

Рисунок 1.3

Тоді фокуси мають координати $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$. За означенням гіперболи маємо рівність

$$|r_1 - r_2| = 2a, \tag{1.7}$$

яка є необхідною та достатньою умовою розміщення точки M на даній гіперболі. Використовуючи вираз (1.3) для r_1 та r_2 співвідношення (1.7), отримаємо наступну необхідну та достатню умову розміщення точки M з координатами x та y на даній гіперболі.

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right| = 2a. \tag{1.8}$$

Після піднесення до квадрату і тотожних перетворень маємо:

$$x^2c^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 \Leftrightarrow a^2(a^2 - c^2) = x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2.$$

Позначимо через $b^2 = c^2 - a^2$ (за означенням $2a < 2c$), і після спрощення отримаємо канонічне рівняння гіперболи

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1.9}$$

Переконаємось, що рівняння (1.9), отримане в результаті алгебраїчних перетворень рівняння (1.8) не отримало нових коренів. Для цього достатньо довести, що для кожної точки M, координати x та y задовольняють рівняння (1.9), величини r_1 та r_2 задовольняють співвідношення (1.7). Провівши міркування, аналогічні тим, які були зроблені при виведенні формули (1.6), знайдемо для цікавих нам величин r_1 та r_2 наступні вирази:

$$r_1 = \begin{cases} a + \frac{c}{a}x \text{ при } x > 0, \\ -a - \frac{c}{a}x \text{ при } x < 0, \end{cases} \quad r_2 = \begin{cases} -a + \frac{c}{a}x \text{ при } x > 0, \\ a - \frac{c}{a}x \text{ при } x < 0, \end{cases}$$

Таким чином, для розглянутої точки M маємо $|r_1 - r_2| = 2a$, тому вона розміщена на гіперболі.

Рівняння (1.9) називається канонічним рівнянням гіперболи. Величини a і b називаються відповідно дійсною піввіссю та уявною піввіссю гіперболи.

Параболою називають геометричне місце всіх точок площини, для яких відстань до деякої фіксованої точки F цієї площини рівне відстані до деякої фіксованої прямої, також розміщеної в заданій площині [1].

Зазначена у визначені точка F називається фокусом параболи, а фіксована пряма – директрисею параболи. Виведемо канонічне рівняння параболи. Для цього виберемо початок O декартової системи координат в середині відрізка FD, який уявляє собою перпендикуляр, опущений з фокусу F на директрису, а вісь $0x$ та вісь $0y$ направимо так, як на рисунку 1.4

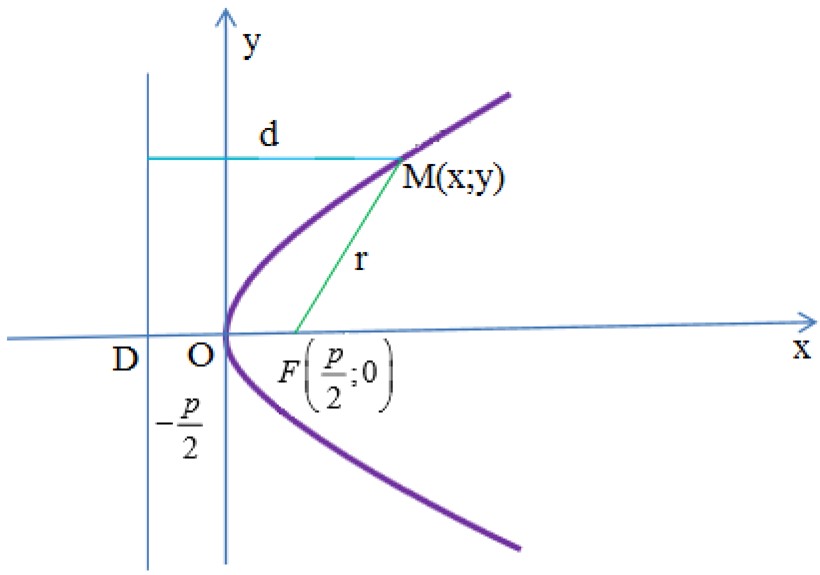

Рисунок 1.4

Нехай довжина відрізка FD дорівнює p. Тоді в обраній системі координат точка F має координати $(\frac{p}{2}; 0)$. Нехай M – точка площини з координатами $(x; y)$. Позначимо через r відстань від M до F, а через d – відстань від M до директриси (див. рис. 1.4). Згідно визначення параболи рівність

$$r = d, \tag{1.10}$$

є необхідною та достатньою умовою розміщення точки M на даній параболі.

Так як

$$r = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2}, d = \frac{p}{2} + x, \tag{1.11}$$

то, згідно (1.10) відношення

$$\sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2} = \frac{p}{2} + x, \tag{1.12}$$

представляє собою необхідну та достатню умову розміщення точки M з координатами x та y на даній параболі. Шляхом стандартного знищення коренів це рівняння має вид

$$y^2 = 2px. \tag{1.13}$$

Переконаємося в тому, що рівняння (1.13), отримане шляхом алгебраїчних перетворень рівняння (1.12), не отримало нових коренів. Для цього достатньо довести, що для кожної точки M, координати x і y якої задовольняють рівняння (1.13), величини r та d рівні (виконано відношення (1.10)).

З відношення (1.13) слідує, що абсциси x розглянутих точок невід’ємні, тобто $x \geq 0$. Для точок з невід’ємними абсцисами $d = \frac{p}{2} + x$. Знайдемо вираз для відстані r від точки M до F. Підставивши y з виразу (1.13) в праву частину виразу для r (1.11) та враховуючи, що $x \geq 0$, знайдемо, що $r = \frac{p}{2} + x$. Таким чином, для розглянутих точок $r = d$, тобто вони знаходяться на параболі.

Рівняння (1.13) називається канонічним рівнянням параболи. Величина p називається параметром параболи.

Задача 1.1 Скласти рівняння геометричного місця точок площини, рівновіддалених від прямої (d): $3x - 4y + 5 = 0$ та точки $F(4; 3)$.

Розв'язання. Нехай $M(x; y)$ – одна із точок шуканого геометричного місця точок. Тоді відстань від неї до прямої d буде дорівнювати

$$p(M; d) = \frac{|3x - 4y + 5|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|3x - 4y + 5|}{5}.$$

Оскільки відстань між точками M та F дорівнює

$$MF = \sqrt{(x - 4)^2 + (y - 3)^2},$$

то, згідно із умовою задачі, виконується рівність

$$\frac{|3x - 4y + 5|}{5} = \sqrt{(x - 4)^2 + (y - 3)^2},$$

перетворюючи яку дістаємо

$$(3x - 4y + 5)^2 = 25(x^2 + y^2 - 8y - 6y + 25),$$
$$16x^2 + 9y^2 + 24xy - 230x - 110y + 600 = 0.$$

Оскільки вірні перетворення і у зворотному порядку, то одержане співвідношення є рівнянням шуканої множини точок. Відмітимо, що одержане рівняння є рівняння лінії другого порядку, а також, що дана лінія є парабола (відповідно до означення параболи).

Задача 1.2 Знайти координати фокусів еліпса $16x^2+25y^2-400=0$ та фокальні радіуси точок з абсцисою 2.

Розв'язання. Записавши рівняння еліпса у канонічному виді

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1,$$

та порівнюючи його з рівнянням (1.5), отримаємо $a^2=25, b^2=16.$ Тому $c^2=a^2-b^2=9$, звідки $c=3, F_1(3;0), F_2(-3;0)$. Скориставшись виразами для фокальних радіусів дістаємо

$$F_1M=a-\frac{c}{a}x=5-\frac{3}{5}2=\frac{19}{5}, F_2M=a+\frac{c}{a}x=5+\frac{3}{5}2=\frac{31}{5}.$$

1.2 Класифікація кривих другого порядку

Розглянувши еліпс, параболу та гіперболу, вже згадували, що вони є окремими випадками кривих другого порядку. Уточнимо це твердження і покажемо, що, в певному сенсі, інших кривих другого порядку не існує.

Якщо ліва частина рівняння (1.1) розкладається на два множники першого ступеня, то крива є об'єднанням двох прямих (можливо, співпадаючих). В цьому випадку вона називається виродженою. Виродженою вважається також крива, яка містить рівно одну дійсну точку (наприклад, $x^2+y^2=0$).

Для будь-якої невиродженої кривої існує система координат, в якій її рівняння має досить простий вигляд. Опишемо основну ідею цього спрощення.

Спочатку зробимо поворот осей координат на кут φ. Це означає, що в рівнянні (1.1) координати x і y треба замінити відповідно на $xcos\varphi - ysin\varphi$ та $xsin\varphi + ycos\varphi$. Обираючи значення φ, можна домогтися того, що коефіцієнт при творі xy стане дорівнювати нулю. Потім перенесемо початок координат в точку (x_0, y_0), тобто, замінимо x на $x + x_0$ і y на $y + y_0$. Вибором значень (x_0, y_0) можна домогтися того, що рівняння (1.1) прийме один з наступних канонічних видів (I), (II), (III) [10].

Безпосереднє обчислення показує, що крива

$$\text{(I)}\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a \geq b > 0,$$

є еліпсом з центром в початку координат, фокусами в точках $(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ і великою та малою піввісями (тобто половинами довжин відповідних осей), що дорівнюють відповідно a, b. В окремому випадку $a = b$ еліпс (I) є колом.

Крива

$$\text{(II)}\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, a > 0, b > 0,$$

є гіперболою, що перетинає свою дійсну вісь в двох точках, відстань між якими дорівнює $2a$. Величина a називається дійсною, а b – уявною піввіссю гіперболи. Прямі $\frac{x}{y} = \pm\frac{a}{b}$ є асимптотами гіперболи, а точки $(\pm\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$ – її фокусами. При $a = b$ гіпербола (II) буде рівносторонньою.

У випадку

$$\text{(III)}\ y^2 = 2px, p > 0,$$

крива є параболою, вісь якої збігається з віссю абсцис, фокус знаходиться в точці $(\frac{p}{2}, 0)$, а рівняння директриси $x = -\frac{p}{2}$.

Крива $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ називається уявним еліпсом і не містить жодної дійсної точки [4].

Розглянувши таблицю ліній другого порядку на евклідовій площині (див. табл. 1.1) ми бачимо, що довільна лінія другого порядку є або еліпсом (дійсним або уявним), або гіперболою, або параболою, або парою прямих (дві прямі, що перетинаються, дві паралельні прямі, дві прямі що співпадають, пара уявних прямих, що перетинаються у дійсній точці, або дві уявні паралельні прямі).

Таблиця 1.1 – Лінії другого порядку на евклідовій матеріально-комплексній площині

Тип лінії	Вид лінії	Невироджені лінії	Вироджені лінії
I	гіперболічний	гіпербола $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$ $a>0, b>0$	пара прямих, які перетинаються $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ $a>0, b>0,$ $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1.$
Тип лінії	Вид лінії	Невироджені лінії	Вироджені лінії
	еліптичний	еліпс а) дійсний $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$ $a\geq b>0$ б) уявний $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1,$ $a\geq b>0$	пара уявних прямих, що перетинаються у дійсній точці $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0,$ $a\geq b>0$ $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1.$
II, III	параболічний	парабола $y^2=2px, p>0$	пара паралельних прямих а) дійсних та різних $y^2-b^2=0, b>0$ б) уявних (комплексно-сполучених) $y^2+b^2=0, b>0$ в) дві прямі що співпадають $y^2=0$

Для багатьох задач така повна інформація є абсолютно зайвою. Найчастіше достатньо лише знати наведене рівняння або навіть тільки вид кривої (тобто є вона еліпсом, гіперболою і т.п.).

Існує простіший метод визначення виду кривої та її рівняння, не знаходячи відповідної координатної системи.

Коефіцієнти рівняння (1.1) ліній другого порядку зручно представляти розміщеними у вигляді матриці (символ a_{ij} означає те саме, що і a_{ji}

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Визначення 1.1 Визначник цієї матриці

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

називається великим визначником рівняння (1.1), а його мінор – малим визначником рівняння (1.1).

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2.$$

Число $S = a_{11} + a_{22}$ (слід матриці визначника δ) називають слідом рівняння (1.1).

Числа Δ, δ, S називають також інваріантами рівняння (1.1).

Припустимо, що від координат x, y ми перейшли до нових координат x', y', що утворилися при повороті попередніх осей координат на деякий кут θ. Тоді замість рівняння (1.1) ми отримаємо рівняння

$$a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0, \qquad (1.14)$$

і зокрема, для сліду $S' = a'_{11} + a'_{22}$ рівняння (1.14) ми отримаємо звідси вираз

$$S' = a_{11}cos^2\theta + 2a_{12}cos\theta sin\theta + a_{22}sin^2\theta + a_{11}sin^2\theta - 2a_{12}cos\theta\,\mathrm{sin\theta} +$$
$$+a_{22}cos^2\theta = a_{11}+a_{22} = S.$$

Таким чином, перетворене рівняння (1.14) має той же слід, що і вихідне рівняння (1.1).

Аналогічно, для малого визначника

$$\delta' = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{vmatrix},$$

ми отримаємо, що

$$\begin{gathered}
\delta' = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \\
= (a_{11}cos^2\theta + 2a_{12}cos\theta sin\theta + a_{22}sin^2\theta) \times \\
\times (a_{11}sin^2\theta - 2a_{12}cos\theta sin\theta + a_{22}cos^2\theta) - \\
-[(\mathrm{a}_{22} - a_{11})cos\theta sin\theta + a_{12}(cos^2\theta - sin^2\theta)]^2 = \\
= (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)cos^4\theta + \\
+2[-a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} - (a_{22} - a_{11})a_{12}]cos^3\theta sin\theta + \\
+[a_{11}^2 - 4a_{12}^2 + a_{22}^2 - (a_{22} - a_{11})^2 + 2a_{12}^2]cos^2\theta sin^2\theta + \\
+2[a_{12}a_{11} - a_{22}a_{12} + (a_{22} - a_{11})a_{12}]cos\theta sin^3\theta + \\
+(a_{22}a_{11} - a_{12}^2)sin^4\theta = \\
= (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(cos^4\theta + 2cos^2\theta sin^2\theta + sin^4\theta) = \\
= (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(cos^2\theta + sin^2\theta)^2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \delta.
\end{gathered}$$

А також, великий визначник для рівняння (1.1) має вид

$$\Delta'\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix} = a'_{31}\begin{vmatrix} a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{22} & a'_{23} \end{vmatrix} - a'_{32}\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{23} \end{vmatrix} + a'_{33}\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{vmatrix}.$$

Прості розрахунки показують, що

$$\begin{vmatrix} a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{22} & a'_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} cos\theta - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} sin\theta,$$

та

$$\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} sin\theta + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} cos\theta.$$

Звідси, після тривіальних перевтілень ми отримаємо, що

$$a'_{31}\begin{vmatrix} a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{22} & a'_{23} \end{vmatrix} - a'_{32}\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{23} \end{vmatrix} = a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Крім того, так як $a'_{33} = a_{33}$ та $\delta' = \delta$, то

$$a'_{33}\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{vmatrix} = a'_{33}\delta' = a_{33}\delta = a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Отже,

$$\Delta' = a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta.$$

Розглянемо, що відбувається з величинами S, δ, Δ при перенесенні початку координат. Як ми знаємо, при перенесенні початку координат в точку

(x_0, y_0) коефіцієнти рівняння (1.1) змінюються. З цього слідує, що при цьому перенесенні величини S і δ не змінюються, а визначник Δ переходить в визначник

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix},$$

де

$$a'_{13} = a'_{31} = a_{11}x_0 + a_{21}y_0 + a_{31},$$
$$a'_{23} = a'_{32} = a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{32},$$
$$a'_{33} = a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33} =$$
$$= a'_{13}x_0 + a'_{23}y_0 + (a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}).$$

Віднявши з третього рядка цього визначника перший рядок, помножимо на x_0, і другий рядок, помножимо на y_0, ми отримаємо, визначник

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a^*_{33} \end{vmatrix},$$

де $a^*_{33} = a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}$.

Тому, віднявши з останнього стовпчика цього визначника перший стовпчик, помножений на x_0, і другий стовпчик, помножений на y_0 ми отримаємо визначник

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta.$$

Оскільки при цих перетвореннях визначник не змінюється, тим самим доведено, що величини S, δ і Δ не змінюються і при перенесенні початку координат.

Так як будь-яке перетворення координат зводиться до повороту координатних осей і до переносу початку координат, тим самим ми довели наступне.

Твердження 1.1 При будь-якому перетворенні прямокутних координат x, y числа S, δ і Δ не змінюються.

Це пояснює термін «інваріант» для чисел S, δ і Δ.

Розглянемо тепер число

$$K = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{33}(a_{11} + a_{22}) - a_{13}^2 - a_{23}^2.$$

При повороті осей координат воно переходить в число

$$K' = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{13} \\ a'_{31} & a_{\prime 33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix}.$$

Перевіримо,

$$\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{13} \\ a'_{31} & a_{\prime 33} \end{vmatrix} = (a_{33}a_{11} - a_{13}^2)cos^2\theta +$$
$$+2(a_{33}a_{12} - a_{13}a_{23})cos\theta sin\theta + (a_{33}a_{22} - a_{23}^2)sin^2\theta,$$

та, аналогічно

$$\begin{vmatrix} a'_{22} & a'_{23} \\ a_{\prime 32} & a_{\prime 33} \end{vmatrix} = (a_{33}a_{22} - a_{23}^2)cos^2\theta -$$
$$-2(a_{33}a_{12} - a_{13}a_{23})cos\theta sin\theta + (a_{33}a_{11} - a_{13}^2)sin^2\theta.$$

Тому

$$K' = (a_{33}a_{11} - a_{13}^2)(cos^2\theta + sin^2\theta) + (a_{33}a_{22} - a_{23}^2)(cos^2\theta sin^2\theta) =$$
$$= (a_{33}a_{11} - a_{13}^2) + (a_{33}a_{22} - a_{23}^2) = K.$$

При перенесенні початку координат в точку (x_0, y_0) число K переходить в число

$$K' = \begin{vmatrix} a_{11} & a'_{13} \\ a'_{31} & a_{\prime 33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a'_{23} \\ a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix},$$

що дорівнює

$$K + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(x_0^2 + y_0^2) + 2(a_{22}a_{13} - a_{12}a_{23})x_0 +$$
$$+2(a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13})y_0 =$$
$$= K + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ -2x_0 & -2y_0 & x_0^2 + y_0^2 \end{vmatrix}.$$

Таким чином, справедливо наступне твердження.

Твердження 1.2 При повороті координатних осей число K не змінюється, а при перенесенні початку координат в точку (x_0, y_0) до нього додається визначник

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ -2x_0 & -2y_0 & x_0^2 + y_0^2 \end{vmatrix}.$$

Визначення 1.2 Число K називається напів-інваріант рівняння (1.1).

Зауваження 1.2 Звернемо увагу на те, що при множенні рівняння на деяке число $k \neq 0$ інваріант S множиться на k, інваріант δ і напів-інваріант K

множаться на k^2, а інваріант δ множиться на k^3. Тому геометричний сенс може мати тільки рівність інваріантів S і Δ нулю (або знак їх добутку) і знак інваріанта δ і напів-інваріант K.

Згідно з пропозицією 1.1 інваріанти S, δ і Δ мають одні і ті ж значення як для вихідного рівняння (1.1), так і для відповідного приведеного рівняння

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} = 0, \tag{1.15}$$

де $a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0$,

$$a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0, \tag{1.16}$$

де $a_{22} \neq 0, a_{13} \neq 0$,

$$a_{22}y^2 + a_{33} = 0, \tag{1.17}$$

де $a_{22} \neq 0$.

Але для рівняння (1.15) ці інваріанти виражаються формулами

$$\begin{gathered} S = a_{11} + a_{22}, \\ \delta = a_{11}a_{22} \neq 0, \\ \Delta = \delta a_{33}. \end{gathered} \tag{1.18}$$

Для рівняння (1.16) – формули

$$\begin{gathered} S = a_{22} \neq 0, \\ \delta = 0, \\ \Delta = -a_{22}a_{13}^2 \neq 0. \end{gathered} \tag{1.19}$$

Та для рівняння (1.17) – формули

$$S = a_{22} \neq 0,$$
$$\delta = 0, \tag{1.20}$$
$$\Delta = 0.$$

Отже (користуємося принципом звернення), рівняння (1.1) тоді і тільки тоді належить типу I, коли $\delta \neq 0$.

Іншими словами, гіперболічні і еліптичні лінії характеризуються тим, що $\Delta \neq 0$, а параболічні – тим, що $\Delta = 0$.

Крім того, невироджені лінії (гіперболічні, еліптичні або параболічні) характеризуються тим, що $\Delta \neq 0$, а вироджені – тим, що $\Delta = 0$.

Таким чином, в таблиці 1.2 наведені типи ліній другого порядку.

Таблиця 1.2 – Типи ліній другого порядку

Тип	Інваріанти
I	$\delta \neq 0$
II	$\delta = 0, \Delta \neq 0$
III	$\delta = 0, \Delta = 0$

Зауваження 1.3 Таблиця 1.2, доводить коректність розподілу ліній другого порядку за типами, тобто факт, що одне і теж рівняння (1.1) не може бути приведено до рівнянь різних типів [7].

Щоб навчитися відрізняти по інваріантам гіперболічні лінії від еліптичних, розглянемо більш уважно перші два рівняння (1.18). Ці рівняння показують, що коефіцієнти a_{11} та a_{22} наведеного рівняння (1.15) є коренями квадратного рівняння.

$$\lambda^2 - S\lambda + \delta = 0. \tag{1.21}$$

Визначення 1.3 Рівняння (1.21) називається характеристичним рівнянням для рівняння (1.1).

За визначенням, еліптичні лінії характеризуються тим, що для них числа a_{11} і a_{22} мають один і той же знак, тобто тим, що їх добуток додатній. Але за формулами Вієта цей добуток дорівнює вільному члену δ характеристичного рівняння (28). Тому для еліптичних ліній $\delta > 0$.

Аналогічно доводиться, що для гіперболічних ліній $\delta < 0$.

Крім того, відповідно до третього з рівняння (1.18) коефіцієнт a_{33} в рівнянні (1.15) дорівнює $\frac{\Delta}{\delta}$. Тому наведене рівняння (1.15) може бути записано у вигляді

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0, \tag{1.22}$$

де λ_1, λ_2 – корені характеристичного рівняння (1.21).

Таким чином, при $\delta = 0$ ми можемо знайти рівняння, до якого приводиться рівняння (1.1), не роблячи приведення (тобто не знаходячи відповідної системи канонічних координат). Для цього достатньо обчислити інваріанти S, δ і Δ, скласти рівняння (1.21), знайти його корені λ_1, λ_2 і записати рівняння (1.22).

Відрізнити випадок уявного еліпса від дійсного, легко. При $\delta > 0$ знак коренів λ_1, λ_2 збігається, очевидно, зі знаком їх суми S. З іншого боку, рівняння (1.22) показує, що ми маємо уявний еліпс, коли знаки коренів збігаються зі знаком визначника Δ , і дійсний, коли ці знаки різні [17].

Остаточні результати для випадку $\delta \neq 0$, тобто випадки ліній типу I, зведені в таблиці 1.3.

Розглянемо параболічні лінії ($\delta = 0$). Невироджені лінії, тобто лінії, що зводяться до рівняння (1.19) (тип II), характеризуються умовами, $\delta = 0$ і $\Delta \neq 0$ (див. додаток А).

Таблиця 1.3 – Випадки ліній типу I

Лінія	Характеристика по інваріантам
1. Еліпс	$\delta > 0, \Delta \neq 0$
а) дійсний	$S\Delta < 0$
б) уявний	$S\Delta < 0$
2. Гіпербола	$\delta < 0, \Delta \neq 0$
3. Пара прямих, які перетинаються	$\Delta = 0$
а) дійсні	$\delta < 0$
б) уявних	$\delta > 0$

При цьому згідно формули (1.19) коефіцієнти a_{22} та a_{13} приведеного рівняння (1.16) виражаються формулами

$$a_{22} = S, a_{13} = \sqrt{-\frac{\Delta}{S}}.$$

Таким чином, приведене рівняння (1.16) може мати вид

$$Sy^2 + 2\sqrt{-\frac{\Delta}{S}x} = 0.$$

Отже, і для ліній типу II ми можемо записати приведене рівняння, не проводячи фактичного приведення.

Розглянемо лінії типу III, що зводяться до рівняння (1.20). Для цього скористаємося напів-інваріантом K.

Згадаємо, як здійснюється приведення рівняння (1.1) до найпростішого виду. У випадку рівняння (1.17) визначник (1.20) додає при перенесенні початку координат в точку (x_0, y_0) до напів-інваріанту K, має вид

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ -2x_0 & -2y_0 & x_0^2 + y_0^2 \end{vmatrix},$$

і тому дорівнює нулю. Звідси, якщо рівняння (1.1) приводиться до рівняння (1.17), то напів-інваріант K для обох рівнянь один і той же.

Але для рівняння (1.17) цей напів-інваріант K виражається формулою

$$K = \begin{vmatrix} a_{23} & 0 \\ 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{23}a_{33}.$$

Тому рівняння (1.17) може бути записане

$$Sy^2 + \frac{K}{S} = 0.$$

Звідси слідує, що при $K = 0$ ми маємо пару співпадаючих прямих, при $K > 0$ пару уявних паралельних прямих, при $K < 0$ – пару дійсних паралельних прямих. Остаточні результати проведеного дослідження ліній другого порядку підсумовано в додатку А [6].

В таблиці А.1 додатку А всі лінії другого порядку на евклідовій матеріально-комплексної площині розподілені на дев'ять класів. Належність лінії до того чи іншого класу визначається знаками інваріантів δ і $S\Delta$, фактом рівності або нерівності нулю інваріанта Δ і ($\delta = 0, \Delta = 0$) знаком напів-інваріанта K.

З отриманих результатів слідує, зокрема, що рівняння другого ступеня

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

тоді і тільки тоді є (в прямокутних координатах x, y):

а) рівнянням окружності (дійсного радіуса), коли

$$a_{11} = a_{22}, a_{12} = 0, a_{11}a_{33} < a_{13}^2 + a_{23}^2,$$

б) рівнянням рівнобедреної гіперболи, коли

$$a_{11} = -a_{22}, \Delta \neq 0,$$

в) рівнянням пари перпендикулярних прямих, коли

$$a_{11} = -a_{22}, \Delta = 0.$$

1.3 Афінні та метричні властивості ліній другого порядку

Афінні перетворення (на площині) складають підгрупу проективних, яка характеризується тим, що при афінних перетвореннях невласна пряма залишається невласною. Тому афінні властивості фігур характеризуються їх взаємовідносинами з невласною прямою. Виходячи з цього міркування, розглянемо афінні властивості ліній другого порядку з розгляду перетину їх з невласною прямою.

Нехай

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \quad (1.23)$$

рівняння лінії другого порядку в неоднорідних декартових координатах, x, y і нехай

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xt + 2a_{23}yt + a_{33}t = 0, \quad (1.24)$$

рівняння тієї ж лінії в однорідних декартових координатах.

Будемо вважати, що коефіцієнти $a_{11},\ a_{12},\ a_{22}$ не рівні нулю одночасно, бо в іншому випадку лінія, якщо обмежитися розглядом власних точок, не буде лінією другого порядку.

Знайдемо перетин лінії (1.24) з невласною прямою

$$t = 0, \tag{1.25}$$

тобто, знайдемо невласні точки даної лінії. Підставивши (1.25) в (1.24) отримаємо рівняння

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0, \tag{1.26}$$

яке визначає значення відношення $\frac{y}{x}$ (або $\frac{x}{y}$). Спершу вважатимемо, що $a_{22} \neq 0$; тоді ми не можемо отримати $x = 0$ (бо в іншому випадку ми б отримали також $y = 0$, а x, y, t не можуть бути рівними нулю одночасно) і тому можемо поділити рівняння (1.26) на x^2, що приведе до рівняння

$$a_{11} + 2a_{12}k + a_{22}k^2 = 0, \tag{1.27}$$

яке визначає значення кутових коефіцієнтів $k = \frac{y}{x}$ напрямків, в яких вилучені шукані невласні точки.

Характер коренів рівняння (1.27) залежить від знаку виразу $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$, яке є не що інше, як визначник δ.

Якщо $\delta > 0$, то рівняння (1.27) має два уявних сполучених кореня, і невласна пряма перетинає лінію в двох уявних точках; якщо $\delta < 0$, то рівняння має два дійсних кореня, і невласна пряма перетинає лінію в двох різних дійсних точках; якщо, $\delta = 0$, то рівняння має один подвійний корінь, і невласна пряма є дотичною до лінії. Легко перевірити, що доведення залишаються в силі і при $a_{22} = 0$.

У першому випадку ($\delta > 0$) ми будемо говорити, що лінія – еліптичного типу, у другому ($\delta < 0$), що вона гіперболічного типу, а в третьому ($\delta = 0$), що вона параболічного типу [18].

Лінія еліптичного типу, що не розпадається, називається еліпсом, лінія, що не розпадається, гіперболічного типу – гіперболою, лінія параболічного типу, що не розпадається – параболою.

Лінія другого порядку, що розпадається, характеризується рівністю $\Delta = 0$, де Δ – визначник, і таким чином ми отримуємо такі ознаки, що характеризують еліпс, гіперболу і параболу:

При $\Delta \neq 0, \delta > 0$ лінія – еліпс, при $\Delta \neq 0, \delta < 0$ – гіпербола, а при $\Delta \neq 0, \delta = 0$ – парабола.

Далі, при $\Delta = 0$ ми маємо лінію другого порядку, що розпадається або лінію еліптичного типу (при $\delta > 0$), або гіперболічного типу ($\delta < 0$), або параболічного ($\delta = 0$).

Далі побачимо, що в першому випадку лінія розпадається на дві уявні сполучені непаралельні прямі, у другому – на дві дійсні непаралельних прямі, а в третьому – на дві паралельні прямі.

Напрямки, в яких вилучені невласні точки даної лінії, називаються асимптотичними. Якщо $\text{Х}, \text{У}, 0$ – однорідні координати однієї з невласних точок лінії, то невласна точка віддалена в напрямку вектора $\text{Х}, \text{У}$; координати цього вектора задовольняють рівняння

$$\varphi(\text{Х}, \text{У}) = a_{11}\text{Х}^2 + 2a_{12}\text{ХУ} + a_{22}\text{У}^2 = 0, \tag{1.28}$$

зворотній напрямок, який задовольняє ці умови, буде асимптотичним.

Зробимо одне зауваження, що стосується ліній параболічного типу. Не порушуючи спільності, можна в цьому випадку вважати $a_{22} \neq 0$, (якщо $a_{22} = 0$, можна провести аналогічні міркування, помінявши місцями Х і У). При $a_{22} \neq 0$ необхідно $\text{Х} \neq 0$, і (1.28) можна переписати так:

$$a_{22}(\frac{У}{Х})^2 + 2a_{12}\frac{У}{Х} + a_{11} = 0,$$

розв'язуючи це рівняння, отримаємо (беручи до уваги, що $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$)

$$\frac{У}{Х} = -\frac{a_{12}}{a_{22}} = -\frac{a_{11}}{a_{12}},$$

звідки слідує

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}Х + a_{12}У = 0, \\ a_{12}Х + a_{22}У = 0. \end{array}\right\} \quad (1.29)$$

Отже, координати вектора асимптотичного напрямку для лінії параболічного типу задовольняють умовам (1.29); а отже, з (1.29) слідує, що $(Х, У)$ має асимптотичний напрямок. Дійсно, якщо помножимо рівняння (1.29) відповідно на x і на y і складемо, то отримаємо рівняння (1.27).

З (1.29) слідує, що якщо наша лінія є сукупність двох паралельних прямих, то асимптотичний напрямок $(Х, У)$ паралельний цим прямим.

Нехай (1.23) – рівняння даної лінії другого порядку в неоднорідних декартових координатах.

Складемо тепер рівняння, що визначає перетин лінії (1.23) з прямою Δ, яку представимо параметрично:

$$x = x_0 + ХS, y = y_0 + УS. \quad (1.30)$$

Нагадаємо, x_0, y_0 позначають координати деякої (довільно обраної) постійної точки M_0 прямій Δ, $(Х, У)$ – вектор напрямку цій прямої, а S – змінний параметр, геометричне значення якого наступне: якщо M – точка, що відповідає даному значенню S, то S є відношення вектора $\overrightarrow{M_0M}$ до вектору напрямку P (Х, У), тобто $\overrightarrow{M_0M} = S \cdot P$.

Щоб знайти точки перетину, підставимо в (1.23) замість x, y їх вирази (1.30). Результат підстановки можна відразу записати, якщо замість x, y взяти ХS, УS, а замість x', y' – відповідно x_0, y_0.

$$\varphi(\text{Х}, \text{У})S^2 + 2[\text{Х}F_1(x_0, y_0) + \text{У}F_2(x_0, y_0)]S + F(x_0, y_0) = 0, \qquad (1.31)$$

де застосовуються попередні позначення

$$\varphi(\text{Х}, \text{У}) = a_{11}\text{Х}^2 + 2a_{12}\text{ХУ} + a_{22}\text{У}^2,$$
$$F_1(x, y) = a_{11}x + a_{12}y + a_{13},\ F_2(x, y) = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}.$$

Рівняння (1.31) має два корені S_1, S_2, підстановка яких в (1.30) дає дві точки перетину: (x_1, y_1) та (x_2, y_2).

Якщо

$$\varphi(\text{Х}, \text{У}) = a_{11}\text{Х}^2 + 2a_{12}\text{ХУ} + a_{22}\text{У}^2 = 0,$$

то принаймні один з коренів дорівнює нескінченності і, отже, одна з точок перетину – невласна. Ми бачимо, що, як і слід було очікувати, дана пряма в цьому випадку має асимптотичний напрямок.

Задача 1.3 Знайти рівняння дотичної в точці (x_0, y_0) даної лінії другого порядку, виходячи безпосередньо з рівнянні (1.31).

Розв’язання. Вважаючи, що в рівнянні (1.31) x_0, y_0 – координати точки даної лінії, матимемо $F(x_0, y_0) = 0$. Рівняння (1.31) має, в цьому випадку, один з коренів $s = 0$. Виразивши, що і другий корінь дорівнює нулю, отримаємо

$$XF_1(x_0, y_0) + YF_2(x_0, y_0) = 0.$$

Замінюючи $X, У$ через пропорційні їм величини $x - x_0, y - y_0$, де x, y – координати довільної точки дотичної, отримаємо шукане рівняння

$$(x - x_0)F_1(x_0, y_0) + (y - y_0)F_2(x_0, y_0),$$

яке збігається з рівнянням дотичної

$$(x - x_0)\frac{dF(x_0, y_0)}{dx_0} + (y - y_0)\frac{dF(x_0, y_0)}{dy_0}.$$

Центром лінії другого порядку називається точка, що володіє тими ж властивостями, що і будь-яка хорда, що проходить через неї, ділиться нею навпіл. (Хордою ми називаємо відрізок прямої, що з'єднує дві будь-які точки лінії.) З'ясуємо, чи має дана лінія другого порядку центр, і знайдемо спосіб його визначення.

Нехай (x_0, y_0) – координати шуканого центру С. Проведемо через С (x_0, y_0), будь-яку пряму $x = x_0 + \mathrm{X}S, y = y_0 + УS$, що має неасимптотичний напрямок; ця пряма перетне нашу лінію в двох точках M_1 і M_2. Для того щоб точка С була серединою хорди M_1M_2, необхідна і достатня умова $S_1 = -S_2$, тобто $S_1 + S_2 = 0$, де S_1 та S_2 корені згаданого рівняння. А для цього, в свою чергу, необхідно і достатньо, щоб коефіцієнт при першому степені S в цьому рівнянні дорівнювали нулю, тобто, щоб

$$\mathrm{X}F_1(x_0, y_0) + УF_2(x_0, y_0) = 0. \qquad (1.32)$$

Якщо точка С – центр, то ця умова має бути дотримана при всіх напрямках січної прямої, тобто при всіх значеннях x і y. Отже, ми повинні мати

$$\left.\begin{aligned} F_1(x_0, y_0) = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0, \\ F_2(x_0, y_0) = a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (1.33)$$

Очевидно, що і навпаки, будь-яка точка C (x_0, y_0), координати якої задовольняють двом останнім рівнянням, буде центром.

Ми бачимо, що центр визначається перетином наступних двох прямих:

$$\left.\begin{aligned} F_1(x, y) = a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0, \\ F_2(x, y) = a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (1.34)$$

У випадку ліній еліптичного і гіперболічного типу визначник

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \delta \neq 0,$$

і наступні рівняння мають одне і тільки одне розв’язання.

Отже, лінії еліптичного і гіперболічного типів мають один цілком визначений центр.

У разі лінії параболічного типу $\delta = 0$ і прямі (1.34) паралельні. Якщо вони не збігаються, то центру, у певному розумінні, немає; проте, іноді, ми будемо говорити, що є один невласний центр – невласна точка перетину прямих (1.34). Якщо прямі (1.34) збігаються, то будь-яка їхня точка є центром; в цьому випадку є пряма центрів. В цьому випадку розглянута лінія другого порядку є сукупність двох паралельних прямих. Дійсно, якщо прямі (1.34) збігаються, то коефіцієнти їх рівнянь повинні бути пропорційними, а з цього слідує, що визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

дорівнює нулю (бо в ньому два перші рядки пропорційні). Значить, $\Delta = \delta = 0$, звідки і слідує наше твердження. І навпаки, якщо дана лінія – сукупність двох паралельних прямих, то прямі (1.34) збігаються [3].

З попереднього слідує, що парабола, як лінія, яка не розпадається, параболічного типу, не має центру або, краще, має один невласний центр; він віддалений, як легко бачити, в асимптотичному напрямку.

З’ясуємо ще питання: коли центр лінії другого порядку розташований на самій лінії (власний центр).

Якщо точка (x_0, y_0) знаходиться на лінії і якщо її координати одночасно задовольняють рівнянням (1.33), то лінія – розпадається і (x_0, y_0) є подвійна точка лінії. Отже, якщо центр знаходиться на самій лінії, то лінія – розпадається; центр в цьому випадку є подвійна точка лінії.

Важливо зауважити наступне: якщо початок координат знаходиться в центрі лінії другого порядку (або одному з центрів), то в її рівнянні відсутні члени першого ступеня. Дійсно, в цьому випадку рівняння (1.34) повинні задовольнятися значеннями $x = 0, y = 0$, звідки слідує, що $a_{13} = a_{23} = 0$. Рівняння лінії в цьому випадку має вид

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{23} = 0. \qquad (1.35)$$

І навпаки, очевидно, що лінія, яка представлена рівнянням виду (1.35) має центр (або один з центрів) на початку координат.

Надалі ми будемо називати центральними ті лінії, які мають один певний власний центр.

Задача 1.4 Знайти центр кривої

$$x^2 - xy + 3y^2 + x - 1 = 0.$$

Розв’язання. Прирівнюючи до нуля похідну лівої частини по x і по y отримаємо

$$2x - y + 1 = 0, -x + 6y = 0.$$

Після розв'язання цих рівнянь отримаємо

$$x = -\frac{6}{11}, y = -\frac{1}{11}.$$

Отже, крива має (єдиний) центр в точці $(-\frac{6}{11}, -\frac{1}{11})$.

Задача 1.5 Знайти центр лінії

$$x^2 + 2xy + y^2 + x + y - 5 = 0.$$

Розв'язання. В цьому випадку, визначати центр будуть

$$2x + 2y + 1 = 0.$$

Лінія має безліч центрів, а саме, всі точки прямої

$$2x + 2y + 1 = 0.$$

Задача 1.6 Знайти асимптоти лінії

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Відповідь. Прямі

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0,$$

та

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0,$$

тобто пара прямих, утворена рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

Розглянемо прямі, паралельні якомусь даному неасимптотичному напрямку.

Кожна з цих прямих перетинає дану лінію другого порядку в двох (дійсних чи уявних) точках M_1 і M_2 і визначає хорду M_1M_2. Геометричне місце середин цих хорд називається діаметром, поєднаних з даним напрямком. Отже, діаметр даної лінії другого порядку, пов'язаний з даним напрямком, є геометричне місце середин хорд, паралельних даному напрямку. Це поняття є безпосереднім узагальненням поняття діаметра кола, відомого з елементарної геометрії. А саме, якщо виходити з даного визначення, але обмежитися розглядом лише дійсних точок кола, то діаметром окружності, поєднаним заданим направленням, буде замкнута всередині кола частина прямої, що проходить через центр і перпендикулярна до даного напрямку. Якщо враховувати також уявні точки окружності, то під діаметром слід мати на увазі всю згадану пряму [16].

Знайдемо діаметр лінії другого порядку, пов'язаний з даним напрямком.

Нехай $P = (\text{Х}, \text{У})$ – вектор даного (неасимптотичного) напрямку. Нехай (x_0, y_0) – будь-яка точка шуканого діаметра. Знайдемо рівняння, якому повинні задовольняти координати цієї точки.

Пряма, що проходить через (x_0, y_0) і паралельна даному напрямку $(\text{Х}, \text{У})$, може бути представлена параметричним чином:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \text{Х}S, \\ y &= y_0 + \text{У}S. \end{aligned}\right\} \tag{1.36}$$

При попередніх позначеннях значення S_1, S_2, відповідні точкам перетину M_1 і M_2 прямої (1.36) з нашою лінією другого порядку.
Для того щоб точка (x_0, y_0) була серединою хорди M_1M_2, необхідною і достатньою умовою є $S_1 + S_2 = 0$. А для цього, необхідно і достатньо, щоб

$$\text{Х}F_1(x_0, y_0) + \text{У}F_2(x_0, y_0) = 0.$$

Ця остання рівність являє собою необхідну і достатню умову того, щоб точка (x_0, y_0) належала діаметру, поєднаному з напрямком $(\text{Х}, \text{У})$. Позначаючи x_0, y_0 просто через x, y, ми можемо переписати попереднє рівняння, що представляє собою рівняння шуканого діаметра, у вигляді

$$\text{Х}F_1(x, y) + \text{У}F_2(x, y) = 0, \tag{1.37}$$

або підставивши значення F_2, F_2,

$$X(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) + Y(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}) = 0. \tag{1.38}$$

Ми бачимо, що діаметр, поєднаний з даним напрямком, є пряма.

Діаметр, пов'язаний з напрямком $\text{Х} \neq 0, \text{У} \neq 0$ (напрямок осі $\text{О}x$), є пряма $F_1 = 0$, тобто

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0, \tag{1.39}$$

а діаметр, пов'язаний з напрямком осі $\text{О}y$ $(\text{Х} = 0, \text{У} \neq 0)$ – пряма $F_2 = 0$, тобто

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0. \tag{1.40}$$

Всі прямі (1.37) проходять через перетин прямих (1.39) та (1.40). Отже, всі діаметри проходять через центр (власний або невласний). Якщо є пряма центрів, то все діаметри співпадають з нею; якщо центр невласний, то всі діаметри паралельні між собою (проходять через одну і ту ж невласну точку).

Пряма (1.37) не може бути невласною або невизначеною, якщо, напрямок (X, У) неасимптотичний.

Дійсно, рівняння (1.38) можна переписати так:

$$ax + by + c = 0, \tag{1.41}$$

де $a = a_{11}X + a_{21}Y, b = a_{12}X + a_{22}Y, c = \ a_{13}X + a_{23}Y$.

Якщо $a = b = 0$, то лінія параболічного типу і напрямок (X, Y) асимптотичний. Зокрема, для неасимптотичного напрямку (X, Y) пряма (1.37) завжди власна і визначена.

Досі ми вважали, що напрямок $(X, У)$ неасимптотичний. Відкинемо тепер цю умову і будемо називати діаметром, поєднаний з напрямком $(X, У)$, пряму (1.37), які б не були $X, У$ (нерівні одночасно нулю). Якщо $(X, У)$ – неасимптотичний напрямок, то ми отримуємо діаметр в звичайному сенсі слова. Якщо ж $(X, У)$ – асимптотичний напрямок, то рівняння (1.37) перетвориться в рівняння асимптоти. Таким чином, асимптоту можна назвати самоспряженим діаметром.

Рівняння (1.41) може виявитися невизначеним, якщо $a = b = c = 0$. В цьому випадку наша лінія другого порядку – сукупність двох паралельних прямих і $(X, У)$ – напрям, паралельний цим прямим. У цьому випадку «діаметром», поєднаний з асимптотичним напрямком, може вважатися будь-яка пряма.

Взагалі у всіх випадках будь-яка пряма, що проходить через центр (або один з центрів), може бути названа діаметром. Наприклад, в разі пари паралельних прямих всяка пряма перетинає пряму центрів (у власній або невласній точці) і тому може вважатися діаметром [15].

Задача 1.7 Встановити, що дане рівняння визначає гіперболу, знайти координати центра, піввісі, ексцентриситет та рівняння асимптот:

$$5x^2 - 9y^2 - 20x + 9y - \frac{109}{4} = 0.$$

Розв'язок. Виконаємо перетворення, виділяючи повні квадрати:

$$5x^2 - 20x = 5(x^2 - 4x) = 5[(x-2)^2 - 4] = 5(x-2)^2 - 20;$$
$$-9y^2 + 9y = -9(y^2 - y) = -9\left[\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] = -9\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}.$$

Підставляючи це у дане рівняння одержуємо:

$$5(x-2)^2 - 20 - 9\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} - \frac{109}{4} = 0,$$

або

$$5(x-2)^2 - 9\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 45.$$

Поділивши обидві частини на 45, одержимо

$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2}{5} = 1.$$

Маємо рівняння гіперболи із зміщеним центром. Останній має координати $A(2;\frac{1}{2})$, піввісі гіперболи є $a = 3, b = \sqrt{5}$, ексцентриситет дорівнює:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{\sqrt{9+5}}{3} = 1{,}266.$$

Рівняння асимптот:

$$y = \pm\frac{5}{4}x;\ \pm\frac{\sqrt{5}}{4}x.$$

Задача 1.8 Задано рівняння лінії другого порядку $4x^2 - 5y^2 + 20 = 0$. Визначити вид кривої, знайти її фокуси, півосі, ексцентриситет, рівняння директрис і асимптот (для гіперболи). Побудувати графік.

Розв’язання. Дане рівняння зводиться до канонічного вигляду

$$\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = -1,$$

або

$$-\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Це спряжена гіпербола з дійсною піввіссю $b = 2$, яка лежить на осі Oy, і уявною $a = 5$ на осі Ox. Половину фокусної відстані c знайдемо з умови

$$c^2 = a^2 + b^2 = 9, c = 3.$$

Фокуси F_1 і F_2 лежать на осі Oy і мають відповідно координати $(0; -3)$ і $(0; 3)$. Ексцентриситет: $e = \frac{c}{b} = 1{,}5$. Рівняння директрис: $y = \pm\frac{b}{e}$, або $y = \pm 4/3$. Рівняння асимптот: $y = \pm\frac{b}{a}x$, або $y = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}x$. Графік гіперболи наведено на рисунку 1.5

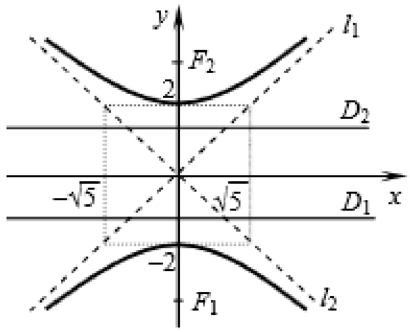

Рисунок 1.5

Отже, в даному розділі, ми з’ясували, що на відміну від лінійних геометричних об'єктів прямої і площини, які задаються многочленами першого ступеня, криві другого порядку описуються многочленами від двох змінних другого ступеня. Дізналися, що такі лінії другого порядку, як еліпс, гіпербола та парабола називають також, конічними перерізами. Основою для такої назви є те, що дані лінії можна одержати, перетинаючи круговий конус площинами, які не проходять через вершину конуса. Було розкрито поняття кривої другого порядку (загальне рівняння); розібрані приклади приведення рівняння кривої до канонічного виду з усіма супутніми арифметичними викладками. В результаті ознайомилися з такими важливими геометричними об'єктами на площині, як криві другого порядку, що задовольняють рівняння (1.1), засвоїли поняття кривої другого порядку, розглянули всі типи ліній, які визначаються цим рівнянням та вивчили їх класифікацію.

2 ПРОЕКТИВНІ ВЛАСТИВОСТІ КОНІК

2.1 Проективні перетворення та його інваріанти

Під проективним перетворенням мають на увазі перетворення площини, що зберігає прямі. При цьому паралельність прямих може порушуватися. Але, якщо мова йде про звичайну площину, то збереження паралельності є наслідком взаємно однозначного перетворення. Тому при вивченні проективних перетворень до площини додається, так звана, нескінченно віддалена пряма. Точки цієї прямої, які також нескінченно віддалені, вважаються точками перетину паралельних прямих, причому кожна нескінченно віддалена точка вважається точкою, що належить всім прямим певного напряму. Поповнена таким чином площина називається проективною площиною [12].

Визначення 2.1 Проективним перетворенням проективної площини називається таке точкове відображення проективної площини на себе, яке будь-яку проективну пряму переводить в пряму.

Відому нам з аналітичної геометрії афінну геометрію можна розглядати як частинний випадок проективної геометрії, тому що група афінних перетворень є підгрупою групи проективних перетворень [20].

Будь-яке проективне перетворення можна представити як композицію центральної проекції і руху простору, яке поєднує площину проекції з вихідною. Отже, проективне перетворення можна представити у вигляді композиції двох, перше з яких перетворить коніку в коло. Після другого це коло може перейти тільки в коніку. Звідси видно, що проективні перетворення є найпотужнішим інструментом для роботи з коніками.

Зауважимо, що гіпербола перетинає нескінченно віддалену пряму в двох точках. Ці точки задають напрямки, паралельні асимптотам цієї гіперболи. Парабола дотикається нескінченно віддаленої прямої в точці, яка задає напрям, паралельний осі цієї параболи. Ну а еліпс взагалі не перетинає нескінченно віддалену пряму [9].

Теорема 2.1 (про завдання проективного перетворення площини). Якщо A, B, C, D – будь-які чотири точки загального положення на проективній площині, і A', B', C', D' – будь-які інші чотири точки загального положення, то існує єдине проективне перетворення площини, яке точки A, B, C, D переводить у точки A', B', C', D' відповідно.

Проективне перетворення задається формулами

$$\begin{aligned} \rho x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ \rho x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ \rho x_3' &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3, \end{aligned} \tag{2.1}$$

де x_1, x_2, x_3 – координати довільної точки X проективної площини, а x_1', x_2', x_3' – координати її образа при цьому перетворенні.

Якщо визначник матриці

$$\left(a_{ij}\right) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

перетворення не дорівнює нулю, то перетворення називається невиродженим.

Визначення 2.2 Дві фігури називаються проективно-еквівалентними, якщо існує хоча б одне проективне перетворення, яке одну з цих фігур відображає на іншу.

Визначення 2.3 Нерухомою точкою (прямою) проективного перетворення називається така точка (пряма) проективної площини, образ якої співпадає з самою точкою (прямою). Якщо кожна точка нерухомої прямої є нерухомою точкою, то така пряма називається прямою нерухомих точок.

Координати нерухомої точки проективного перетворення знаходяться із системи рівнянь

$$\begin{cases}(a_{11}-\rho)x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0,\\ a_{21}x_1+(a_{22}-\rho)+a_{23}x_3=0,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+(a_{33}-\rho)=0,\end{cases}$$

де ρ є коренем так званого характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix}a_{11}-\rho & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22}-\rho & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\rho\end{vmatrix}=0.$$

Зауважимо, що характеристичне рівняння завжди має хоча б один дійсний корінь, а значить будь-яке проективне перетворення має хоча б одну нерухому точку. Можна довести, що будь-яке проективне перетворення має хоча б одну нерухому пряму.

Теорема 2.2 Множина всіх проективних перетворень проективної площини утворює групу, яка називається проективною групою.

Визначення 2.4 Інваріантом групи перетворень називається таке число або така властивість фігури, які не змінюються під дією будь-якого перетворення з цієї групи. Фігура, яка під дією перетворень з деякої групи перетворюється у фігуру з того ж класу, що і дана фігура, називається інваріантною фігурою [20].

Задача 2.1 Знайти формули проективного перетворення площини, яке точки $(1:0:0),(0:1:0),(0:0:1),(1:1:1)$ переводить відповідно в точки $(2:4:8),\ (2:-1:2),(3:2:5),(2:5:7)$.

Розв'язання. Знайти проективне перетворення означає знайти значення коефіцієнтів в формулах (2.1). Позначимо задані точки символами A,B,C,D, а їхні образи – символами A',B',C',D'. Після підстановки координат точок A і A' в формули (2.1) проективного перетворення отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases}\rho_1 \cdot 2 = a_{11} \cdot 1,\\ \rho_1 \cdot 4 = a_{21} \cdot 1,\\ \rho_1 \cdot 8 = a_{31} \cdot 1.\end{cases}$$

Аналогічно записуються ще три системи рівнянь для трьох інших пар відповідних точок:

$$\begin{cases}\rho_2 \cdot 2 = a_{12} \cdot 1,\\ \rho_2 \cdot (-1) = a_{22} \cdot 1,\\ \rho_2 \cdot 2 = a_{32} \cdot 1,\end{cases} \quad \begin{cases}\rho_3 \cdot 3 = a_{13} \cdot 1,\\ \rho_3 \cdot 2 = a_{23} \cdot 1,\\ \rho_3 \cdot 5 = a_{33} \cdot 1,\end{cases}$$

та

$$\begin{cases}\rho_4 \cdot 2 = a_{11} \cdot 1 + a_{12} \cdot 1 + a_{13} \cdot 1,\\ \rho_4 \cdot 5 = a_{21} \cdot 1 + a_{22} \cdot 1 + a_{23} \cdot 1,\\ \rho_4 \cdot 7 = a_{31} \cdot 1 + a_{32} \cdot 1 + a_{33} \cdot 1.\end{cases}$$

З перших трьох систем знайдемо невідомі a_{ij} через ρ_1, ρ_2, ρ_3 і підставимо в четверту систему та отримаємо

$$\begin{cases}2\rho_4 = 2\rho_1 + 2\rho_2 + 3\rho_3,\\ 5\rho_4 = 4\rho_1 - \rho_2 + 2\rho_3,\\ 7\rho_4 = 8\rho_1 + 2\rho_2 + 5\rho_3.\end{cases}$$

Розглянемо останню систему рівнянь відносно невідомих ρ_1, ρ_2, ρ_3, тоді

$$\rho_1 = \frac{\begin{vmatrix}2\rho_4 & 2 & 3\\ 5\rho_4 & -1 & 2\\ 7\rho_4 & 2 & 5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 2 & 3\\ 4 & -1 & 2\\ 8 & 2 & 5\end{vmatrix}} = \frac{1}{2}\rho_4, \quad \rho_2 = \frac{\begin{vmatrix}2 & 2\rho_4 & 3\\ 4 & 5\rho_4 & 2\\ 8 & 7\rho_4 & 5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 2 & 3\\ 4 & -1 & 2\\ 8 & 2 & 5\end{vmatrix}} = -\rho_4,$$

$$\rho_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2\rho_4 \\ 4 & -1 & 5\rho_4 \\ 8 & 2 & 7\rho_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 8 & 2 & 5 \end{vmatrix}} = \rho_4,$$

а отже для коефіцієнтів a_{ij} з формул проективного перетворення маємо: $a_{11} = \rho_4, a_{21} = 2\rho_4, a_{31} = 4\rho_4, a_{12} = -2\rho_4, a_{22} = \rho_4, a_{32} = -2\rho_4, a_{13} = 3\rho_4, a_{23} = 2\rho_4, a_{33} = 5\rho_4$. Залишилось підставити їх в формули (2.1). Отримаємо

$$\begin{aligned} \rho x_1' &= \rho_4 x_1 - 2\rho_4 x_2 + 3\rho_4 x_3, \\ \rho x_2' &= 2\rho_4 x_1 + \rho_4 x_2 + 2\rho_4 x_3, \\ \rho x_3' &= 4\rho_4 x_1 - 2\rho_4 x_2 + 5\rho_4 x_3. \end{aligned}$$

Введемо позначення $\tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_4}$ і запишемо остаточну відповідь:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} x_1' &= x_1 - 2x_2 + 3x_3, \\ \tilde{\rho} x_2' &= 2x_1 + x_2 + 2x_3, \\ \tilde{\rho} x_3' &= 4x_1 - 2x_2 + 5x_3. \end{aligned}$$

Задача 2.2 Якщо при проективному перетворенні три точки деякої прямої інваріантні, то будь-яка точка цієї прямої інваріантна при цьому перетворенні, тобто ця пряма є прямою інваріантних точок.

Розв’язання. Нехай точки A, B, C прямої інваріантні, а точка M відображається на точку M'. Нехай $(ABCM) = a$. За властивістю проективного перетворення $(ABCM) = (ABCM') = a$, а за властивістю подвійного відношення $M = M'$, тобто точка M прямої теж інваріантна.

2.2 Подвійне відношення чотирьох точок прямої

Проективні перетворення зберігають подвійні відношення точок на прямій. Це означає, що якщо точки A, B, C, D, що лежать на одній прямій, переходять у точки A', B', C', D', то

$$(AB; CD) = \frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC} = (A'B'; C'D').$$

Відзначимо, що довжини відрізків беруться зі знаками.

Доведемо це. Як було зазначено вище, будь-яке проективне перетворення можна вважати центральною проекцією відносно якоїсь точки. Нехай центром цієї проекції буде точка P (див. рис. 2.1).

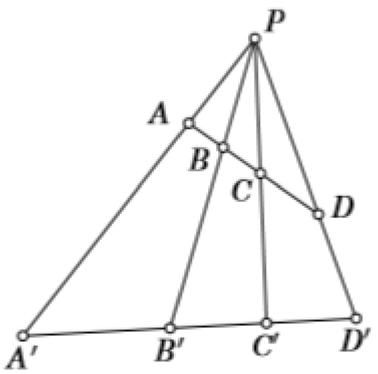

Рисунок 2.1

Тоді

$$\frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC} = \frac{S_{\Delta ACP} \cdot S_{\Delta BDP}}{S_{\Delta ADP} \cdot S_{\Delta BCP}},$$

оскільки площа кожного з цих трикутників дорівнює половині добутку довжин розглянутих відрізків на відстань від точки P до прямої, на якій всі ці точки лежать. З іншого боку, площа кожного трикутника дорівнює половині добутку сторін на синус кута між ними (для зручності позначимо кут між PA і PB через α, між PB і PC через β, а між PC і PD – через γ). Тому

$$\frac{S_{\Delta ACP} \cdot S_{\Delta BDP}}{S_{\Delta ADP} \cdot S_{\Delta BCP}} = \frac{(AP \cdot CP \cdot \sin(\alpha+\beta) \cdot (BP \cdot DP \cdot \sin(\beta+\gamma))}{(AP \cdot DP \cdot \sin(\alpha+\beta+\gamma)) \cdot (BP \cdot CP \cdot sin\beta)} =$$
$$= \frac{\sin(\alpha+\beta) \cdot \sin(\beta+\gamma)}{\sin(\alpha+\beta+\gamma) \cdot sin\beta}.$$

Оскільки це відношення не залежить від того, на якій прямій лежать наші точки, ми отримуємо

$$(A'B'; C'D') = \frac{\sin(\alpha+\beta) \cdot \sin(\beta+\gamma)}{\sin(\alpha+\beta+\gamma) \cdot sin\beta} = (AB; CD).$$

Ця властивість дозволяє визначити подвійне відношення чотирьох прямих, що проходять через одну точку, як подвійне відношення точок їх перетину з довільною прямою. Очевидно, що ця властивість, також зберігається при проективних перетвореннях.

Зі збереження подвійного відношення слідує, що якщо відомі образи трьох точок прямої, то образи інших її точок визначаються однозначно. Зокрема, проективне перетворення, що залишає три точки прямої нерухомими, залишає нерухомою всю пряму [5].

Проективна еквівалентність конік означає, що всі властивості кола, залишаються вірними і для конік. Зокрема, для чотирьох точок коніки A, B, C, D подвійне відношення прямих XA, XB, XC, XD не залежить від вибору точки X на коніке. Це відношення називається подвійним відношенням точок A, B, C, D. Очевидно, що при проективних перетвореннях подвійні відношення зберігаються.

Зафіксуємо деяку точку P коніки і пряму l, яка не проходить через неї. Кожній точці X коніки поставимо у відповідність точку X' перетину прямої PX

з l. Очевидно, ця відповідність взаємно однозначно і зберігає подвійні відношення. Якщо тепер стандартним чином встановити відповідність між точками прямої l і дійсними числами, то отримаємо параметризацію коніки.

Неважко переконатися, що при такій параметризації координати точки X є раціональними функціями параметра [2].

Теорема 2.3 Подвійне відношення чотирьох точок прямої не змінюється при проективних перетвореннях проективної площини, тобто подвійне відношення чотирьох точок прямої є інваріантом проективної групи перетворень.

В кінці XIX ст. німецький математик Фелікс Клейн запропонував класифікувати геометрії в залежності від груп перетворень. З цієї точки зору, яку з часів Клейна називають груповою точкою зору на геометрію, кожна група перетворень породжує геометрію як теорію інваріантів цієї групи. Згідно цієї точки зору проективна геометрія є теорією інваріантів проективної групи перетворень. Подвійне відношення чотирьох точок прямої є основним проективним інваріантом. Серед властивостей кривих другого порядку на проективній площині теж є проективні інваріанти. Наприклад, ранг лінії другого порядку є проективним інваріантом. Оскільки проективні перетворення є невиродженими лінійними перетвореннями, то з лінійної алгебри випливає, що за допомогою проективних перетворень рівняння кривої другого порядку можна звести до нормального вигляду, а отже отримаємо 5 класів кривих:

а) $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ – дійсний овал;

б) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ – уявний овал;

в) $x_1^2 - x_2^2 = 0$ – пара дійсних різних прямих;

г) $x_1^2 + x_2^2 = 0$ – пара уявних прямих, які перетинаються в уявній точці;

д) $x_1^2 = 0$ – пара дійсних прямих, які співпадають.

Будь-які дві криві з одного класу проективно-еквівалентні, а будь-які дві криві з різних класів проективно-нееквівалентні [20].

Задача 2.3 Нехай прямі a, b, c, d перетинаються в точці O і перетинають пряму l в точках A, B, C, D відповідно. Довести, що $(a, b;\ c, d) = \ (AB, CD)$.

Розв'язання. Нехай відстань від точки O до прямої l дорівнює h. Обчислимо площу трикутника OAC двома способами:

$$S_{\triangle OAC} = \frac{1}{2}AC \cdot h = \frac{1}{2}OA \cdot OC sin\angle(a, c).$$

Звідси $sin\angle(a, c) = \frac{AC \cdot h}{OA \cdot OC}$ та аналогічно

$$sin\angle(b, c) = \frac{BC \cdot h}{OB \cdot OC}, sin\angle(a, d) = \frac{AD \cdot h}{OA \cdot OD}, sin\angle(b, d) = \frac{BD \cdot h}{OB \cdot OD}.$$

Таким чином,

$$|(a, b; c, d)| = \left|\frac{sin\angle(a, c) sin\angle(b, d)}{sin\angle(b, c) sin\angle(a, d)}\right| = \left|\frac{AC \cdot BD \cdot h^2 \cdot OA \cdot OB \cdot OC \cdot OD}{BC \cdot AD \cdot h^2 \cdot OA \cdot OB \cdot OC \cdot OD}\right| =$$
$$= |(AB, CD)|.$$

Задача 2.4 Нехай прямі a, b, c, d перетинаються в точці O, а прямі a_1, b_1, c_1, d_1 в точці O_1 причому $(a, b, c, d) = (a_1, b_1, c_1, d_1)$. Довести, що якщо точки перетину прямих a і a_1, b і b_1, c і c_1належать прямій m то точка перетину прямих d і d_1також належать цій прямій.

Розв'язання. Позначимо A, B, C точки перетину прямих a і a_1, b і b_1, c і c_1, які належать прямій m. Нехай прямі d і d_1 перетинають пряму m у точках D та D_1відповідно. Тоді $(AB, CD) = (a, b; c, d) = (a_1, b_1; c_1, d_1) = (AB, CD_1)$, а отже $D = \ D_1$ точка перетину прямих d і d_1.

2.3 Теореми Паскаля і Бріаншона

Теорема (Паскаля). Якщо шестикутник є вписаним у криву другого порядку, то точки перетину протилежних сторін шестикутника належать одній прямій. Протилежними вважаються будь-які дві сторони шестикутника, які розділені двома його сторонами.

Доведення. Нехай дано вписаний шестикутник $ABCDEF$. Переведемо проективним перетворенням на нескінченність точки перетину пар прямих AB і DE, а також BC і EF. Отримаємо, що $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$; треба довести, що $CD \parallel FA$. Але це зовсім не складно. В силу паралельності кути ABC і DEF рівні. А значить, рівні дуги AC і DF. Але це, очевидно, і означає паралельність прямих AF і CD (див. рис. 2.2).

Теорема (Бріаншона). В довільному шестикутнику, описаному навколо кривої другого порядку, прямі, які з'єднують протилежні вершини шестикутника, перетинаються в одній точці.

Доведення. Переведемо точку перетину двох діагоналей в центр. Нам треба довести, що і третя діагональ проходить через центр кола.

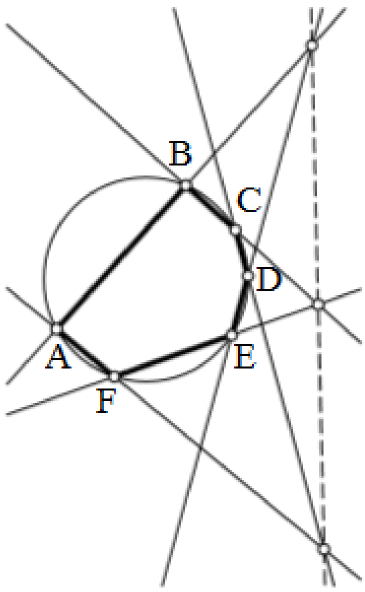

Рисунок 2.2

Отже, нехай шестикутник $ABCDEF$ описаний навколо кола з центром в точці O і діагоналі AD і BE проходять через O (див. рис. 2.3).

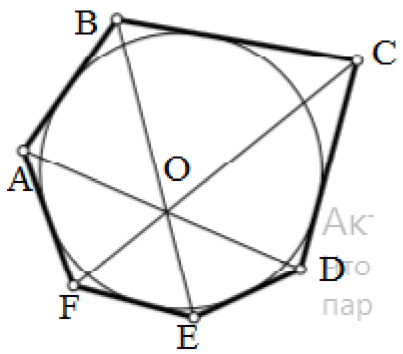

Рисунок 2.3

Позначимо точки дотику кола зі сторонами AB, $BC, \dots, FA$ через A_1, $B_1, \dots, F_1$ відповідно. Зрозуміло, що $\angle E_1OC_1 = \angle F_1OB_1 = 2\angle AOB$, а також що $\angle E_1OF = \angle FOF_1$ і $\angle B_1OC = \angle COC_1$. А значить,

$$\angle FOF_1 + \angle F_1OB_1 + \angle B_1OC = \angle E_1OF + \angle E_1OC_1 + \angle COC_1 = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ.$$

Отже, точки F, O і C лежать на одній прямій.

Теорему Бріаншона можна застосовувати до п’ятикутника, чотирикутника, трикутника, якщо вважати їх виродженими шестикутниками. Тоді, вершина, що є точкою перетину суміжних сторін, які співпали, буде точкою дотикання.

При доведенні теореми Паскаля ми користувалися тим, що відповідна пряма не перетинає наше коло, а при доведенні теореми Бріаншона – що точка перетину діагоналей лежить всередині кола. Насправді ці дві теореми вірні в будь-якому випадку, тобто точки і прямі в цих теоремах можуть йти в якому завгодно порядку.

Відзначимо, що це чисто проективні теореми, тому вони стосуються і конік.

Обернена теорема Паскаля. Нехай дано такі точки $X_i, i = 1, \ldots, 6,$ що точки перетину прямих X_1X_2 і X_4X_5, X_2X_3 і X_5X_6, X_3X_4 і X_6X_1 лежать на одній прямій. Тоді існує коника, що проходить через всі точки X_i.

Доведення. Скористаємося тим фактом, що через будь-які п'ять точок загального розміщення проходить єдина коника. Побудуємо таку коніку α для точок $X_i, i = 1, \dots ,5$. Нехай A, B, C – точки перетину прямих X_1X_2 і X_4X_5, X_2X_3 і X_5X_6, X_3X_4 і X_6X_1, Y – точка перетину α і BX_5, відмінна від X_5. По теоремі Паскаля точка перетину прямих X_3X_4 і X_1Y лежить на AB, тобто збігається з C. Значить, Y збігається з X_6.

Якщо вважати деякі вершини шестикутника такими, що співпали по 2, то можна отримати п’ятикутник, чотирикутник, трикутник. Теорема Паскаля залишається при цьому справедливою. Потрібно лише враховувати, що сторона (пряма), яка проходить через вершини, які співпали, є дотичною до кривої. Тому зміниться лише формулювання теореми Паскаля.

Обернена теорема Бріаншона. Якщо прямі, які з’єднують протилежні вершини шестикутника, перетинаються в одній точці, то цей шестикутних є описаним навколо деякої кривої другого порядку.

Доводиться ця теорема аналогічно попередній. Однак треба спочатку показати, що існує єдина коніка, що стосується п’яти заданих прямих. Ми можемо за допомогою теореми Бріаншона побудувати точки дотику цих прямих з конікой. Ну а через п'ять точок проходить тільки одна коника (див. рис. 2.4).

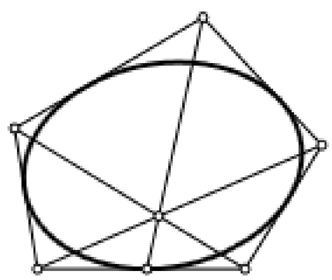

Рисунок 2.4 – Побудова точки дотику

Задача 2.5 Дано шість точок овальної кривої другого порядку. Скільки існує прямих Паскаля для шестикутника, вершинами якого є дані точки?

Розв'язання. Позначимо вершини шестикутника їх порядковим номером, тобто символами $1, 2, 3. 4, 5, 6$. Очевидно, від порядку запису вершин залежить те, які сторони ми будемо вважати протилежними. Всі можливі перестановки в цій множині дорівнюють числу 6!, але всі кругові перестановки однієї і тієї ж перестановки дають один і той же набір пар протилежних сторін, а значить і одну і ту ж пряму Паскаля. Для кожної перестановки можна отримати ще 5 за допомогою кругової перестановки елементів. Крім того, кожні дві шестірки a, b, c, d, e, f і $b, a, f, e, d,$ с дають один і той же набір пар протилежних сторін, але не можуть бути отримані одна із другої за допомогою кругової перестановки елементів. Загальне число N прямих Паскаля для даних шести точок кривої другого порядку дорівнює $6!: 6: 2$, тобто $N = 60$ [13].

Задача 2.6 Дано п'ять точок конічного перерізу і пряму, яка проходить через одну з них. Побудувати другу точку перетину заданої прямої з конічним перерізом.

Побудова. Нехай дана пряма a проходить через точку A (див. рис. 2.5). Треба визначити точку перетину цієї прямої з конічним перерізом, заданим точками A, B, C, D, E.

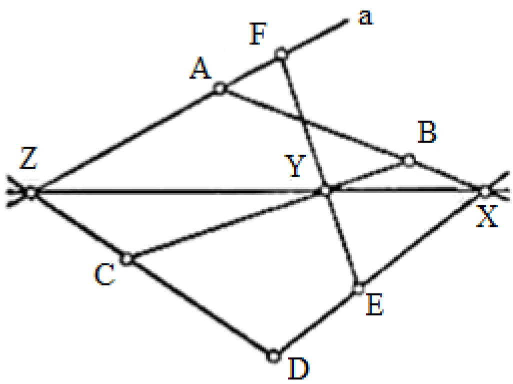

Рисунок 2.5

Якщо F – шукана точка, то $ABCDEF$ – шестикутник Паскаля. Дві пари його протилежних сторін (AB) і (DE), (CD) і a нам відомі. Отже, точки $X = (AB) \cap (DE)$, $Z = (CD) \cap a$ визначають пряму Паскаля (XZ). На цій прямій повинна лежати і точка перетину сторін (CB) і (EF). Знаходимо Y, як перетин (CB) з (XZ). Тоді $F = (EY) \cap a$.

Задача 2.7 Довести, що будь-якому шестикутнику Паскаля відповідає певна дезаргова конфігурація.

Доведення. Нехай $ABCDEF$ – довільний шестикутник Паскаля. Припустимо, що сторони цього шестикутника, взяті через одну, продовжено до їхнього взаємного перетину. Тоді сторони (AB), (CD), (EF) утворюють трикутник MNS, а сторони (BC), (DE) і (FA) – трикутник $M_1N_1S_1$. Відповідні сторони цих двох трикутників перетинаються в точках P, Q і R, що лежать на одній прямій, а саме – прямій Паскаля. Справді, вказані сторони трикутників є одночасно і протилежні сторони вписаного шестикутника $ABCDEF$. Тоді, за теоремою Дезарга трикутники MNS і $M_1N_1S_1$ гомологічні. Центр гомології S_0 цих трикутників лежить на перетині прямих (MM_1), (NN_1) і (SS_1), що сполучають відповідні вершини.

2.4 Полярна відповідність

Визначення 2.5 Полярна відповідність щодо кола з центром O і радіусом r ставить у відповідність кожній точці площини A, відмінною від O, пряму a, перпендикулярну OA і перетинає промінь OA в точці, інверсної точці A відносно цього кола. Пряма a називається полярою точки A, а точка A – полюсом прямої a. Полярою точки O вважається нескінченно віддалена пряма, а полярою нескінченно віддаленої точки – діаметр, перпендикулярний паралельним прямим, що проходять через неї.

Відзначимо важливі властивості полярної відповідності.

а) якщо точка B лежить на полярі a точки A, то її поляра b проходить через A.

Доведення. Нехай точки A' і B' інверсні точкам A і B щодо нашого кола. Тоді трикутник $OA'B$, очевидно, подібний трикутнику $OB'A$, а значить, кут $AB'O$ прямий, тобто A лежить на b (див. рис. 2.6).

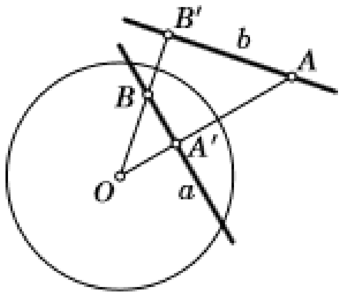

Рисунок 2.6

Звідси слідує, що полюс будь-якої прямої є перетином полярності всіх її точок, і навпаки, поляра точки є геометричним місцем полюсів всіх, хто проходить через цю точку прямих.

б) поляра точки A, що лежить поза колом, буде пряма, що з'єднує точки дотику кола з дотичними, проведеними до неї з A (точки дотику є полюсами дотичних). Звідси слідує, що, незважаючи на метричне визначення, полярна відповідність є проективним поняттям, тобто якщо проективне перетворення зберігає це коло і переводить точку A в A', то поляра a точки A переходить в поляру a' точки A'. Це дозволяє сформулювати наступний результат.

Принцип двоїстості. Нехай доведено деяке проективне твердження. Тоді вірним також буде твердження, отримане з доведеного взаємною заміною наступних термінів: (точка) ↔ (пряма), (лежати на прямій) ↔ (проходити через точку), (лежати на колі) ↔ (належати колу). Прикладами тверджень, які утворюються одна з одної за принципом двоїстості, є теореми Паскаля і Бріаншона, пряме і зворотне твердження теореми Дезарга і ін.

в) пряма, що з'єднує точки перетину протилежних сторін вписаного (описаного) чотирикутника, є полярою точки перетину його діагоналей.

г) подвійне відношення чотирьох точок прямої рівне подвійному відношенню їх поляр.

Доведення. Нехай це точки A, B, C і D. Тоді подвійне відношення цієї четвірки точок рівне подвійному відношенню прямих OA, OB, OC і OD, яке в свою чергу так само рівне подвійному відношенню прямих OA', OB', OC' і OD', де A', B', C', D' – проекції точки O на поляри точок A, B, C, D відповідно. Нехай P – це полюс прямої АВ. Тоді точки A', B', C', D', O і P лежать на одному колі (з діаметром OP). А значить, $(PA', PB';\ PC', PD') = (OA', OB';\ OC', OD') = (A, B;\ C, D)$. Але PA', PB', PC' і PD' і є поляри точок A, B, C і D.

Нехай дано деяку коніку і точку A. Розглянемо довільне проективне перетворення, що переводить дану коніку в коло. Нехай A' – образ точки A при цьому перетворенні, a' – поляра точки A щодо окружності, a – образ прямої a' при зворотному перетворенні. Тоді пряма a може бути побудована наступним чином. Проведемо через точку A дві прямі, які перетинають дану коніку в точках X_1, X_2 і Y_1, Y_2. Нехай X – точка перетину дотичних до коніки в точках X_1, X_2, Y – точка перетину дотичних в точках Y_1, Y_2. Тоді пряма XY збігається з a (див. рис. 2.7).

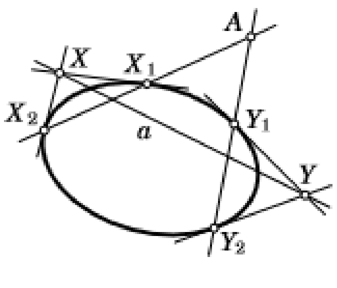

Рисунок 2.7

Дійсно, при застосуванні описаної побудови до точки A' і коло отримуємо пряму a', а проективне перетворення зберігає точки перетину і дотичної прямих і коник. Отже, пряма a не залежить від обраного проективного перетворення. Можна побудувати a і по-іншому: як пряму, що сполучає точки перетину X_1Y_1 з X_2Y_2 і X_1Y_2 з X_2Y_1 (див. рис. 2.8).

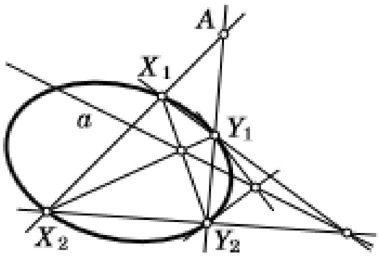

Рисунок 2.8

Зокрема, якщо A – центр еліпса або гіперболи, отримаємо нескінченно віддалену пряму. Відзначимо, що останню побудову можна застосувати і до вироджених кривих другого порядку, причому побудована пряма буде проходити через спільну точку O прямих l_1, l_2, які складають криву, і подвійне відношення прямих $(l_1, l_2; OAa)$ дорівнює 1 (див. рис. 2.9).

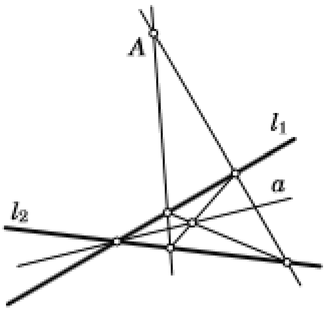

Рисунок 2.9

Визначена, таким чином, відповідність між точками і прямими називається полярною відповідністю щодо даної коніки. При цьому пряма а називається полярою точки A, а A – полюсом прямої a. Очевидно, що всі сформульовані вище властивості полярної відповідності зберігаються.

Відзначимо, що якщо пряма p є полярою точки P, а довільна пряма, яка проходить через P перетинає p в точці Q і коніку в точках A, B, то

$(PQ;\ AB) = 1$. Для доведення досить розглянути випадок, коли коніка є колом, а одна з точок P, Q нескінченно віддалена (див. рис. 2.10).

Зокрема, якщо коніка є еліпсом або гіперболою, то середини всіх хорд, паралельних фіксованою прямою, лежать на прямій, що проходить через центр коніки (напрямки, що задаються цією прямою і прямою, паралельною хордам, називаються спряженими відносно коніки), а якщо коніка – парабола, то на прямій, паралельній її осі.

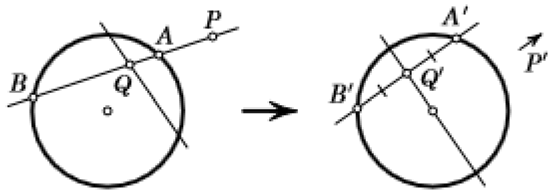

Рисунок 2.10

Вірно і двоїсте твердження: якщо через деяку точку проведено дотичні до коніки a і b і дві довільні прямі p і q, то полюс прямої p лежить на q тоді і тільки тоді, коли $(ab;\ pq)\ =\ 1$.

Принцип двоїстості також залишається вірним. Тому, наприклад, обернена теорема Бріаншона є наслідком оберненої теореми Паскаля. Можна також зробити висновок, що для будь-яких п'яти прямих загального положення існує єдина дотична їх коніка [11].

Полярна відповідність дає ще один спосіб отримання конік. Розглянемо коло α з центром A і радіусом r і інше коло ω з центром O. Поляри всіх точок кола α відносно w огинають деяку криву, яка називається полярним образом кола α. Полярний образ можна отримати і по-іншому: як безліч полюсів всіх дотичних до α.

Теорема 2.4 Полярний образ одного кола до іншого є коніка.

Доведення. Нехай дано коло ω з центром в точці О та коло ω_1 з центром в точці O_1 (для зручності будемо вважати, що O лежить в середині ω_1; див. рис. 2.11).

Нехай ω_1 при інверсії відносно ω перейде в коло ω_2 з центром в точці O_2.

Позначимо пряму, що проходить через точку X і перпендикулярну OX, через $p(X)$. Вона буде полярним образом точки, інверсної точки X відносно ω.

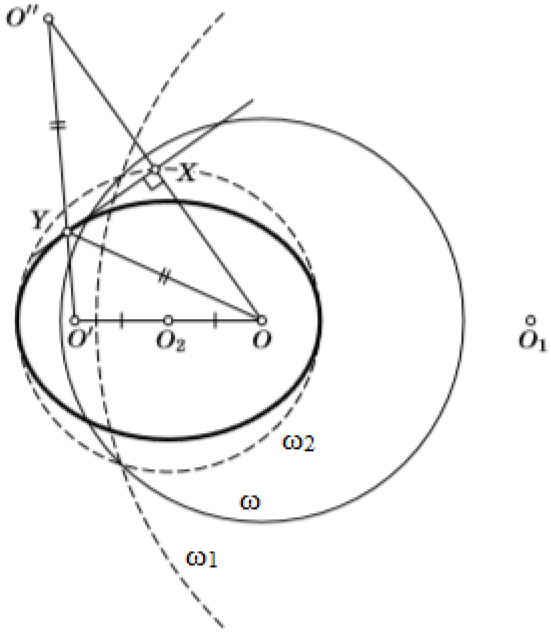

Рисунок 2.11

Так, при русі точки X по ω_2 відповідна їй пряма пробіжить множину поляр всіх точок, що лежать на ω_1.

Таким чином, нам треба довести, що множина всіх таких прямих дотична деякої коніки. Розглянемо точку O', симетричну точці O відносно O_2, і точку O'', симетричну точці O щодо X. Зрозуміло, що довжина відрізка $O'O''$ дорівнює діаметру окружності ω_2. Нехай $O'O''$ перетинає $p(X)$ в точці Y. Тоді в силу того що $p(X)$ – серединний перпендикуляр до OO'', довжини відрізків YO і YO'' рівні. Крім того, кути, які утворюють прямі YO і YO' з $p(X)$, рівні. А значить, $p(X)$ в точці Y є дотичною еліпса з фокусами в O і O' і великою піввіссю, що дорівнює діаметру кола ω_2. Крім того, легко зрозуміти, що при русі точки X по ω_2 точка Y пробіжить весь цей еліпс.

Таким чином, ми просто вказали коніку, яка є полярним образом нашого кола.

Якщо точка O лежить поза ω_1, абсолютно аналогічно можна показати, що полярним образом буде гіпербола, а в разі, якщо O лежить на ω_1 – парабола.

В силу проективної еквівалентності конік доведену теорему можна узагальнити.

Теорема 2.5 Полярний образ однієї коніки щодо іншої є конікою.

Нарешті, зазначимо ще один можливий підхід до визначення конік і полярної відповідності. Нехай між точками і прямими проективної площини встановлена взаємно однозначна відповідність, яка володіє властивістю двоїстості, тобто якщо точка A належить образу точки B, то точка B належить образу точки A. Тоді безліч точок, що належать своїм образам, є конікою (можливо, уявною), причому полярна відповідність щодо цієї коніки збігається з заданою.

Задача 2.8 Задано чотири точки А$, B, C, D$ перетину прямих m і n, що виходять з точки P, з кривої другого порядку. Інші точки кривої невідомі. Побудувати поляру точки P.

Побудова. Розглянемо точки А$, B, C, D$ перетину прямих m і n, що проходять через точку P, як вершини повного чотирикутника, вписаного в криву другого порядку (див. рис. 2.12).

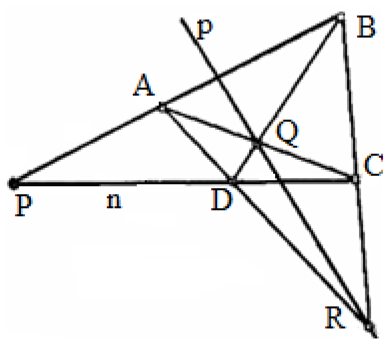

Рисунок 2.12

Точка P буде діагональною точкою повного чотирикутника. Тоді, за означенням поляри, шукана поляра p полюса P буде діагоналлю повного чотирикутника, вписаного в криву другого порядку, яка проходить через інші діагональні точки Q і R.

Задача 2.9 Через точку P, задану всередині кривої другого порядку, провести хорду, яка поділилася б у цій точці навпіл.

Розв'язання. Будуємо поляру p точки P. Через точку P проводимо $p' \parallel p$ (KS – шукана хорда) (див. рис. 2.13).

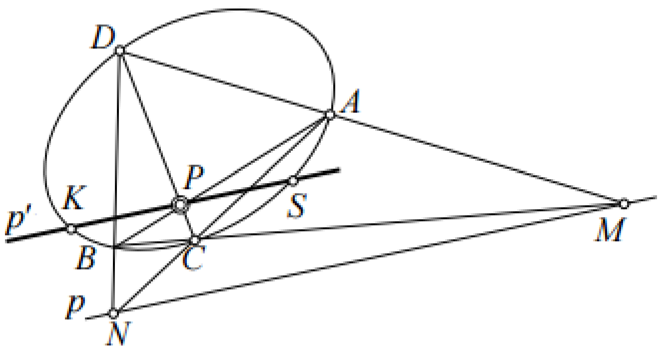

Рисунок 2.13

Доведення. $KS \parallel NM$, оскільки $KS \cap NM = R_{\infty}$, а $(KS, PR_{\infty}) = -1$, то $KP = PS$.

2.5 Пучки конік

Нехай дано дві коніки з рівняннями виду

$$f(x, y) = 0 \text{ та } g(x, y) = 0.$$

Тоді пучком конік називається безліч кривих з рівняннями

$$af(x, y) + bg(x, y) = 0, \tag{2.2}$$

де $a, b -$ довільні числа.

Очевидно, що пучок може бути заданий будь-якими двома коніками, які йому належать. При цьому якщо дві коніки, що задають пучок, перетинаються в деякій точці, то і всі коніки пучка проходять через цю точку. Якщо ж дві коніки торкаються один одного, то і всі коніки пучка торкаються один одного в цій точці.

Окремими випадками пучків є певні пучки кола. Дійсно, якщо взяти лінію центрів кола за вісь абсцис, а радикальну вісь за вісь ординат, то легко бачити, що рівняння кола має вид

$$x^2+y^2+ax+c=0,$$

де с – степінь початку координат відносно окружностей пучка; а – довільне число.

Очевидно, що це окремий випадок рівняння (2.2).

З основної теореми алгебри слідує, що будь-які дві криві порядку m і n перетинаються по mn точкам (які можуть бути комплексними або збігаються). Зокрема, при $m=n=2$ отримуємо, що будь-які дві коніки перетинаються в 4 точках. Тоді будь-яка коніка відповідного пучка також проходить через ці точки.

Можна довести і зворотне твердження: для будь-якої коніки, що проходить через 4 точки перетину конік з рівняннями $f(x,y)=0$ і $g(x,y)=0$, знайдуться такі числа a, b, що рівняння коніки можна привести до виду (2.1). Це твердження називається теоремою про пучки конік.

Неважко показати, що гіпербола є рівносторонньою тоді і тільки тоді, коли в її рівнянні $a_{11}+a_{22}=0$. При цьому зручно вважати рівносторонньою гіперболою і вироджену криву, що складається з двох перпендикулярних прямих. Тоді з теореми про пучки конік слідує, що якщо дві рівносторонні гіперболи перетинаються в чотирьох точках, то будь-яка коніка, визначена цими точками пучка, також буде рівносторонньою гіперболою.

Теорема про пучки конік дозволяє визначити пучок як множину конік, що проходять через дані чотири точки загального положення A, B, C, D. При цьому для будь-якої точки X, відмінною від A, B, C, D, існує рівно одна коніка пучка, що проходить через X [14].

Серед точок, які задають пучок, деякі можуть бути уявними. Наприклад, будь-яке коло перетинає нескінченно віддалену пряму в двох фіксованих комплексних точках, так що гіперболічний пучок кола задається цими точками і двома загальними точками кола, а еліптичний – чотирма комплексними точками, дві з яких кінцеві і дві нескінченно віддалені. Можливий також збіг деяких утворюючих пучок точок.

При цьому якщо збігаються дві точки, то всі коніки пучка в подвійній точці торкаються один одного, як в параболічному пучку кола, якщо три, то дотична в цій точці має другий порядок, якщо чотири, то третій. Наприклад, безліч концентричного кола – це пучок, утворений двома парами співпадаючих точок.

Якщо всі точки, що задають пучок, різні, то серед цих кривих є три вироджених: $AB \cup CD, AC \cup BD, AD \cup BC$.

Опишемо докладніше різні типи пучків.

а) пучки, що проходять через чотири різні точки (див. рис. 2.14). До цього типу належать також еліптичний і гіперболічний пучки кола.

б) пучки, що проходять через чотири точки, дві з яких збігаються, тобто дотичні до даної прямої в фіксованій точці (див. рис. 2.15). Параболічний пучок кола належить цьому типу.

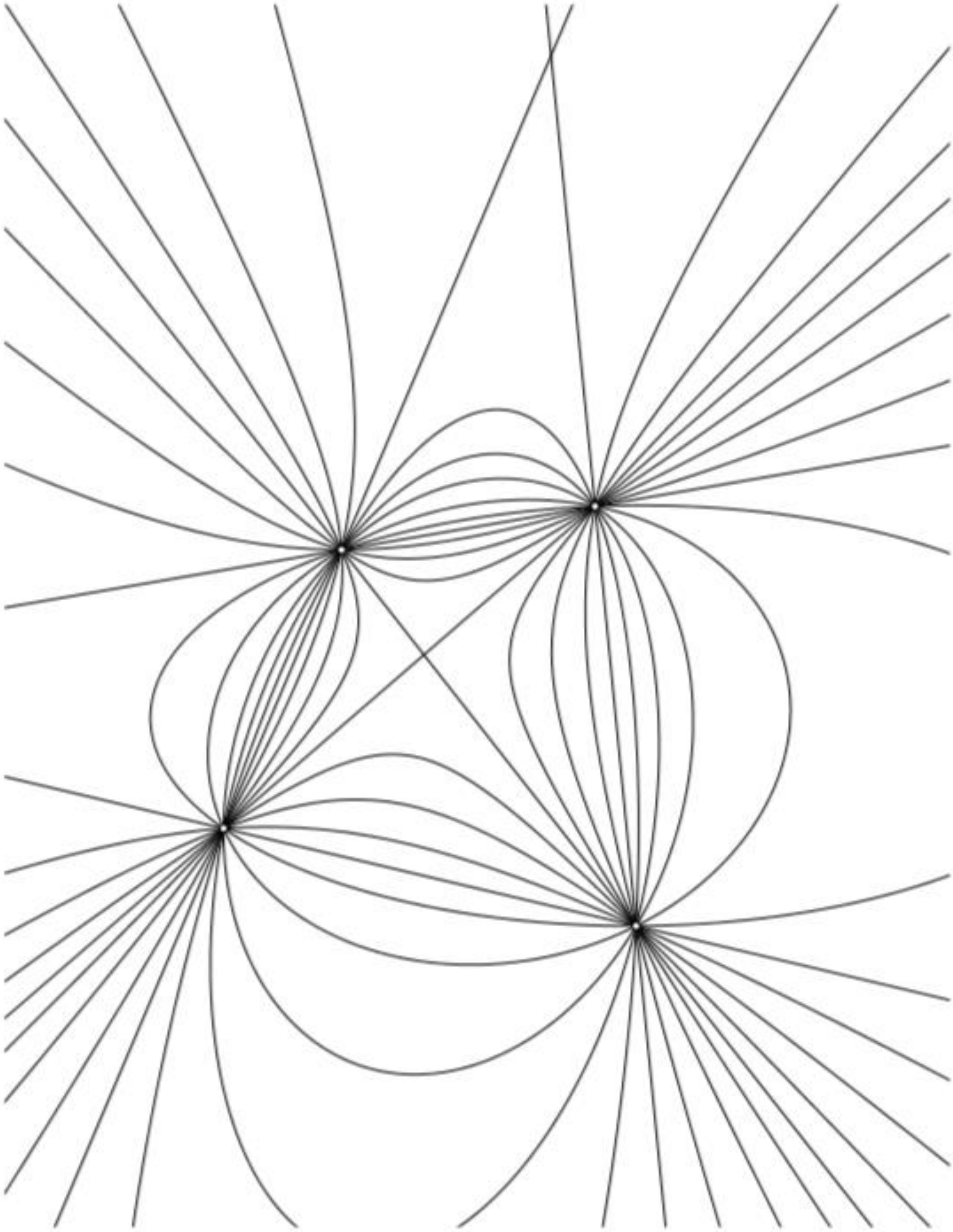

Рисунок 2.14

в) пучок, у якого дві пари точок склеюються. Він буде складатися з конік, що торкаються двох даних прямих в двох даних точках (див. рис. 2.16). До цього типу також належить пучок концентричного кола або парабол, рівняння яких має вид $y = ax^2$.

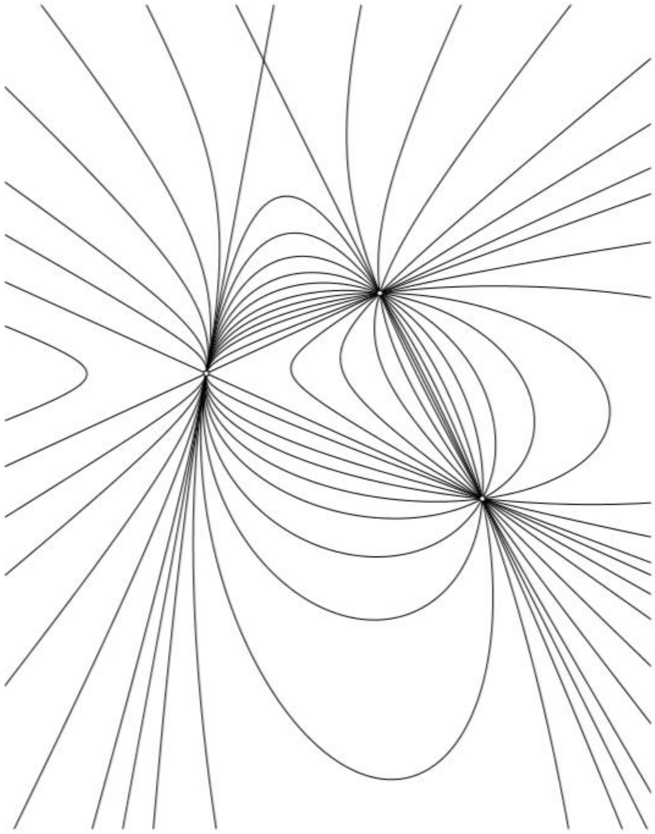

Рисунок 2.15

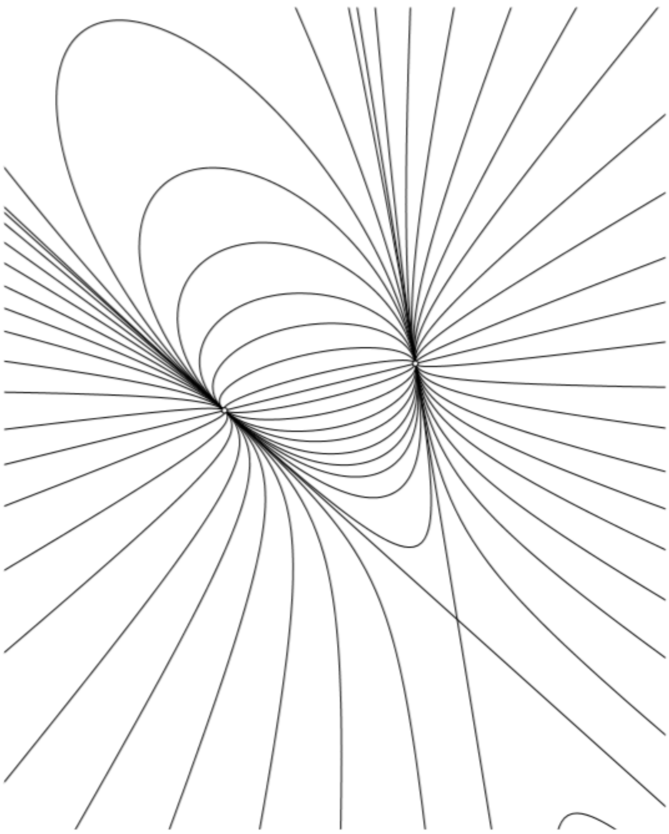

Рисунок 2.16

г) пучок, у якого три точки зливаються в одну (див. рис. 2.17). Коніки цього пучка стикаються з деяким колом.

д) дотичний пучок, у якого чотири точки, що визначають пучок, збігаються (див. рис. 2.18). Приклад такого пучка – параболи, рівняння яких має вид $y = x^2 + a$.

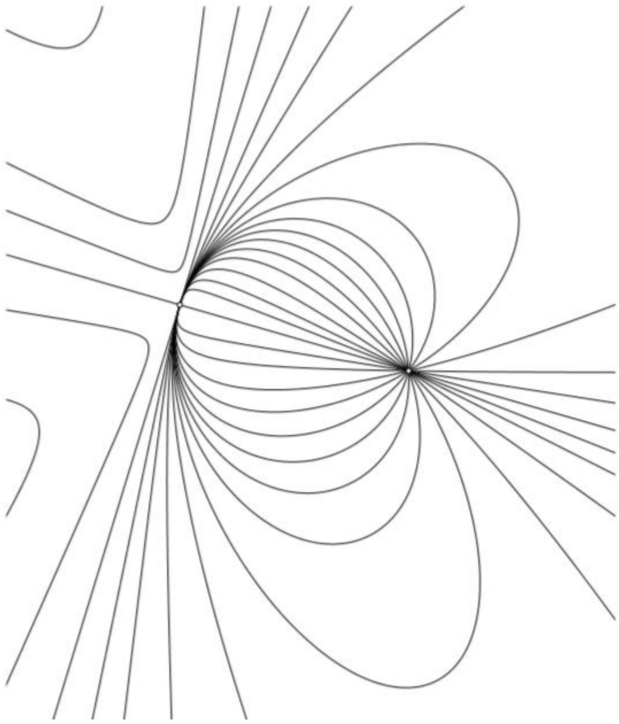

Рисунок 2.17

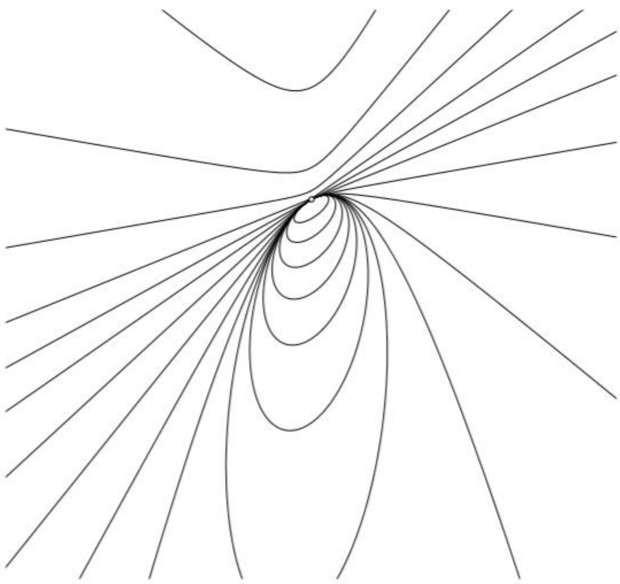

Рисунок 2.18

Крім пучків, заданих чотирма точками, можна розглядати двоїсті пучки, тобто множину конік, що стосуються чотирьох даних прямих (див. рис. 2.19 – 2.21). Двоїсті пучки також класифікуються залежно від того, чи є серед визначних пучків прямих, які збігаються. Якщо збігаються дві прямі, то всі коніки пучка торкаються їх, а значить, і один одного, в одній точці; якщо три, то коніки пучка дотикаються; якщо всі чотири, то понад дотичні.

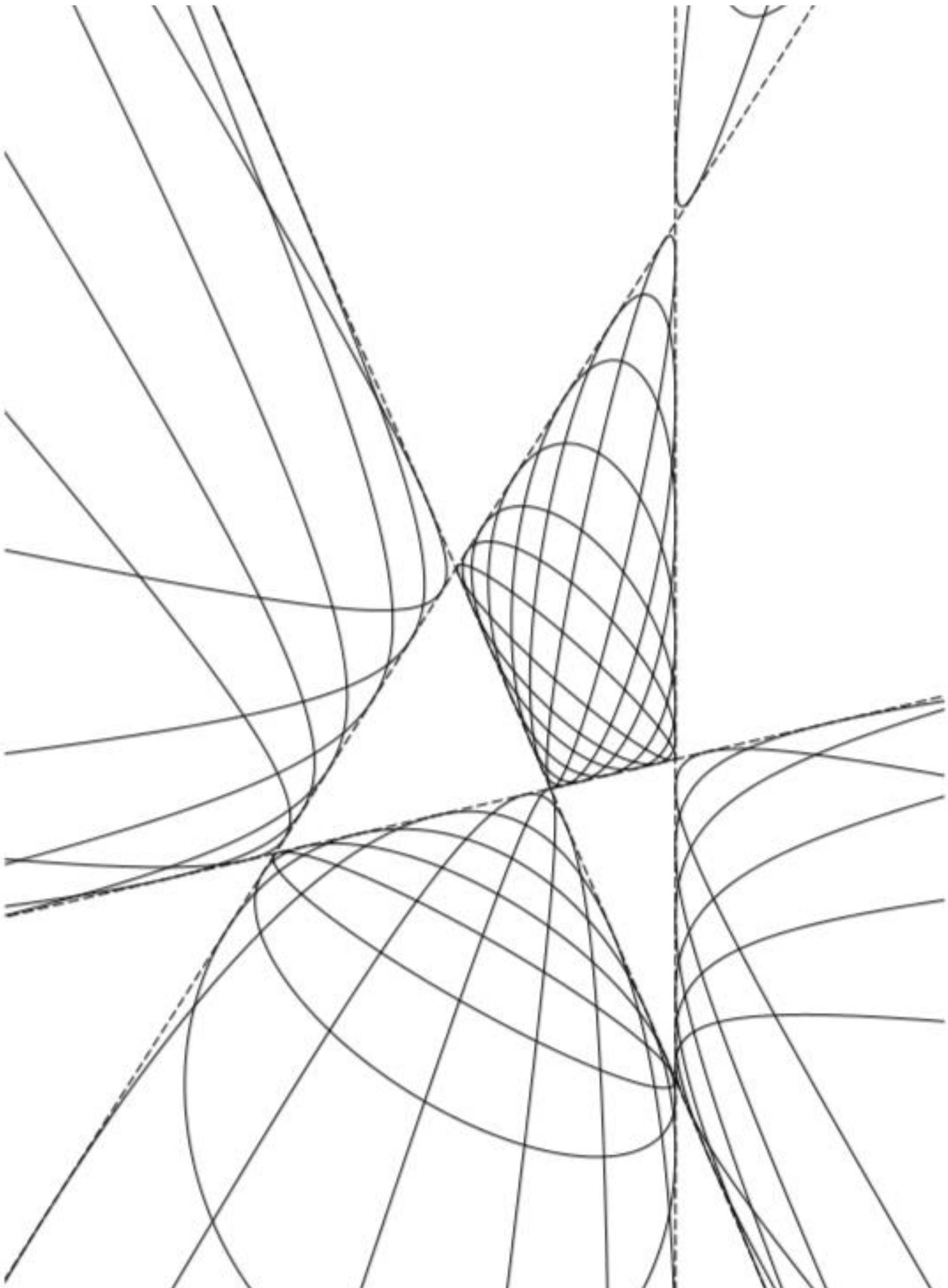

Рисунок 2.19

Відзначимо, що двічі дотичні і понад дотичні пучки є само двоїсті, тобто переходять самі в себе при полярній відповідність відносно будь-якої вхідної в пучок коніки. Користуючись принципом двоїстості, можна для кожного твердження про звичайні пучки сформулювати відповідне твердження про двоїстих і навпаки.

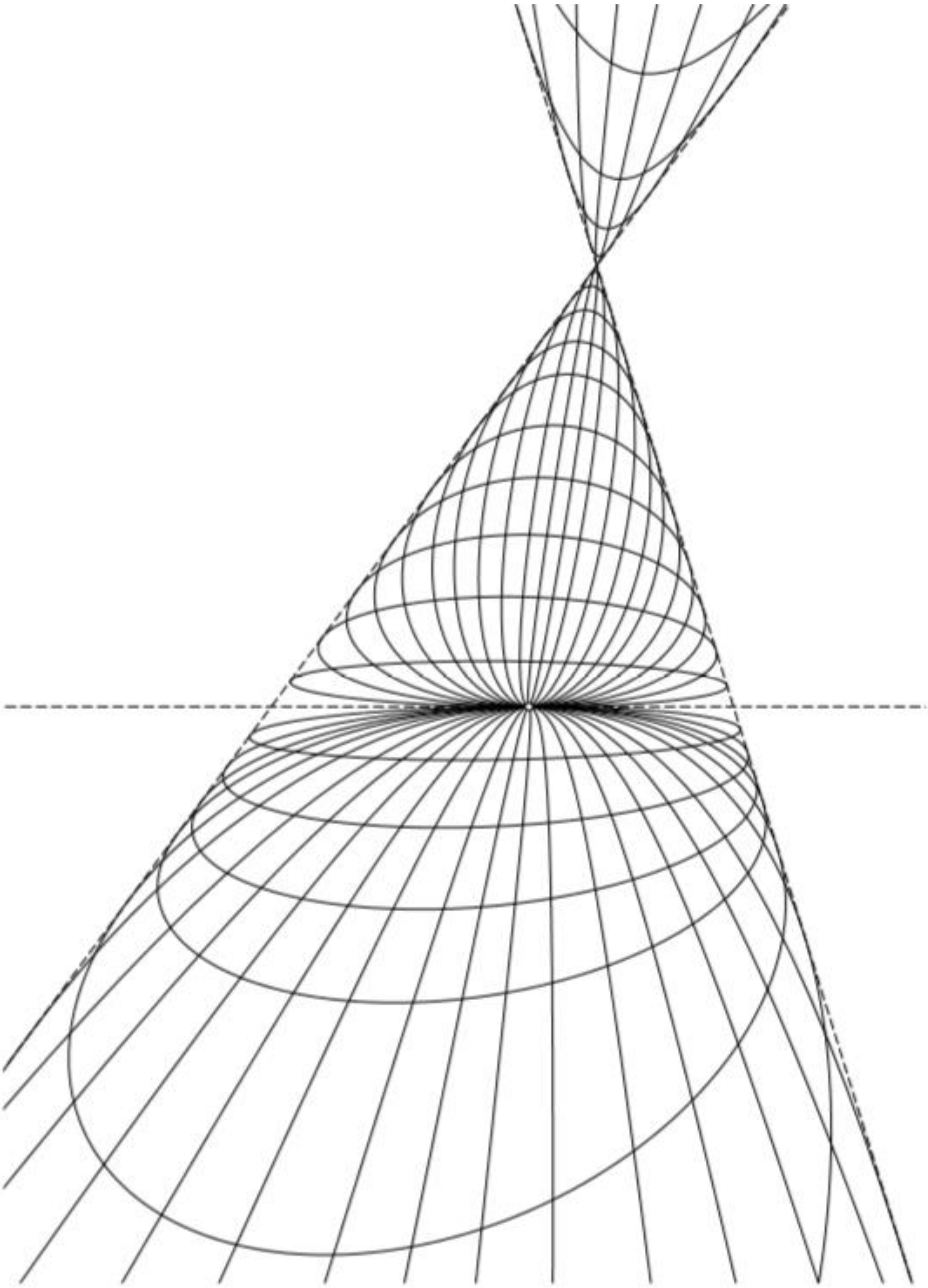

Рисунок 2.20

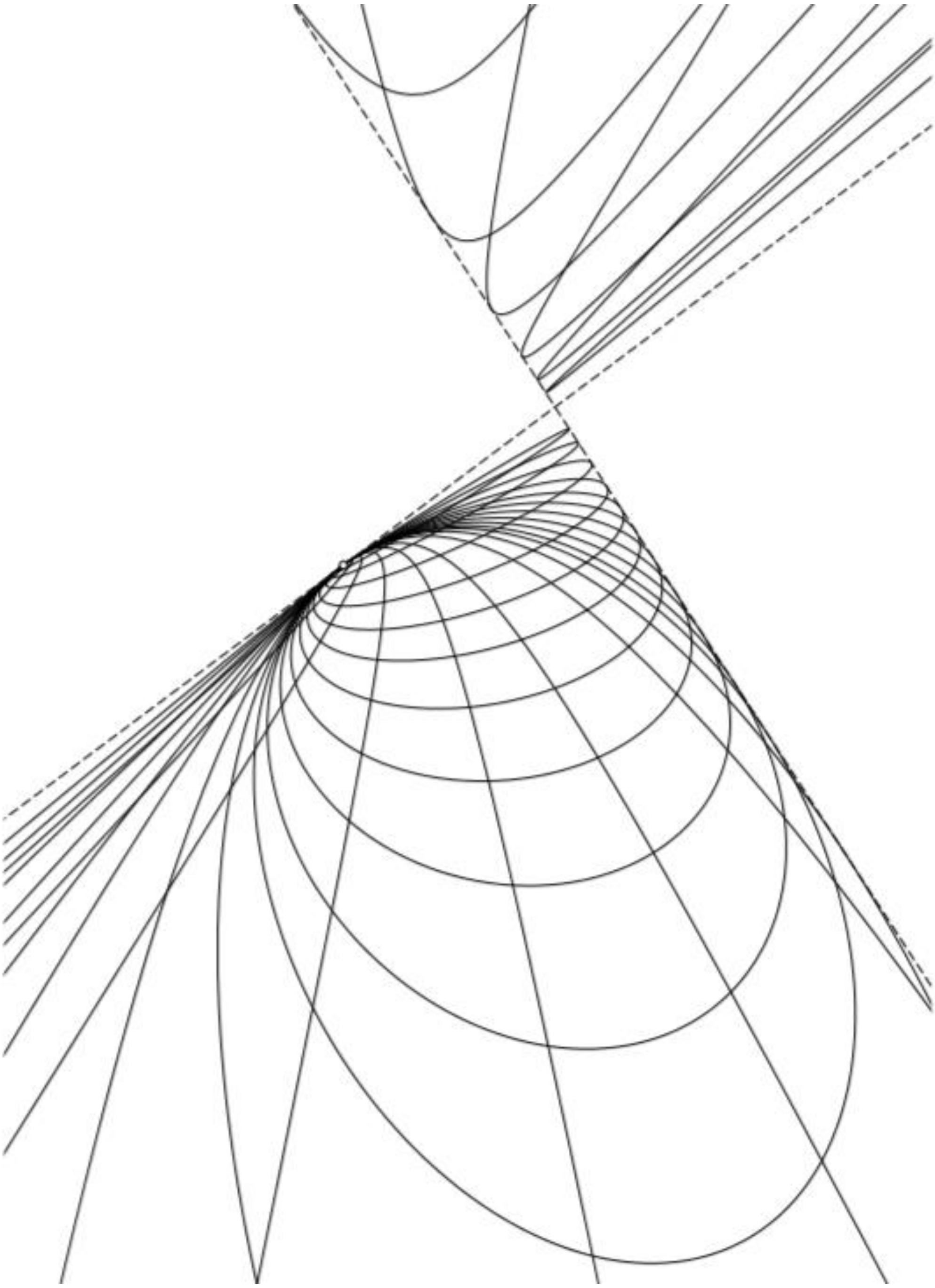

Рисунок 2.21

Розглянемо задачу.

Задача 2.10 На розширеній площині дано два трикутники ABC та DBC, які перетинаються трьома паралельними прямими $p, q, r = (AD); p \cap (AB) = M,\ p \cap (DB) = P, q \cap (AC) = N, q \cap (DC) = Q$ (див. рис. 2.22). Довести що прямі $(MN), (PQ), (BC)$ належать одному пучку.

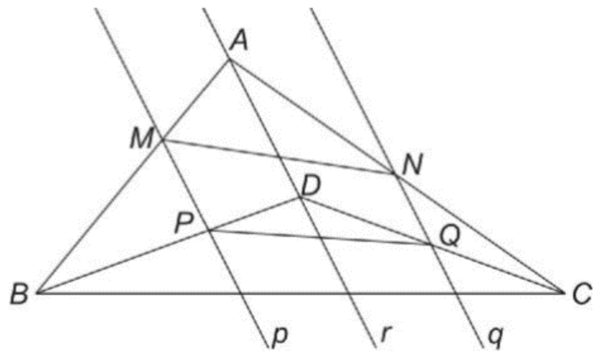

Рисунок 2.22

Розв'язання. Розглянемо трикутники NCQ і MBP. Так як точки A і D перетину відповідних сторін NC, MB і QC, PB належать прямій, паралельній прямим p, q, що містять третю пару відповідних сторін цих трикутників, то трикутники задовольняють обернену теорему Дезарга. За цією теоремою прямі, які проходять через відповідні вершини трикутників, тобто прямі NM, CB, QP належать одному пучку. Оскільки ми розв'язуємо задачу на розширеній площині, то прямі NM, CB, QP або перетинаються в одній точці, або паралельні.

Задача 2.11 Дано шестикутник, протилежні сторони якого попарно паралельні. Довести, що прямі, які проходять через середини протилежних сторін шестикутника, належать одному пучку.

Розв'язання. Нехай $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ – даний шестикутник. Позначимо символами $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ – середини його сторін $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5,$ A_5A_6, A_6A_1 відповідно. Очевидно, даний шестикутник є вписаним в овальну криву другого порядку. За умовою протилежні сторони шестикутника попарно паралельні, значить пряма Паскаля цього шестикутника є невласною. Нехай сторона A_1A_2 перетинає пряму Паскаля в точці P_∞. Тоді $(A_1A_2B_1P_\infty) = -1$, тобто точки P_∞ і B_1 полярно спряжені відносно кривої другого порядку. Аналогічно, точки P_∞ і B_4 теж полярно спряжені відносно цієї кривої, оскільки точка P_∞ є також точкою перетину прямої Паскаля з прямою A_4A_5 (прямі A_1A_2 і A_4A_5 паралельні). Таким чином, пряма B_1B_4 є полярою точки P_∞. Нехай тепер точка Q_∞ є точкою перетину прямої Паскаля із стороною A_2A_3

шестикутника. Точки Q_∞ і B_2 , а також точки Q_∞ і B_5 є полярно спряженими відносно кривої, отже пряма B_2B_5 є полярою точки Q_∞. Ми знайшли полюс невласної прямої, яка в даній задачі є прямою Паскаля шестикутника. Цей полюс – точка O перетину прямих B_1B_4 і B_2B_5. Нарешті, розглянемо точку R_∞ перетину сторін A_3A_4 і A_6A_1 шестикутника з прямою Паскаля. Із тих же міркувань її полярою буде пряма B_3B_6. Нам уже відомо, що поляра точки O проходить через точку R_∞, тому за теоремою взаємності поляр, поляра B_3B_6 точки R_∞ проходить через точку $O.$ Таким чином, всі три прямі B_1B_4, B_2B_5, B_3B_6 належать одному пучку з центром O, що і треба було довести.

В даному розділі ми дізналися, що проективне перетворення можна представити у вигляді композиції двох, перше з яких перетворить коніку в коло. Після другого це коло може перейти тільки в коніку. Звідси, зробили висновок, що проективні перетворення є найпотужнішим інструментом для роботи з коніками.

Підкреслили, що теореми, які ми тепер так природно розглядаємо спільно, були відокремлені одна від одної великими проміжками часу: між теоремами Паскаля і Бріаншона пройшло півтора сторіччя.

Розглянувши окремі випадки, переконалися в тому, що кожній новій фігурі Паскаля може бути зіставлена, за принципом двоїстості, нова фігура Бріаншона і відповідні властивості цих фігур двоїсті.

Окремі випадки теорем Паскаля і Бріаншона застосовуються для вирішення багатьох геометричних задач.

Наприклад, за допомогою теореми про вписаний п'ятикутник легко розв’язати завдання про проведення дотичної в будь-якій точці будь-якого невиродженого конічного перетину.

Ознайомилися з поняттям та видами пучків конік. Розглянули приклади.

Робимо висновок, що результати можуть бути застосовані до конкретних задач побудови подібних кривих та площин.

ВИСНОВКИ

Розв'язування математичних задач навчає відокремлювати посилки та висновок, дані та шукане, знаходити загальне, і особливо у даних, зіставляти та протиставляти факти. При розв'язуванні математичних задач, як вказував А. Я. Хінчин, виховується правильне мислення, і перш за все вдосконалюються вміння повноцінної аргументації.

Курс геометрії містить різноманітний матеріал, однак одним з її центральних розділів є теорія кривих другого порядку. Рішення задач, пов'язаних з кривими другого порядку, іноді викликають великі труднощі.

Таким чином проведене нами дослідження про застосування проективних властивостей конік до розв’язування задач, дозволяє зробити рішення більш стислим і алгоритмічним.

Перш за все нами був проведений повний аналіз теоретичної основи, матеріали були піддані систематизації та узагальненню, розібрані приклади приведення рівняння кривої до канонічного виду з усіма супутніми арифметичними викладками.

Ми дослідили та проаналізували, що приведення кривих та поверхонь другого порядку до канонічного виду значно спрощує побудову графіків.

Ми з’ясували, що проективні перетворення та його інваріанти, подвійне відношення чотирьох точок прямої, окремі випадки теорем Паскаля і Бріаншона, полярна відповідність та пучки конік застосовуються для вирішення багатьох геометричних задач.

Тому наша магістерська робота була орієнтована на вивчення та дослідження застосування проективних властивостей конік до розв’язування задач.

Нами було з’ясовано, що застосування проективних властивостей конік є найпотужнішим інструментом для розв’язання задач.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Александров А. Д., Нецветаев Н. Ю. Глава II (Кривые второго порядка) // Геометрия. Москва : Наука, 1990. С. 32 – 57.
2. Акопян А. В., Заславский А. А. Геометрические свойства кривых второго порядка. Москва : МЦНМО, 2007. 136 с.
3. Бронштейн И. Н. Общие свойства конических сечений // *Квант*. 1975. № 5. С. 31 – 40.
4. Веселов А. П., Троицкий Е. В. Лекции по аналитической геометрии: учеб. пособие. Москва : Изд-во Центра прикладных исследований при механико-математическом ф-те МГУ, 2002. 160 с.
5. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия: пер. с нем. 3-е изд. Москва : Наука, 1981. 344 с.
6. Игнатьев Ю. Г., Агафонов А. А. Проективная геометрия и методы изображений: учеб. пособие. Казань : Казанский университет, 2014. 179 с.
7. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Аналитическая геометрия: учеб. для вузов. 7-е изд. Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2004. 224 с.
8. Исторический обзор происхождения и развития геометрических методов: сочинение: пер. с фр. / М. Шаль. Т. 1. История геометрии. Москва : издательство М. Катковъ, 1883. 311 с.
9. Кирсанов А. А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: курс лекций. Псков : ПГПИ, 2003. 236 с.
10. Корн Г., Корн Т. Кривые второго порядка (конические сечения). // Справочник по математике. 4-е издание. Москва : Наука, 1978. С. 64 – 69.
11. Геометричні перетворення: практикум для студ. вищ. навч. закл. / Кравчук О. М. Луцьк : Волин. нац. ун-т ім. Лесі Українки, 2018. 73 с.

12. Криві другого порядку та перетворення прямокутної системи координат на площині: методичні вказівки до самостійної роботи / Мулик О. В. Київ : НТУУ «КПІ», 2013. 68 с.
13. Кривые второго порядка: метод. указания к выполнению расчет. граф. (контрольной) работы / Старжинская О. Н. Архангельск : Арханг. гос. техн. ун-т, 2010. 24 с.
14. Маркушевич А. И. Замечательные кривые // *Популярные лекции по математике*. 1952. № 4. С. 32.
15. Мусхелишвили Н. И. Курс аналитической геометрии: учеб. пособие для вузов. Москва : Высшая школа, 1967. 655 с.
16. Погорелов А. В. Аналитическая геометрия: учебник для студентов высших учебных заведений. Москва : Наука, 1968. 176 с.
17. Постников М. М. Аналитическая геометрия: учеб. пособие для вузов. Москва : Наука, 1973. 751 с.
18. Прасолов В. В., Тихомиров В. М. Геометрия. 2-е изд., перераб. и доп. Москва : МЦНМО, 2007. 328 с.
19. Розенфельд Б. А. Аполлоний Пергский. Москва : МЦНМО, 2004. 176 с.
20. Стєганцев Є. В., Стєганцева П. Г. Інваріанти проективних перетворень: навчальний посібник до індивідуальної та самостійної робіт для студентів III курсу математичного факультету. Запоріжжя : ЗНУ, 2011. 85 с.
21. Филинова О. Е. Математика в истории мировой культуры. Москва : Гелиос АРВ, 2006. 224 с.