

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

**МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра прикладної математики і механіки**

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА

на тему: **«ДОСЛІДЖЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ
ПОПУЛЯЦІЙНОЇ ДИНАМІКИ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ
МЕТОДАМИ ТЕОРІЇ ПОЗИТИВНИХ СИСТЕМ ТА
ТЕОРІЇ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ»**

Виконав(ла): студент(ка) 2 курсу, групи 8.1139

спеціальності 113 прикладна математика
(шифр і назва спеціальності)

освітньої програми прикладна математика
(назва освітньої програми)

Н. В. Собокар

(ініціали та прізвище)

Керівник доцент кафедри прикладної математики і
механіки, доцент, к.ф.-м.н. Леонтєва В.В.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Рецензент декан математичного факультету,
професор, д.т.н. Гоменюк С.І.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Запоріжжя

2020

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет математичний

Кафедра прикладної математики і механіки

Рівень вищої освіти магістр

Спеціальність 113 прикладна математика

(шифр і назва)

Освітня програма Прикладна математика

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри прикладної математики і механіки, д.т.н., професор

Гришак В.З.

(підпис)

« _____ » _____ 2020 р.

З А В Д А Н Н Я
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТОВІ(СТУДЕНТЦІ)

Собокар Надії Володимирівни

(прізвище, ім'я та по-батькові)

1. Тема роботи (проекту) Дослідження математичних моделей популяційної динаміки із запізненням методами теорії позитивних систем та теорії

автоматичного керування

керівник роботи (проекту) Леонтєва Вікторія Володимирівна, к.ф.–м.н., доцент

(прізвище, ім'я та по-батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від « 20 » 05 2020 року № 576-с

2. Строк подання студентом роботи 03.12.2020

3. Вихідні дані до роботи 1. Постановка задачі.

2. Перелік літератури.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)

1. Аналіз предметної області дослідження та огляд сучасного стану проблеми. 2. Аналіз об'єкта дослідження. 3. Математичні моделі об'єкта дослідження. 4. Аналіз основних властивостей математичних моделей об'єкта у змінних стану засобами теорії керування.

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень)

Презентація

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання 20.05.2020

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	21.05.2020	виконано
2.	Збір вихідних даних.	25.06.2020	виконано
3.	Обробка методичних та теоретичних джерел.	28.07.2020	виконано
4.	Розробка першого розділу.	01.09.2020	виконано
5.	Розробка другого розділу.	09.09.2020	виконано
6.	Розробка третього розділу.	12.09.2020	виконано
7.	Розробка четвертого розділу.	16.09.2020	виконано
8.	Оформлення та нормоконтроль кваліфікаційної роботи.	20.11.2020	виконано
9.	Захист кваліфікаційної роботи.	17.12.2020	виконано

Студент

(підпис)

Н. В. Собокар

(ініціали та прізвище)

Керівник роботи

(підпис)

В. В. Леонтєва

(ініціали та прізвище)

Нормоконтроль пройдено

Нормоконтролер

(підпис)

В. В. Леонтєва

(ініціали та прізвище)

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Дослідження математичних моделей популяційної динаміки із запізненням методами теорії позитивних систем та теорії автоматичного керування.»: 94 с., 3 рис., 38 джерел.

АСИМПТОТИЧНА СТІЙКІТЬ, ДИФЕРЕНЦІЙНІ РІВНЯННЯ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ, КЕРОВАНІСТЬ, МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ, МАТРИЦЯ ЛЕСЛІ, ПОЗИТИВНІСТЬ СИСТЕМ, СПОСТЕРЕЖУВАНІСТЬ, СТІЙКІСТЬ ЗА ЛЯПУНОВИМ.

Об'єкт дослідження – математична модель популяційної динаміки із запізненням.

Мета роботи: провести аналіз об'єкту дослідження та математичних моделей, що описують його поведінку на предмет його позитивності, стійкості за Ляпуновим та асимптотичної стійкості, а також основних властивостей систем керування – спостережуваності та керованості; визначення умов, що забезпечують виконання зазначених властивостей.

Метод дослідження – аналітичні методи дослідження стійкості за Ляпуновим, керованості, спостережуваності та ідентифікованості систем керування, метод дослідження позитивності у математичних моделях динамічних систем.

У кваліфікаційній моделі росту динаміки популяцій Леслі із запізненням. Для зазначених моделей з дискретною та неперервною віковою структурою проводиться аналіз позитивності об'єкту засобами теорії позитивних систем, а також проводиться дослідження стійкості руху, керованості та спостережуваності теорії динамічних систем та теорії автоматичного керування та регулювання.

SUMMARY

Bachelor qualifying paper “Study of mathematical models of population dynamics with delay using the methods of positive systems theory and automatic control theory.”: 94 pages, 3 figures, 38 references.

ASYMPTOTIC STABILITY, DELAY DIFFERENTIAL EQUATIONS, CONTROLLABILITY OF SYSTEMS, MATHEMATICAL MODEL, MATRIX OF LESLIE, POSITIVE SYSTEMS, POPULATION DYNAMICS, OBSERVABILITY OF SYSTEMS, LIABILITY STABILITY

The object of study is a mathematical model of P.Leslie with delay.

The aim of study is to analyze the object of research and mathematical models with delay that describe the behavior for positivity, Lyapunov and asymptotic stability, as well as the main characteristics of control systems – observation and controllability.

Method of investigation: analytical methods for solving methods for solving delay differential equations, the method of state variables, methods for studying the stability of Lyapunov, mathematical study of controllability, observation and identification of control systems, method of research of positivity in mathematical models of dynamic systems.

In the qualification work discrete and continuous, mathematical model with delay that was built on the base of continuous, mathematical models of Leslie for the demographic dynamics of populations are considered. For these models with a discrete and continuous age structure analysis is being conducted on the positivity by the methods of the theory of positive systems and also is investigated motion stability, controllability, observation by theory of dynamics systems and theory of automatic control.

ЗМІСТ

Завдання на кваліфікаційну роботу.....	2
Реферат.....	4
Summary.....	5
Вступ.....	8
1 Аналіз об'єкта та предметної області дослідження	10
1.1 Поняття, основні підходи та особливості моделювання біологічної популяційної динаміки	10
1.2 Поняття, особливості побудови та умови застосування математичних моделей позитивних систем	16
1.3 Поняття та особливості математичних моделей із запізненням.....	20
1.4 Огляд математичних моделей із запізненням	25
2 Огляд математичного апарату.....	32
2.1 Поняття та методи розв'язку диференціальних рівнянь із запізненням.....	32
3 Математичні моделі дослідження: особливості побудови та умови застосування. Досліджування позитивності та особливості введення запізнення до об'єкта дослідження.....	39
3.1 Огляд об'єкта дослідження та побудова математичної моделі об'єкта дослідження із запізненням	39
3.2 Аналіз позитивності об'єкта дослідження.....	43
3.3 Особливості застосування математичної моделі об'єкта дослідження із запізненням	67
4 Аналіз основних властивостей математичних моделей біологічної	

системи у змінних стану засобами теорії автоматичного керування	76
4.1 Побудова математичної моделі у змінних стану.....	76
4.2 Стійкість руху.....	79
4.3 Керованість об'єкта.....	82
4.4 Спостережуваність об'єкта.....	85
Висновки.....	89
Перелік посилань.....	91

ВСТУП

У сучасній популяційній екології проблема моделювання чисельності різних видів живих істот займає одне з центральних місць. Під популяцією розумітимемо сукупність особин одного виду, відносно відособлених від інших груп, що мають спільний генофонд, а також здатних до більш менш стійкого самовідтворення. У зв'язку з тим, що стратегія промислу, яку здійснюють люди, відрізняється від «стратегії» дій природних факторів, гостро стало питання винищення популяцій окремих видів тварин. А тому, задача математичного моделювання динаміки популяцій виявляється, як ніколи актуальною та необхідною для збереження і відновлення зникаючих видів тварин. Якщо математична модель правильно підібрана, можна спрогнозувати динаміку змін параметрів системи, а у ряді випадків отримати важливі, якісні результати.

Для прогнозування чисельності популяції тварин, особливо з урахуванням вікового складу, найдоречніше застосовувати математичну модель з дискретною структурою. Першим, хто запропонував подібну модель із дискретним розбиттям був Патрик Леслі. Тому в даній кваліфікаційній роботі об'єктом дослідження є модель популяційної динаміки П. Леслі.

Насправді, в системах завжди є деяке запізнювання в регуляції чисельності, викликане деякими причинами. Розвиток будь-якої дорослої особини з плодотвореного яйця вимагає певного часу. Тому, якщо якась зміна зовнішніх факторів, наприклад, збільшення ресурсів, викличе підвищення продуктивності дорослих особей, та відповідна зміна чисельності станеться лише по закінченню часу τ . Зміна чисельності популяцій не

миттєво позначається на швидкості. Відповідно такі системи краще описувати диференціально-різницеvими рівняннями із запізнюванням.

Метою роботи виступає проведення аналізу об'єкту дослідження та математичних моделей, що описують його поведінку на предмет його позитивності, стійкості за Ляпуновим та асимптотичної стійкості, а також основних властивостей систем керування – спостережуваності та керуваності; визначення умов, що забезпечують виконання зазначених властивостей; розробка методики проведення аналізу основних властивостей математичних моделей об'єкту.

В першому розділі проводиться ознайомлення із сутністю та основними методами роботи моделювання біологічної популяційної динаміки, розглядається особливості математичних моделей із запізненням, а також вивчаються особливості застосування математичних моделей позитивних систем та детально аналізуються критерії позитивності .

Другий розділ розкриває загальні поняття і теорію диференціальних рівнянь із аргументом, що запізнюється, а також методи, які до них застосовуються. А саме метод кроків та наближений метод розкладання невідомої функції з аргументом, що запізнюється, за ступенями запізнювання.

Третій розділ присвячено безпосередньо моделі об'єкта дослідження. Тобто особливостям побудови та умовам застосування математичної моделі Леслі із запізненням, а також аналізу позитивності об'єкта дослідження.

У четвертому розділі проводиться аналіз досліджуваної системи та її математичної моделі у змінних стану на виконання основних якісних та динамічних властивостей засобами теорії позитивних систем та керування. Аналіз проводиться за наступними напрямками: стійкість руху, керуваність та спостережуваність біологічних систем.

1 АНАЛІЗ ОБ'ЄКТА ТА ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ ДОСЛІДЖЕННЯ

З метою висвітлення основних досягнень в області математичного моделювання популяційної динаміки та детального розкриття об'єкту дослідження в даному розділі проводиться аналіз біологічної популяційної динаміки із розкриттям її особливостей та надається детальна характеристика сучасного рівня розробки зазначеної тематики дослідження.

1.1 Поняття, основні підходи та особливості моделювання біологічної популяційної динаміки

Перше ніж розглянути основні підходи та особливості моделювання біологічної систем популяційної динаміки, зупинимось на розкритті фундаментальних понять, що стосуються об'єкту. Під популяцією будемо розуміти динамічну єдність організмів, що знаходяться у певній взаємодії. Динамікою популяції називають зміни в структурі, загальної чисельності та розподілу популяції, як реакція на умови навколишнього середовища.

У спрощеному вигляді динаміка популяції характеризується, як народжуваність та смертність. Аналізуючи ці характеристики можна зробити висновки про стійкість та перспективний розвиток популяції.

За допомогою звичайних диференціальних рівнянь можна зробити опис динаміки популяцій, якщо виконуються наступні умови [32]:

- індивідууми рівномірно розподілені в просторі;
- популяція в достатній мірі однорідна за віковою і статевими ознаками;

- процес відтворення відбувається неперервно;
- загальна кількість особин достатньо велика.

Чисельність популяції позначимо $X(t)$. Функція $X(t)$ повинна бути дискретною, але зроблені припущення дозволяють з певною похибкою вважати, що дана функція є неперервно диференційованою для усіх $t \geq 0$. У ряді випадків, для зручності, в якості чисельності популяції розглядається обсяг біомаси всіх особин (наприклад, відомо, що біомаса мурах можна порівняти з біомасою людей, проте чисельність різниться на кілька порядків). З біологічного сенсу випливає, що $X(t) \geq 0$ для усіх $t \geq 0$.

Зміну стану системи із часом $t \in T$, де T – упорядкована множина, називають еволюцією динамічної системи. В математичній біології застосовуються два типи динамічних систем: з неперервним часом $T = \mathbb{R}$ та з дискретним (цілочисельним) часом $T = \mathbb{Z}$. Динамічні системи першого типу називаються неперервними, другого – дискретними.

Основним компонентом будь-якої динамічної системи є закон еволюції, який визначає стан системи x_t в момент часу t , за умовою, що початковий стан x_0 відомий. Найзагальніший спосіб для опису закону еволюції – припустити, що для будь-якого t задано відображення $X \rightarrow X$ (тобто з часом наша система змінює своє положення, блукаючи деяким заданим чином по простору станів):

яке переводить початковий стан в деякий інший: $x_t = \varphi^t x_0$. Відображення φ^t часто називають еволюційним оператором динамічної системи.

$$\varphi^t: X \rightarrow X, \quad (1.1)$$

На початку минулого століття Т.Мальтус сформулював модель експоненційного зростання чисельності популяції за умови необмежних ресурсів. В цілому для популяції характерний експоненціальний та логістичний тип росту.

Нехай α – питома народжуваність (відношення кількості народжених в одиницю часу до загальної кількості особин), а β – питома смертність (відношення кількості загиблих від хижаків, хвороби, старості і т. ін. особин в одиницю часу до загальної кількості особин). Припустимо, що питомий приріст $a = \alpha - \beta$ є постійною величиною. Тоді для популяції з початковою чисельністю X_0 маємо:

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= aX(t), \\ X(0) &= X_0.\end{aligned}\tag{1.2}$$

Загальним розв'язком є експоненціальна функція:

$$X(t) = X_0 e^{at}.\tag{1.3}$$

Це означає, якщо $a > 0$ чисельність популяції нескінченно зростає (див.рис. 1,1) [32], а при $a < 0$ – спадає, прямуючи до нуля при збільшенні часу.

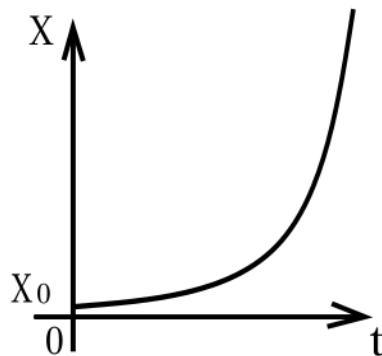


Рисунок 1.1 – Експоненціальне зростання популяції при $a > 0$

Враховуючи дані про зростання чисельності населення і площі оброблюваних полів, Мальтус першим зробив висновок, що чисельність людства зростає в геометричній прогресії, експоненційно, разом з тим харчова промисловість зростає лінійно з часом (в арифметичній прогресії), тому рано чи пізно лінійну функцію пережене експонента настане велика нестача їжі. Керуючись цим умовиводом Мальтус намагався донести, що введення обмежень на народжуваність є обов'язковим, особливо для незаможних прошарок суспільства. З сучасної точки зору головна вада теорії Мальтуса є те, що процес саморегуляції чисельності людства немає, а це призводить її до демографічного переходу. Демографічний перехід – модифікація виду зміни поколінь, іншими словами відтворення населення стає просто заміщенням поколінь коли швидко знижуються показники народжуваності і смертності,. Перехід від традиційного суспільства до індустріального частиною якого є цей процес, для якого притаманна висока народжуваність і висока смертність. Разом з тим теорія Мальтуса досить точно описує закономірності економіко–демографічної динаміки доіндустріальних товариств. Ідеї Мальтуса справили потужний позитивний вплив на розвиток біології, по–перше, через їх вплив на Дарвіна, а, по–друге, на їх основі з'явилися більш досконалі математичні моделі популяційної

біології, починаючи з логістичної моделі Гомпертца і Ферхюльста (див. рис. 1.2) [32].

Як правило, чисельність популяції залежить не тільки від співвідношення народжуваності і смертності, а й від обмеженості харчових та інших ресурсів (лімітуюча середа). Свій варіант обліку цього чинника запропонував бельгійський математик Ферхюльст. Він поставив собі за мету визначити, чи буде населення Бельгії необмежено зростати. В якості розв'зка було запропоновано нову модель динаміки чисельності популяції при обмежених ресурсах, описувана рівнянням

$$\frac{dX}{dt} = aX \left(1 - \frac{X}{K}\right). \quad (1.4)$$

Це рівняння володіє двома важливими властивостями: при малих X чисельність X зростає експоненціально (як в рівнянні (1.2)), при великих – наближається до певної межі K . Ця величина, яка називається ємністю популяції, визначається обмеженістю харчових ресурсів, місць для гніздування, багатьма іншими факторами, які можуть бути різними для різних видів. Таким чином, ємність екологічної ніші є системний фактор, який визначає обмеженість зростання популяції в даному ареалі проживання.

Рівняння (1.4) можна також переписати у вигляді

$$\frac{dX}{dt} = aX - \delta X^2. \quad (1.5)$$

Тут δ – коефіцієнт внутрішньовидової конкуренції (за харчовий ресурс, притулку і т.п.). Рівняння (1.4) можна розв’язати аналітично. Розв’язок в такому випадку буде мати вигляд:

$$X(t) = \frac{KX_0e^{at}}{K - X_0 + X_0e^{at}}. \quad (1.6)$$

Вираз (1.6) описує кінетичну криву, тобто залежність чисельності популяції від часу. Якщо вираз (1.6) про диференціювати два рази по t , побачимо, що крива $X(t)$ має точку перегину, з координатами

$$\left(\frac{1}{a} \ln \frac{K - X_0}{X_0}; \frac{K}{2}\right). \quad (1.7)$$

Ордината є половиною максимальної чисельності, а абсциса залежить як від ємності популяції K , так і від константи власної швидкості росту a – чим вище генетичні можливості популяції, тим швидше настає перегин на кривій чисельності.

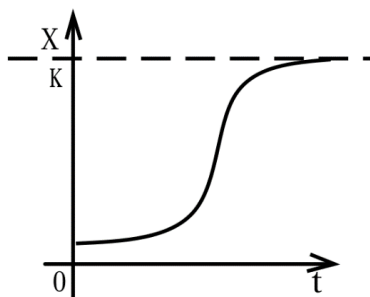


Рисунок 1.2 – Логістичне зростання популяції [32]

1.2 Поняття, особливості побудови та умови застосування математичних моделей позитивних систем

Нехай ми маємо рівняння стану виду

$$\frac{dX}{dt} = AX(t) + BU(t), \quad (1.8)$$

або

$$X(t + 1) = AX(t) + bU(t), \quad (1.9)$$

що являють собою, відповідно, неперервну (якщо t визначається дійсними числами) або дискретну (якщо t визначається цілими числами) систему та вихідне перетворення має вид

$$Y(t) = c^T X(t). \quad (1.10)$$

Такі системи представляються у вигляді (A, b, c^T) та мають своєрідні особливості, що накладаються умовами позитивності, які ми розглянемо далі [20].

За визначенням, позитивні системи є системи, в яких змінні стану матриці приймають лише невід'ємні значення.

Скажемо, що матриця A строго більше матриці B (що має однакову кількість рядків та стовпців) та позначимо $A \gg B$ тоді та тільки тоді, коли усі елементи a_{ij} з A більше за відповідні елементи b_{ij} з B . Якщо усі елементи з A більше або дорівнюють відповідних елементів з B , але існує принаймні

один a_{ij} , що строго більше за b_{ij} , будемо казати, що матриця A більше за матрицю B та позначимо це $A > B$. Звичайно обидва випадки $A \gg B$ та $A > B$ мають на увазі $A \neq B$. Позначення $A \geq B$, що читається як A більше або дорівнює B , значить, що усі елементи з A більше або дорівнюють відповідним елементам матриці B . Таким чином $A \geq B$ задовольняється і при $A = B$. Ці визначення виправдовують використання наступних позначень і термінології:

строго позитивна матриця $A: A \gg 0 \left(a_{ij} > 0 \forall (i, j) \right)$;

позитивна матриця $A: A > 0 \left(a_{ij} \geq 0 \forall (i, j), \exists (i, j): a_{ij} > 0 \right)$;

невід'ємна матриця: $A: A \geq 0 \left(a_{ij} \geq 0 \forall (i, j) \right)$;

строго позитивна діагональна матриця $A: A \gg 0 \left(a_{ij} = 0 \forall i \neq j, a_{ij} > 0 \forall i \right)$.

Аналогічні визначення та позначення можуть бути також надані для n -мірних векторів з $n > 2$. Однак при роботі зі скалярами сувора позитивність ($a \gg 0$) збігається з позитивністю ($a > 0$). Варто також відзначити, що дотримуються наступні правила:

$$A \gg 0, B > 0 \Rightarrow AB > 0,$$

$$A > 0, B \gg 0 \Rightarrow AB > 0,$$

$$A \gg 0, X > 0 \Rightarrow AX \gg 0,$$

$$A > 0, X \gg 0 \Rightarrow AX > 0,$$

$$X \gg 0, Y > 0 \Rightarrow X^T Y = Y^T X > 0.$$

Тепер ми можемо дати перше визначення позитивності лінійної системи.

Лінійну систему (A, b, c^T) називають зовнішньо позитивною тоді і тільки тоді, коли її змінна виходу, що відповідає нульовому початковому стану є невід'ємною для кожної невід'ємної вхідної функції.

Зовнішня позитивність – це властивість, яку часто легко перевірити, оскільки в більшості випадків з фізичних причин вхідні та вихідні змінні обов'язково є позитивними.

Тепер ми можемо дати друге визначення позитивності, яке можна назвати внутрішнім. Лінійну систему (A, b, c^T) називають позитивною тоді і тільки тоді, коли для кожного невід'ємного початкового стану і для кожної невід'ємної змінної входу її змінна стану і виходу не є негативними. Це визначення говорить, що всі траєкторії, що виходять з будь-якої точки позитивного ортанта \mathbb{R}_+^n (включно межі) простору станів \mathbb{R}^T , отриманого шляхом застосування невід'ємного входу в систему, залишаються в позитивному ортанті і дають невід'ємний вихід.

Дослідження в області позитивних систем були детально проведені в роботах Алілуйко, А. М.[1, 2], Мазко А. Г.[22, 23], Леонтьевой В.В.[14, 15, 16, 17, 18, 38], Єлховської Я. А.[14, 38], Собокар Н.В[14].

Далі зупинимося на висвітленні основних критеріїв, за якими в подальшому буде проводитися аналіз позитивності об'єкта. Так, основними критеріями позитивності системи є: невід'ємність матриці, нерозкладність матриці, невиродженість матриці, виконання теореми Перрона–Фробеніуса, відповідність властивостям матриці Мецлера.

Розглянемо перший та один з основних критеріїв – невід'ємність. За означенням [20], невід'ємність формулюється наступним чином. Матриця $A \in \mathbb{R}_{n \times n}$ називається невід'ємною, якщо кожен елемент в A є невід'ємним. При $A, B \in \mathbb{R}_{n \times n}$ будемо писати $A \geq B (> B)$, якщо $a_{ij} \geq b_{ij} (> b_{ij})$ для усіх

$1 \leq i \leq m$ та $1 \leq j \leq n$. Згідно з цим позначенням A буде невід'ємною $A \geq 0$. Слід відмітити, з того що $A \geq 0$ та $A \neq 0$ не випливає $A > 0$.

Наступний критерій, який слід визначити для подальшого аналізу є невивроженість. Матриця $A \in \mathbb{R}_{n \times n}$ називається невивроженою, якщо її визначник не дорівнює нулю. В інакшому випадку матриця називається вивроженою. Матриця порядку n є завідомо невивроженою, якщо вона є: діагональною матрицею з ненульовими діагональними елементами, верхнє трикутною з ненульовими діагональними елементами та нижнє трикутною матрицею з ненульовими діагональними елементами.

Для подальшого розгляду теореми Фробеніуса–Перрона важливо з'ясувати чи є досліджувана матриця нерозкладною[21]. Найпоширенішим методом визначення нерозкладності є доведення, що виконується умова :

$$P'AP = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{vmatrix}, \quad (1.11)$$

де A_{11}, A_{22} – квадратні матриці порядку менше n ,
матриця P – матриця перестановки.

Якщо $A \in \mathbb{R}_{n \times n}$, тоді подібне перетворення A виду $P'AP$, де P – матриця перестановки, призводить в результаті просто до перестановки елементів A , причому рядки та стовпці в A переставляються відповідно. При $n \geq 2$ матриця A називається розкладною, якщо існує така матриця перестановки P . Якщо подібної матриці P не існує, тоді A – нерозкладна. Але існують і еквівалентні доведення цієї властивості. Наприклад, можна побудувати відповідний до системи граф та довести, що він є сильно–зв'язним або довести виконання умови $(E + L)^{n-1} > 0$.

З рештою, розглянувши всі попередні умови, можемо сформулювати теорему Перрона – Фробеніуса [21]. Додатна матриця A завжди має дійсне та додатне характеристичне число λ , яке є простим коренем характеристичного рівняння, перевершує модулі усіх інших характеристичних чисел та є водночас спектральним радіусом матриці $\rho(A)$. Цьому «максимальному» характеристичному числу λ відповідає власний вектор p матриці L з додатними координатами.

В окремих випадках, коли умови теореми Фробеніуса–Перрона не виконуються, зручніше довести, що досліджувана матриця є матрицею Мецлера. Матриця A називається матрицею Мецлера, якщо усі її елементи поза діагоналлю невід’ємні, тобто $L_{ij} \geq 0$ при $i \neq j$. Система $\frac{dX}{dt} = LX$ додатна тоді та тільки тоді, коли $A =$ матриця Мецлера. Якщо A – матриця Мецлера, тоді за рахунок відповідного підбору $\alpha > 0$ можна домогтись, щоб матриця $L + \alpha I_n$ мала тільки невід’ємні елементи. Матриця I_n – одинична матриця порядку n . Матриці з невід’ємними елементами, та відповідно і матриці Мецлера, володіють рядом спектральних властивостей, встановлених О. Перроном та Г. Фробеніусом.

1.3 Поняття та особливості математичних моделей із запізненням

В теперішню мить рівняння із запізнюванням широко використовується при описі динамічних процесів в механіці деформованого твердого тіла (середовища із спадковими властивостями) [29],

термодинаміці (при описі необоротних процесів)[9], в електродинаміці (при обліку скінченності швидкості взаємодії)[12], в екології (при описі процесів розмноження видів)[12, 30], в медицині (при опису розвитку інфекцій)[24], в техніці (при обліку запізнювання в перенесені енергії, матеріалів, сигналів)[33, 34, 37], в економіці (при обліку часу запізнення обороту капіталу)[28, 36]. Методи вивчення математичних моделей із запізнюванням розроблялись та отримали теоретичне обґрунтування у теорії диференційних рівнянь.

Є математичні моделі, що описуються диференційними рівняннями в часткових похідних із запізнюванням. Для них клас функціонально диференційних рівнянь втрачає універсальність.

Перехід до функціонального простору стану, запропонований Н. Н. Красовським, дозволяє використовувати нову універсальну форму математичної моделі — клас диференційних рівнянь у банаховому просторі. Прагнення до універсальності в складанні математичної моделі узгоджується з вимогами універсальності використовуваних методів їх якісного аналізу. Реалізація останньої вимоги пов'язана із використанням теорії диференційних рівнянь у банаховому просторі.

Окремі диференційні рівняння із запізненим аргументом зустрічались в роботах Л. Ейлера, але систематичне та щільне дослідження таких рівнянь почалося лише в ХХ столітті з огляду на необхідність прикладних наук та особливо теорії регулювання. До теперішнього часу ситуація змінилась і в прикладній науці широко використовуються моделі, що описуються рівняннями з запізненим аргументом (які також називають функціонально-диференціальними рівняннями, диференційно-різницеvими

рівняннями, диференціальні рівняння із запізнілим аргументом, рівняння із наслідком).

Загальноприйнято рівнянням із запізненням називати рівняння відносно невідомої функції $x(t)$, що узгоджує швидкість змінення функції $x(t)$ з її значенням в даних момент часу та попередній момент часу $t - \tau$, де задана постійна $\tau > 0$. Прикладом скалярного рівняння із запізненням є рівняння

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau)), \quad t > t_0, \quad (1.12)$$

де t_0 – заданий початковий момент часу.

Подібного роду рівняння з'являються кожного разу, коли явище яке моделюється містить елемент запізнення, в результаті дії якого і з'являється залежність швидкості від минулого стану. У якості очевидного прикладу можна привести душ. Намагаючись налаштувати бажану температуру води, ми повертаємо крани, але ефект настає не раптово, а через невелику кількість часу, бо воді необхідний якийсь час що подолати відстань від крану до розприскувача. У технічних системах ефект запізнення може бути дуже вагомим, наприклад, якщо мова йде про управління космічними апаратами.

Існування запізнення τ призводить до як до кількісним, так і якісним змінам постановки задачі та властивостях їх роз'язку. Насамперед у якості початкової умови для рівняння (1.12) слід задавати не тільки значення $x(t_0)$, як це буває для звичайних диференціальних рівнянь, але й усі значення шуканої функції $x(t)$ на відрізку $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$. Далі при заданих

початкових умовах рівняння (1.12) можна пров'язувати не в обидві сторони по t (тобто для $t > t_0$ та $t < t_0$), як для звичайних диференціальних рівнянь, а лише вперед по $t > t_0$. Явища, що моделюються рівняннями виду (1.12), істотно безконечномірні, і тому рівняння (1.12) частково подібні рівнянням з частковими похідними.

Запізнення в рівнянні (1.12) може надати істотний вплив на якісну поведінку системи, наприклад, мати дестабілізуючий ефект, призводити до появи коливань, до злипань розв'язків, їх фокусування і т.д.

Як і зазвичай, найбільш ефективними при моделюванні виявляються використання лінійних рівнянь з постійними коефіцієнтами. Так, наприклад, питання про стійкість процесу, модельованого вищезазначеним рівнянням, може бути розв'язний на основі аналізу коренів характеристичного рівняння, яке виявляється трансцендентним, а не алгебраїчним, як це буває для звичайних диференціальних рівнянь.

Дійсні явища можуть моделюватись рівняннями з наслідками і більш складнішою природою, наприклад рівняннями, що містять декілька дискретних запізнювань, розподілене запізнювання, випадкове запізнювання або їх комбінацію. Точний розв'язок цих рівнянь у вигляді явної аналітичної функції можна отримати дуже вкрай рідко, навіть якщо містить інтеграли або суми нескінчених рядів. Тому важливу роль грають способи наближеної або чисельної побудови розв'язку, причому реалізація цих методів пов'язана із застосуванням ЕВМ.

При побудові моделей явищ із малим запізнюванням частіше воно не береться до уваги. Але подібне нехтування малим запізнюванням не є коректним і може призвести до невірних результатів.

У якості прикладу подивимось найпростіше лінійне рівняння з постійним коефіцієнтами:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t - \tau). \quad (1.13)$$

Будемо шукати розв'язок у вигляді $N(t) = e^{\lambda t}$. Тоді

$$\lambda = r e^{-\lambda \tau}. \quad (1.14)$$

На відмінну від звичайних диференціальних рівнянь характеристичне рівняння виявилось не алгебраїчним, а трансцендентним. Характеристичне рівняння може мати дійсні корні, тільки якщо r та λ одного мають один знак. Обмежимося тільки пошуком періодичних розв'язків. Періодичному розв'язку буде відповідати уявне значення λ . Нехай $\lambda = \pm ik$, де $k > 0$. Тоді

$$ik = r e^{-ik\tau} = r(\cos k\tau - i \sin k\tau). \quad (1.15)$$

Звідки випливає, що

$$k = -r \sin k\tau, \quad \cos k\tau = 0.$$

Таким чином,

$$k = \frac{\pi}{2\tau} + \pi n, \quad r = -k,$$

Рівняння

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{\pi}{2\tau}N(t - \tau)$$

має періодичне розв'язання

$$N(t) = A \cos\left(\frac{\pi k}{2\tau}\right).$$

1.4 Огляд математичних моделей із запізнанням

Першу математичну модель для опису динаміки чисельності виду запропонував у 1798р. Т. Мальтус. Згідно цієї моделі при сприятливих умовах будь який вид збільшує свою чисельність за експоненціальним законом $N(t) = e^{rt}N_0$, який задовольняє диференціальне рівняння

$$\dot{N} = rN, \tag{1.16}$$

де параметр r в подальшому носить назву мальтузіанського коефіцієнта лінійного зросту. Якщо чисельність популяцій невеличка, тобто якщо вона не перевищує кількість їжі та території, тоді модель Мальтуса добре підтверджується експериментальними даними. Для того, щоб зважати ще й на гальмуючі фактори Л. А. Кетле та П. Ф. Ферхюльст у 1835 році запропонували математичну модель

$$\dot{N} = r \left(1 - \frac{N}{K} \right) N, \quad (1.17)$$

що описується логістичним диференціальним рівнянням. У рівнянні (1.17) K — це параметр, який називається ємністю середовища проживання та характеризує середній розмір популяції.

Якщо проінтегрувати рівняння (1.17) згідно з [11] використовуючи метод розділення змінних, матимемо:

$$N(t, N_0) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1 \right) e^{-rt}}, \quad t \geq 0.$$

Властивості розв'язків рівняння (1.17):

- коли $N_0 > 0$, буде $N(t, N_0) > 0, t \geq 0$;
- $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t, N_0) = K$;
- коли $N_0 > K$ функція $N(\cdot, N_0)$ спадає, а коли $0 < N_0 < K$ навпаки зростає;
- положення рівноваги $N(t) \equiv K, t \geq 0$, асимптотично стійке.

Логістичний закон добре описує динаміку росту популяцій простіших мікроорганізмів, але використовувати (1.17) для моделювання динаміки чисельності більшості популяцій мікроорганізмів не є правильним. Це можна пояснити тим, що чисельність таких популяцій зазнають циклічні коливання. Внаслідок чого Г. Хатчінсон у 1948 . запропонував модель, що описується диференціальним рівнянням із запізненням:

$$\dot{N}(t) = r \left(1 - \frac{N(t-h)}{K} \right) N(t), \quad (1.18)$$

де K — ємність середовища проживання,

r — коефіцієнт розмноження,

h — параметр, що характеризує середній розмір репродуктивного віку виду. Хатчінсон використовував це рівняння для опису зміни чисельності стада корів на пасовище, Райт — для опису розподілу простих чисел, Фреш та Холм — для опису обороту грошей, Вальтер - для зміни чисельності лососевих.

Рівняння (1.17) моделює найпростішу ситуацію, коли середовище проживання однорідне, міграційні фактори не враховуються, вплив хижаків незначний, а кількість доступної їжі регулярно відновлюється до деякого рівня.

Також існує модель кровотворення Меккі—Гласса. Ця модель описується рівнянням [36]:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -ax(t) + \frac{\beta_0 \theta^n x(t - \tau)}{\theta^n + x^n(t - \tau)}, \quad (1.19)$$

де $x(t)$ — кількість клітин (еритроцитів) в момент часу t ,

перший доданок в правій частині рівняння описує швидкість загибелі,

другий доданок — швидкість виробництва нових клітин. Згідно з експериментальними даними виконуються умови

$$\beta_0 > 0 > a, nB > 2, 6aB > \beta_0, B = \frac{\beta_0 - a}{\beta_0}.$$

Дана модель має єдине нетривіальне положення рівноваги

$$x_0 = \left(\frac{\beta_0}{a} - 1\right)^{1/n} \theta.$$

Але ймовірно, що першою моделлю, що описує динаміку популяції з урахуванням запізнювання, є задача Фібоначчі. Це завдання в "Книзі абака", датованій 1202 р описав італійський математик Леонардо Пізанський (Фібоначчі).

Кількість кроликів в початковий момент часу позначається f_0 . Кількість кроликів в наступні місяці позначається f_i . Зрозуміло, що $f_0 = 1$ та $f_1 = 1$. За винятком цих місяців, в усі наступні місяці кількість кроликів визначається співвідношенням

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}. \quad (1.20)$$

Тобто кроликів стільки, скільки їх було в попередній місяць, плюс потомство від всіх тих кроликів, які народилися два місяці тому і раніше.

З рекурентного співвідношення (1.20) знаходимо, що послідовність чисел Фібоначчі 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, . . .

При $n \rightarrow \infty$ відношення числа кроликів в двох наступних поколіннях дорівнює золотому перерізу. Дійсно, з рекурентного співвідношення (1.20) випливає, що

$$k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{f_{n-1}} = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n-2}}{f_{n-1}} = 1 + k.$$

В результаті чого вийде квадратне рівняння $k^2 - k - 1 = 0$, звідки

$$k = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Тож, загальний член ряду Фібоначчі можна представити у вигляді

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right). \quad (1.21)$$

Одне з найбільш актуальних сучасних застосувань теорії математичного моделювання пов'язане з екологією і присвячено дослідженню цілеспрямованих впливів на процес взаємодії рослин і тварин між собою і навколишнім світом.

Характерною особливістю екологічних систем є те, що їх поведінка залежить від великого числа взаємопов'язаних факторів, облік яких в повному обсязі видається складним. У зв'язку з цим при дослідженні конкретних завдань проводяться різні спрощення. Для опису спрощених моделей використовують різні типи рівнянь: звичайні диференціальні рівняння, рівняння із запізненням, рівняння в частинних похідних, стохастичні рівняння і т.д.

У даних перелічених моделей швидкість зміни чисельності популяції представляється у вигляді суми трьох доданків, перше з яких визначається народжуваністю, друге - смертністю, третє - міграцією. Одна з перших таких моделей запропонована Т.Р. Мальтусом міграція не враховується,

народжуваність і смертність пропорційні чисельності, причому швидкість народжуваності більше швидкості смертності. Відповідно до закону Мальтуса чисельність популяції повинна рости експоненціально, що не завжди справедливо, бо не узгоджується з реальністю. Для подолання цього протиріччя необхідно прийняти до уваги інші фактори і відповідним чином модифікувати модель.

Дж. Кьютелет припустив, що повинно мати місце насичення чисельності популяції. На підставі цього в 1836 році його учень Ферхюльст запропонував для опису чисельності популяції використовувати інше рівняння.

Однак і ця модель не вільна від недоліків. Один з них полягає в тому, що чисельність популяції монотонна і прагне до стаціонарного значення, в той час як численні спостереження показують, що зазвичай чисельність популяції коливається близько стаціонарного розв'язання. Іншим суттєвим недоліком моделей Мальтуса і Ферхюльста є припущення про миттєвість реакції популяції на зміну її чисельності. Однак, зміна чисельності популяції не миттєво позначається на швидкості. Цей факт призводить до необхідності використовувати рівняння із запізненням.

Чисельність популяції не змінюється безперервно, а є дискретною величиною, що відповідає експериментальним даним по перепису реальних популяцій. Якщо припустити, що чисельність N залежить від чисельності в деякі попередні моменти часу, то для опису динаміки чисельності популяцій можна застосувати апарат різницевих рівнянь (відображень). Якщо при цьому зовнішні і внутрішні чинники, що визначають розвиток популяції, залишаються в часі незмінними, то

чисельність популяції у момент часу t може бути описана за допомогою різницевого рівняння у виді:

$$N_t = F(N_{t-1}, N_{t-2}, \dots, N_{t-k}).$$

Тут функція F залежить від чисельності популяції в k попередніх моментах часу. Особливо просто виглядає різницеве рівняння у разі, коли чисельність кожного наступного покоління в популяції N_{t+1} залежить лише від попереднього покоління N_t . Це справедливо для багатьох видів комах. Їх дорослі особини живуть не тривалий час, достатній для відкладання яєць.

2 ОГЛЯД ТА УМОВИ ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО АПАРАТУ

В даному розділі розглядаються основні поняття теорії диференціальних рівнянь з аргументом, що запізнюється та методи розв'язків, що застосовуються при їх розв'язанні.

2.1 Поняття та методи розв'язку диференціальних рівнянь із запізненням

Диференціальне рівняння із запізненням має вигляд [26]

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(t, x(t + \cdot)), \quad (2.1)$$

де $t \in (a, b)$, $a < b$, $x \in R^n$, $x(t + \cdot): [-r, 0] \rightarrow C([-r, 0], R^n)$, $-r \leq \theta \leq 0$, $F(t, \cdot): (a, b) \times C([-r, 0], R^n) \rightarrow R^n$. Рівняння (2.1) називається ще функціонально-диференціальним рівнянням [30].

Число r задає величину післядії. У разі, коли $r = 0$, можна вважати, що післядія відсутня та рівняння перетворюється у звичайне диференціальне рівняння.

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(t, x(t)). \quad (2.2)$$

У рівнянні (2.2) швидкість динамічних процесів визначається станом системи у нинішній момент часу t , тобто у математичній моделі (2.2) не враховується залежність швидкості динамічних процесів від станів системи в моменти часу, попередні t . Облік цієї залежності, властивостей пам'яті і спадковості динамічної системи, післядії в законі взаємодії в динамічній системі призводить до рівняння (2.1).

Розглянемо проблему існування і єдиності розв'язків рівняння (2.1) для класу диференціальних рівнянь з одним зосередженим постійним запізнюванням

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(t, x(t), x(t - \tau)), \quad (2.3)$$

де $F(\cdot, \cdot, \cdot): G \rightarrow R^n$,

область $G \subseteq (a, b) \times R^n \times R^n$, $r > 0$. Рівняння (2.3) ще називають диференційно—різницеvim рівнянням [11].

Неперервна функція $x(t)$, $t \in [\alpha - r, \tilde{\beta}] \subseteq (a - r, b)$, $\alpha < \tilde{\beta}$, для якої виконані умови $(t, x(t), x(t - r)) \in G$ при $t \in [\alpha, \tilde{\beta}]$, називається розв'язанням рівняння (2.3) на відрізку $[\alpha, \tilde{\beta}]$, якщо вона задовольняє рівнянню (2.3) на цьому відрізку. Для виділення єдиного розв'язання традиційно використовують задачу Коші, яку можна сформулювати таким чином. Для початкового моменту $t_0 \in (a, b)$ та початкової функції $\varphi \in C([t_0 - r, t_0], R^n)$ необхідно знайти неперервну функцію $x(t, t_0, \varphi)$, $t \in [t_0 - r, t_0 + \beta] \subseteq (a - r, b)$, $\beta > 0$, що задовольняє рівняння (2.3) на $[t_0, t_0 + \beta]$ та умові $x(t, t_0, \varphi) = \varphi(t)$, $t \in [t_0 - r, t_0]$, для якої точки $(t, x(t, t_0, \varphi), x(t - r, t_0, \varphi)) \in G$ при $t \in [t_0, t_0 + \beta]$. Метод кроків інтеграції диференціальних рівнянь із

запізнюванням дозволяє замінити завдання знаходження розв'язання задачі Коші для рівняння (2.3) послідовністю задач Коші для звичайних диференціальних рівнянь [8] (див. рис. 2.1).

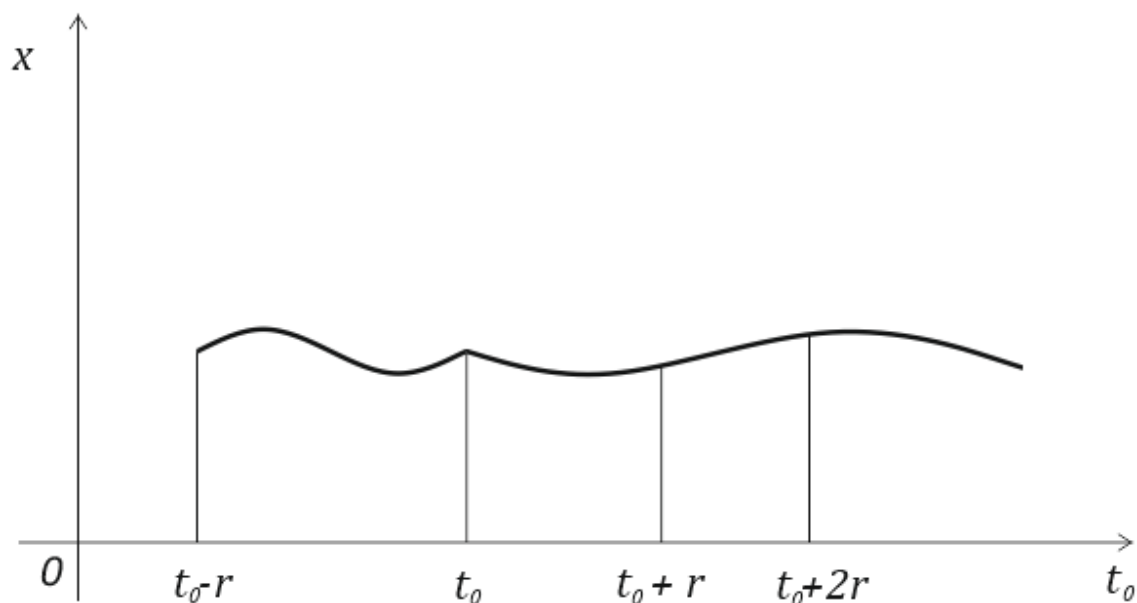


Рисунок 2.1 — Метод кроків інтегрування диференціальних рівнянь із постійним запізненням

У цьому методі вибирається початковий момент $t_0 \in (a, b)$ та на початковому відрізку $[t_0 - r, t_0]$ задається неперервна початкова функція φ . Тоді для знаходження розв'язання $x(t, t_0, \varphi)$ на деякому відрізку $[t_0, t_0 + \beta_1]$, $\beta_1 > 0$, маємо звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x, \varphi(t - r)) \quad (2.4)$$

та початкову умову $x(t_0, t_0, \varphi) = \varphi(t_0)$. Тож отримали задачу Коші для звичайного диференційного рівняння. Якщо відображення $F(·, ·, ·): G \rightarrow R^n$ неперервне та задовольняє локальну умову Ліпшица за другим аргументом в заданій області, тоді розв'язання задачі Коші існує і єдине на деякому відрізку $[t_0, t_0 + \beta_1]$, якщо $(t_0, \varphi(t_0), \varphi(t_0 - r)) \in G$ [27]. Якщо виконані умови продовжності розв'язання $x(t, t_0, \varphi)$ на відрізку $[t_0, t_0 - r]$, тобто $(t, x(t, t_0, \varphi), x(t - r, t_0, \varphi)) \in G$ [35], тоді можна перейти до наступного кроку знаходження розв'язання на деякому відрізку $[t_0 + r, t_0 + r + \beta_2]$, $\beta_2 > 0$. Остання задача зводиться до задачі Коші для звичайного диференційного рівняння

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x, x(t - r, t_0, \varphi)) \quad (2.5)$$

з невідомими початковим значенням $x(t_0 + r, t_0, \varphi)$. Якщо для рівняння (2.5) виконані умови, аналогічні тим, що описувались вище, тоді розв'язання продовжується на відрізок $[t_0 + r, t_0 + 2r]$ і далі повторюється процедура метода кроків.

Метод кроків для диференціального рівняння з постійним запізнюванням (2.3) дозволяє знаходити розв'язок задачі Коши на кінцевому проміжку часу. При цьому крок процедури зведення завдання інтеграції диференціального рівняння із запізнюванням до завдання послідовної інтеграції звичайних диференціальних рівнянь співпадає з величиною запізнювання. При розв'язанні завдань Коши для звичайних диференціальних рівнянь можна використати аналітичні і чисельні методи [7]. Метод кроків можна використати при розв'язанні задачі Коші для

диференціального рівняння з кінцевим числом зосереджених постійних запізнювань [11].

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(t, x(t), x(t - r_1), \dots, x(t - r_m)),$$

де $r_i > 0, i = \overline{1, m}$. При цьому шаг процедури зведення задачі інтегрування диференційного рівняння із запізненням до задачі послідовного інтегрування звичайних диференціальних рівнянь дорівнює $\min_{1 \leq i \leq m} r_i$.

Метод кроків можна використовувати при розв'язанні задачі Коші на скінченному проміжку часу $[\alpha, \tilde{\beta}]$ для диференціального рівняння із зосередженими змінними неперервним запізнюванням [11]

$$\frac{\square x(t)}{dt} = F(t, x(t), x(t - r(t)))$$

при виконанні умови $\min_{t \in [\alpha, \tilde{\beta}]} r(t) > 0$. При цьому шаг процедури зведення задачі інтегрування диференційного рівняння із змінним запізнюванням до задачі послідовного інтегрування звичайних диференціальних рівнянь дорівнює $\min_{t \in [\alpha, \tilde{\beta}]} r(t)$.

Якщо існує момент часу t_* , для якого $r(t_*) = 0$, тоді у околиці цього моменту метод кроків не працює. Для таких рівнянь запропоновані чисельні методи інтеграції [9].

Далі розглянемо наближений метод розв'язання диференціальних рівнянь із аргументом, що запізнюється, а саме метод розкладання невідомої функції з аргументом, що запізнюється, за ступенями запізнювання.

Нехай диференціальне рівняння (2.3) із аргументом, що запізнюється розв'язано відносно функції $x(t - \tau)$, де $\tau > 0$

$$\dot{x}(t - \tau) = F(t, x(t), \dot{x}(t)). \quad (2.6)$$

Якщо при малому запізнюванні τ розкласти функцію $x(t - \tau)$ у ряд Тейлора навколо значення $\tau_0 = 0$

$$x(t - \tau) \cong x(t) - \dot{x}(t)\tau + \frac{\ddot{x}(t)}{2!}\tau^2 + \dots + \frac{(-1)^n x^n(t)}{n!}\tau^n + \dots, \quad (2.7)$$

тоді замість (2.3) будемо мати рівняння

$$x(t) - \dot{x}(t)\tau + \frac{\ddot{x}(t)}{2!}\tau^2 + \dots + \frac{(-1)^n x^n(t)}{n!}\tau^n + \dots = F(t, x(t), \dot{x}(t)). \quad (2.8)$$

Дослідження показали, що досить гарні результати можна отримати, якщо обмежуватись двома членами розкладання

$$\dot{x}(t - \tau) \cong x(t) - \dot{x}(t)\tau. \quad (2.9)$$

Тоді замість (2.8) будемо мати диференціальне рівняння без відхилення аргументу

$$x(t) - \dot{x}(t)\tau = F(t, x(t), \dot{x}(t)). \quad (2.10)$$

В даному розділі був проведений огляд основних понять теорії та особливостей застосування диференціальних рівнянь із аргументом, що запізнюєть. А також були розглянуті методи розв'язків, що застосовуються при їх розв'занні.

3 МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ОБ'ЄКТА ДОСЛІДЖЕННЯ: ОСОБЛИВОСТІ ПОБУДОВИ ТА УМОВИ ЗАСТОСУВАННЯ. ДОСЛІДЖЕННЯ ПОЗИТИВНОТІ ТА ОСОБЛИВОСТІ ВВЕДЕННЯ ЗАПІЗНЕННЯ ДО ОБ'ЄКТА ДОСЛІДЖЕННЯ

В даному розділі проводиться огляд математичної моделі об'єкта дослідження. В першу чергу розглядається безпосередньо досліджувана модель та її властивості, особливості побудови дискретної, неперервної моделей та умови застосування запізнення.

3.1 Огляд об'єкта дослідження та побудова математичної моделі об'єкта дослідження із запізненням

Розглянемо матричну модель популяції з дискретною віковою структурою, що була запропонована П. Леслі і є об'єктом дослідження. Припустимо, що індивідууми популяції розбиті на n класів (наприклад за віком, розміром тіла або будь-якою іншою змінною, що може служити для розбиття цілої популяції на непересічні множини). Розмноження відбувається в певні моменти часу t_1, t_2, \dots, t_n . Тоді в кожний фіксований момент часу популяцію можна представити у вигляді вектор-стовпця

$$X(t_0) = \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \dots \\ x_n(t_0) \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Позначимо $x_i(t), i = 1, \dots, n$, як чисельність індивідуумів в i -му класі на момент часу $t = 0, 1, 2, \dots$. Нехай p_i описує перехід від i -го класу до $(i + 1)$ -го класу, тобто це коефіцієнти виживання, що відображають яка частка особин i -го класу доживе до наступного. Тоді в момент часу $t + 1$ чисельність індивідуумів в i -му класі, які вже були в популяції в момент часу t , можна знайти як

$$\sum_i^{n-1} p_i x_i(t). \quad (3.2)$$

За змістом задачі маємо, що

$$0 < \sum_i p_i x_i(t) \leq 1. \quad (3.3)$$

В моделі Леслі передбачається, що матриця переходів має наступний вигляд:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ p_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_{n-1} & 0 \end{pmatrix}, 0 < p_i \leq 1. \quad (3.4)$$

Введемо в модель процес народжуваності. Позначимо коефіцієнт народжуваності через f_i , тобто число нащадків що належать до i -го класу

жіночої статі та при цьому доживають до наступного моменту часу. Тоді загальне число новонароджених в класі i виглядатиме як

$$\sum_i^n f_i x_i(t). \quad (3.5)$$

В матричній формі це має наступний вигляд:

$$F = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_{n-1} & f_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0 \leq f_i. \quad (3.6)$$

Якщо об'єднаємо процеси переходу між класами (та імовірну смертність) із процесом народжуваності, тобто об'єднати (2.4) та (2.6), отримаємо

$$L = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_{n-1} & f_n \\ p_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_{n-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

де $L = P + F$,

матриця $P = (p_{ij})$ – матриця переходів виду (2.4),

а $F = (f_{ij})$ – матриця народжуваності виду (2.6).

Матриці переходів та народжуваності в загальному випадку можуть залежати від поточної чисельності класів та моменту часу t , тоді маємо

нелінійну задачу. В найпростішому випадку ці матриці постійні і тоді матриця L невід’ємна.

Знаючи структуру матриці L та початковий стан популяції (вектор–стовпець $X(t_0)$), можна спрогнозувати стан популяції в будь–який, наперед заданий, момент часу за допомогою рівнянь:

$$\begin{aligned} X(t_1) &= LX(t), & (3.8) \\ X(t_2) &= LX(t_1) = LLX(t) = L^2X(t), \\ &\dots \\ X(t_n) &= LX(t_{n-1}) = L^nX(t). \end{aligned}$$

Тобто маємо рівняння, що описує дискретну модель Леслі

$$X(t_n) = L^nX(t). \quad (3.9)$$

Насправді в системах завжди є деяке запізнювання в регуляції чисельності, викликане різними причинами. Наприклад, розвиток будь–якої дорослої особини вимагає певного часу. Тому якщо яка–небудь зміна зовнішніх чинників, наприклад, збільшення ресурсів, викличе підвищення продуктивності дорослих особин, та відповідна зміна чисельності відбудеться лише з часом t . Тому рівняння (2.8) слід замінити на рівняння

$$X(t_1) = LX(t - \tau), \quad (3.10)$$

Далі розглянемо неперервний аналог дискретної моделі, описуваною рівнянням (2.8), де t обирається неперервно.

$$\frac{dX(t)}{dt} = (L - E)X(t). \quad (3.11)$$

Отримане рівняння (3.11) описує поведінку біологічної популяційної динаміки за умови неперервного подання часу.

На основі цього рівняння отримаємо рівняння що описує математичну модель об'єкта дослідження із запізненням

$$\frac{dX(t)}{dt} = (L - E)X(t - \tau). \quad (3.12)$$

3.2 Аналіз позитивності об'єкта дослідження

В цьому розділі будемо досліджувати математичну модель П. Леслі. Для того, щоб проаналізувати цю систему на позитивність необхідно перевірити її на виконання певних критеріїв. Головними критеріями є виконання теореми Перрона–Фробеніуса, а для цього вона повинна бути невід'ємною не виродженою та нерозкладною, та відповідність матриці Мецлера.

Матриця Леслі $L = (l_{ij})_{n \times n}$, яка буде безпосередньо аналізуватись, має вигляд:

$$L = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_{n-1} & f_n \\ p_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_{n-1} & 0 \end{pmatrix},$$

де $f_i \geq 0, i = 1 \dots n,$

$1 \geq p_i > 0, i = 1 \dots n - 1.$

Першим кроком, необхідно розглянути одну з основних умов – невід’ємність матриці. За означенням матриця L є невід’ємною, якщо усі її елементи будуть більше, або дорівнювати нулю, тобто при будь-яких i, j $a_{ij} \geq 0$. За умовами матриці Леслі, усі її елементи нульові, окрім тих, що знаходяться в першому рядку, які більше або дорівнюють нулю та під головною діагоналлю, значення котрих знаходиться на інтервалі між нулем та одиницею.

Наступною важливою умовою є невиродженість. Як відомо, матриця є невиродженою, якщо її визначник не дорівнює нулю, тобто $\det(A) \neq 0$.

Перевіримо цю умову безпосередньо на матриці Леслі розмірністю $n = 3$:

$$\begin{aligned} \det(L) &= \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= f_1 \cdot 0 \cdot 0 + f_2 \cdot 0 \cdot 0 + f_3 p_1 p_2 - f_3 \cdot 0 \cdot 0 - f_1 \cdot 0 \cdot p_1 + + f_2 \cdot p_1 \cdot 0 = \\ &= f_3 p_1 p_2. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Отже, робимо висновок, що відсутні нульові корені та матриця Леслі є невиродженою, але за умовою, що $f_3 > 0$, тобто якщо в моделі в групі

старшої вікової категорії будуть розглядатись лише з ненульовою народжуваністю. Звичайно, чисельність пострепродуктивних груп має певний вплив на стан вікового складу молодших груп, але лише при наявності обмежуючих умов загальної кількості популяції. Оскільки модель Леслі не враховує подібних умов, тож умова $f_n > 0$ прийнятна та можна розглядати тільки репродуктивні групи.

Далі розглянемо таку властивість, як нерозкладність матриці. Вважається, що матриця є нерозкладною, якщо шляхом перестановки рядів можливо привести матрицю до виду:

$$L = \begin{vmatrix} A & 0 \\ C & B \end{vmatrix},$$

де матриці A, B – квадратні та під перестановкою рядів розуміється об'єднання перестановки рядків та подібної перестановки стовпців.

Але існують еквівалентні умови доведення нерозкладності. Наприклад, довести, що граф відповідний до досліджуваної матриці сильно-зв'язний. Також існує теорема згідно якої, невід'ємна матриця A є нерозкладною, якщо виконується умова $(E + A)^{n-1} > 0$. У даному випадку дана теорема найнаочніше продемонструє нерозкладність матриці Леслі розмірності $n = 3$. Тож маємо:

$$\begin{aligned}
(E + L)^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} f_1 + 1 & f_2 & f_3 \\ p_1 & 1 & 0 \\ 0 & p_2 & 1 \end{pmatrix}^2 \\
&= \begin{pmatrix} (f_1 + 1)(f_1 + 1)f_2p_1 + f_3 \cdot 0 & f_2(f_1 + 1) + f_2 + f_3p_2 & (f_1 + 1)f_3 + f_2 \cdot 0 + f_3 \\ (f_1 + 1)p_1 + p_1 & f_1p_1 + 1 + p_2 \cdot 0 & p_1f_3 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \\ (f_1 + 1) \cdot 0 + p_1p_2 + 0 \cdot 1 & f_2 \cdot 0 + p_2 + p_2 & f_3 \cdot 0 + p_2 \cdot 0 + 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (f_1 + 1)^2 + f_2p_1 & f_2(f_1 + 1) + f_2 + f_3p_2 & (f_1 + 1) + f_3 \\ p_1(f_1 + 1) + p_1 & p_1f_1 + 1 & p_1f_3 \\ p_1p_2 & p_2 + p_2 & 1 \end{pmatrix} > 0.
\end{aligned}$$

Вочевидь, що усі елементи отриманої матриці є строго додатними, за умови, що була обумовлена раніше, $f_3 > 0$. Отже, приходимо до висновка, що матриця – нерозкладна.

Оскільки усі умови, що ми аналізували раніше виконуються, можемо утверджувати, що дискретна модель Леслі є невід’ємною, нерозкладною та не виродженою. Тож, з огляду на це, можемо розглядати теорему Фробеніуса–Перрона. Згідно до цієї теорему, якщо матриця L не вироджена та невід’ємна тоді вона має таке власне значення λ_{max} , що є спектральним радіусом матриці $\rho(L)$, строго додатним ($\lambda_{max} > 0$) та найбільшим за модулем за усі інші власні значення ($\lambda_{max} \geq \lambda$), а також має відповідний власний невід’ємний вектор p ($Ap = \lambda_{max}p$). Значення власного значення знаходиться в інтервалі:

$$\min_i \sum_j a_{ij} \leq \lambda_{max} \leq \max_i \sum_j a_{ij}.$$

В першу чергу знайдемо характеристичне рівняння матриці Леслі $(L_{ij})_{3 \times 3}$.

$$\begin{aligned}
\det(\lambda I - L) &= \begin{vmatrix} \lambda - f_1 & -f_2 & -f_3 \\ -p_1 & \lambda & 0 \\ 0 & -p_2 & \lambda \end{vmatrix} \\
&= (\lambda - f_1) \cdot \lambda^2 + (-f_2) \cdot 0 + (-f_3) \cdot (-p_1) \cdot (-p_2) - (-f_3) \cdot \lambda \cdot 0 \\
&\quad - (\lambda - f_1) \cdot 0 \cdot (-p_2) - (-f_2) \cdot (-p_1) \cdot \lambda \\
&= \lambda^3 - f_1 \lambda^2 - f_2 p_1 \lambda - f_3 p_1 p_2.
\end{aligned}$$

Наступним кроком знайдемо власні значення розв'язав кубічне рівняння:

$$\lambda^3 - f_1 \lambda^2 - f_2 p_1 \lambda - f_3 p_1 p_2 = 0 \quad (3.14)$$

Але для зручності розв'язання подаємо рівняння у вигляді:

$$\lambda^3 - b \lambda^2 - c \lambda - d = 0. \quad (3.15)$$

Тобто зробили заміну, де $b = f_1$, $c = f_2 p_1$, $d = f_3 p_1 p_2$.

Для розв'язання цього рівняння скористаємось формулою Кардано. Першим етапом необхідно привести його до канонічного вигляду $y^3 + py + q = 0$.

Для цього введемо заміну $\lambda = y - y_0$ та отримаємо:

$$(y - y_0)^3 - b(y - y_0)^2 - c(y - y_0) - d = 0.$$

Скористаємось формулами скороченого множення:

$$\begin{aligned}
y^3 - 3y^2y_0 + 3yy_0^2 - y_0^3 - b(y^2 - 2yy_0 + y_0^2) - cy + cy_0 - d &= 0, \\
y^3 - 3y^2y_0 + 3yy_0^2 - y_0^3 - by^2 + 2byy_0 - by_0^2 - cy + cy_0 - d &= 0, \\
y^3 + y^2(-3y_0 - b) + y(3y_0^2 + 2by_0 - c) - y_0^3 - by_0^2 + cy_0 - d &= 0.
\end{aligned}$$

Тож, щоб позбавитись y^2 введемо заміну $y_0 = -\frac{b}{3}$ та отримаємо кубічний тричлен, в якому відсутній член із другою степеню невідомого:

$$\begin{aligned}
y^3 + y\left(3\left(-\frac{b}{3}\right)^2 + 2b\left(-\frac{b}{3}\right) - c\right) - \left(-\frac{b}{3}\right)^3 - b\left(-\frac{b}{3}\right)^2 + c\left(-\frac{b}{3}\right) - d &= 0, \\
y^3 + y\left(\frac{b^2}{3} - \frac{2b^2}{3} - c\right) + \frac{b^3}{27} - \frac{b^3}{9} - \frac{cb}{3} - d &= 0, \\
y^3 + y\left(\frac{-b^2 - 3c}{3}\right) + \frac{b^3 - 3b^3 - 9cb - 27d}{27} &= 0, \\
y^3 + y\left(\frac{-b^2 - 3c}{3}\right) + \frac{-2b^3 - 9cb - 27d}{27} &= 0,
\end{aligned}$$

$$\text{де } p = \frac{-b^2 - 3c}{3},$$

$$q = \frac{-2b^3 - 9cb - 27d}{27} \text{ дійсні числа.}$$

Оскільки, корінь у загальному за формулою Кардано випадку приймає вигляд

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}}, \quad (3.16)$$

$$\text{де } Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2.$$

Необхідно визначити характер його коренів, а саме визначити знак виразу $\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$, що знаходиться під квадратним коренем:

– якщо $\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 > 0$, тоді кубічне рівняння має три різних кореня: один з яких дійсний, а інші два комплексно спряжені;

– якщо $\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = 0$, тоді усі три кореня кубічного рівняння дійсні, два з яких дорівнюють один одному;

– якщо $\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 < 0$, тоді усі три кореня кубічного рівняння дійсні та відмінні один від одного.

Отже, з огляду на це, знайдемо Q та визначимо його знак:

$$\begin{aligned}
 Q &= \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = \left(\frac{-b^2 - 3c}{9}\right)^3 + \left(\frac{-2b^3 - 9bc - 27d}{54}\right)^2 = \\
 &= \frac{(-b^2 - 3c)^3}{729} + \frac{(-2b^3 - 9bc - 27d)^2}{2916} = \\
 &= \frac{-(b^6 + 9b^4c + 27b^2c^2 + 27c^3)}{729} \\
 &\quad + \frac{4b^6 + 81b^2c^2 + 729d^2 + 36b^4c + 108b^3d + 486bcd}{2916} = \\
 &= \frac{-4b^6 - 36b^4c - 108b^2c^2 - 108c^3 + 4b^6 + 81c^2b^2 + 729d^2 + 36b^4c + 108b^3d}{2916} \\
 &\quad + \frac{486bcd}{2916} = \frac{-27b^2c^2 - 108c^3 + 729d^2 + 108b^3d + 486bcd}{2916} = \\
 &= \frac{-27f_1^2 p_1^2 f_2^2 - 108p_1^3 f_2^3 + 729p_1^2 p_2^2 f_3^2 + 108f_1^3 p_1 p_2 f_3 + 486f_1 p_1^2 f_2 p_2 f_3}{2916}.
 \end{aligned}$$

Таким чином, становиться зрозуміло, що отриманий кінцевий вираз важко проаналізувати на додатність або від'ємність. Тож, розглянемо частину розв'язку, в якому найпростіше визначитись із знаком: $Q = \frac{(-b^2-3c)^3}{729} + \frac{(-2b^3-9bc-27d)^2}{2916}$. Наочно бачимо, що частина $(-2b^3 - 9bc - 27d)^2$ без сумніву більше нуля, оскільки знаходиться під квадратною степеню. Отже необхідно розглянути вираз $(-b^2 - 3c)^3$. Розкладемо його у вигляді

$$(-b^2 - 3c)^3 = -(b^2 + 3c)(b^2 + 3c)^2,$$

де однозначно $(-b^2 - 3c)^2 \geq 0$, а значить розглядаємо $(-b^2 - 3c)$. З огляду на те, що значення коефіцієнтів за умовою моделі невід'ємні, тоді справедливо сказати, що

$$-b^2 - 3c \leq 0,$$

$$-b^2 \leq 3c,$$

$$c \geq -\frac{b^2}{3},$$

$$p_1 f_2 \geq -\frac{f_1^2}{3},$$

$$\frac{p_1 f_2}{f_1^2} \geq -\frac{1}{3}.$$

Отже оскільки, $\frac{p_1 f_2}{f_1^2} \geq 0$, можемо сказати, що $\frac{p_1 f_2}{f_1^2} > -\frac{1}{3}$ та $Q > 0$. На підставі цього можемо стверджувати, що наша система має три кореня, з

яких один дійсних, а два інших комплексно спряжені. Далі наведемо формули для їх знаходження:

$$y_1 = \alpha + \beta,$$

де

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} = \\ &= \sqrt[3]{\sqrt{\frac{2b^3 + 9bc + 27d}{54} + \sqrt{\frac{(-b^2 - 3c)^3}{729} + \frac{(-2b^3 - 9bc - 27d)^2}{2916}}}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{2b^3 + 9bc + 27d}{54} + \sqrt{\frac{-27b^2c^2 - 108c^3 + 729d^2 + 108b^3d + 486bcd}{2916}}} \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt[3]{\frac{2f_1^3 + 9f_1f_2p_1 + 27p_1f_3p_2}{54} + \sqrt{\frac{-27f_1^2f_2^2p_1^2 - 108f_2^3p_1^3 + 729p_1^2f_3^2p_2^2 + 108f_1^3p_1f_3p_2 + 486f_1f_2p_1^2f_3p_2'}{2916}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}} = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{2b^3 + 9bc + 27d}{54} - \sqrt{\frac{(-b^2 - 3c)^3}{729} + \frac{(-2b^3 - 9bc - 27d)^2}{2916}}}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{2b^3 + 9bc + 27d}{54} - \sqrt{\frac{-27b^2c^2 - 108c^3 + 729d^2 + 108b^3d + 486bcd}{2916}}} \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$= \sqrt[3]{\frac{2f_1^3 + 9f_1f_2p_1 + 27p_1f_3p_2}{54} - \sqrt{\frac{-27f_1^2f_2^2p_1^2 - 108f_2^3p_1^3 + 729p_1^2f_3^2p_2^2 + 108f_1^3p_1f_3p_2 + 486f_1f_2p_1^2f_3p_2}{2916}}}$$

та отримаємо корені :

$$y_1 = \alpha + \beta = \sqrt[3]{\frac{2b^3 + 9bc + 27d}{54} + \sqrt{\frac{(-b^2 - 3c)^3}{729} + \frac{(-2b^3 - 9bc - 27d)^2}{2916}}} + \sqrt[3]{\frac{2b^3 + 9bc + 27d}{54} - \sqrt{\frac{(-b^2 - 3c)^3}{729} + \frac{(-2b^3 - 9bc - 27d)^2}{2916}}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{2f_1^3 + 9f_1f_2p_1 + 27p_1f_3p_2}{54} + \sqrt{\frac{(-f_1^2 - 3f_2p_1)^3}{729} + \frac{(-2f_1^3 - 9f_1f_2p_1 - 27p_1f_3p_2)^2}{2916}}} + \sqrt[3]{\frac{2f_1^3 + 9f_1f_2p_1 + 27p_1f_3p_2}{54} - \sqrt{\frac{(-f_1^2 - 3f_2p_1)^3}{729} + \frac{(-2f_1^3 - 9f_1f_2p_1 - 27p_1f_3p_2)^2}{2916}}}, \quad (3.19)$$

$$y_{2,3} = -\frac{\alpha + \beta}{2} \pm i\sqrt{3}\frac{\alpha - \beta}{2} = -\frac{\sqrt[3]{\frac{2b^3 + 9bc + 27d}{54} + \sqrt{\frac{(-b^2 - 3c)^3}{729} + \frac{(-2b^3 - 9bc - 27d)^2}{2916}}} + \sqrt[3]{\frac{2b^3 + 9bc + 27d}{54} - \sqrt{\frac{(-b^2 - 3c)^3}{729} + \frac{(-2b^3 - 9bc - 27d)^2}{2916}}}}{2} -$$

$$\begin{aligned}
& -\sqrt[3]{\frac{\frac{2b^3 + 9bc + 27d}{54} - \sqrt{\frac{(-b^2 - 3c)^3}{729} + \frac{(-2b^3 - 9bc - 27d)^2}{2916}}}{2}} \\
& \pm i\sqrt{3} \sqrt[3]{\frac{\frac{2b^3 + 9bc + 27d}{54} + \sqrt{\frac{(-b^2 - 3c)^3}{729} + \frac{(-2b^3 - 9bc - 27d)^2}{2916}}}{2}} \\
& -\sqrt[3]{\frac{\frac{2b^3 + 9bc + 27d}{54} - \sqrt{\frac{(-b^2 - 3c)^3}{729} + \frac{(-2b^3 - 9bc - 27d)^2}{2916}}}{2}}.
\end{aligned}$$

Проаналізував отриманні корені, які є власними значеннями досліджуємої системи приходимо до висновку, що корень y_1 і є власне значення λ_{max} , бо воно є додатне на більше за інші власні значення за модулем, відповідно до теореми Фробеніуса – Перрона.

Оскільки усі умови, що ми аналізували раніше виконуються, можемо утверджувати, що дискретна модель Леслі є невід’ємною, нерозкладною та не виродженою. Тож, з огляду на це, можемо розглядати теорему Фробеніуса–Перрона. Згідно до цієї теореми, якщо матриця L не вироджена та невід’ємна тоді вона має таке власне значення λ_{max} , що є спектральним радіусом матриці $\rho(L)$, строго додатним ($\lambda_{max} > 0$) та найбільшим за модулем за усі інші власні значення ($\lambda_{max} \geq \lambda$), а також має відповідний власний невід’ємний вектор p ($Ap = \lambda_{max}p$). Значення власного значення знаходиться в інтервалі:

$$\min_i \sum_j a_{ij} \leq \lambda_{max} \leq \max_i \sum_j a_{ij}.$$

В першу чергу знайдемо характеристичне рівняння матриці Леслі $(L_{ij})_{3 \times 3}$.

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - L) &= \begin{vmatrix} \lambda - f_1 & -f_2 & -f_3 \\ -p_1 & \lambda & 0 \\ 0 & -p_2 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - f_1) \cdot \lambda^2 + (-f_2) \cdot 0 + (-f_3) \cdot (-p_1) \cdot (-p_2) - (-f_3) \cdot \lambda \cdot 0 \\ &\quad - (\lambda - f_1) \cdot 0 \cdot (-p_2) - (-f_2) \cdot (-p_1) \cdot \lambda \\ &= \lambda^3 - f_1 \lambda^2 - f_2 p_1 \lambda - f_3 p_1 p_2. \end{aligned}$$

Наступним кроком знайдемо власні значення розв'язав кубічне рівняння:

$$\lambda^3 - f_1 \lambda^2 - f_2 p_1 \lambda - f_3 p_1 p_2 = 0. \quad (3.20)$$

Але для зручності розв'язання подаємо рівняння у вигляді:

$$\lambda^3 - b \lambda^2 - c \lambda - d = 0. \quad (3.21)$$

Тобто зробили заміну, де $b = f_1$, $c = f_2 p_1$, $d = f_3 p_1 p_2$.

Для розв'язання цього рівняння скористаємось формулою Кардано. Першим етапом необхідно привести його до канонічного вигляду $y^3 + py + q = 0$.

Для цього введемо заміну $\lambda = y - y_0$ та отримаємо:

$$(y - y_0)^3 - b(y - y_0)^2 - c(y - y_0) - d = 0.$$

Скористаємось формулами скороченого множення:

$$y^3 - 3y^2y_0 + 3yy_0^2 - y_0^3 - b(y^2 - 2yy_0 + y_0^2) - cy + cy_0 - d = 0,$$

$$y^3 - 3y^2y_0 + 3yy_0^2 - y_0^3 - by^2 + 2byy_0 - by_0^2 - cy + cy_0 - d = 0,$$

$$y^3 + y^2(-3y_0 - b) + y(3y_0^2 + 2by_0 - c) - y_0^3 - by_0^2 + cy_0 - d = 0.$$

Тож, щоб позбавитись y^2 введемо заміну $y_0 = -\frac{b}{3}$ та отримаємо кубічний тричлен, в якому відсутній член із другою степеню невідомого:

$$y^3 + y\left(3\left(-\frac{b}{3}\right)^2 + 2b\left(-\frac{b}{3}\right) - c\right) - \left(-\frac{b}{3}\right)^3 - b\left(-\frac{b}{3}\right)^2 + c\left(-\frac{b}{3}\right) - d = 0,$$

$$y^3 + y\left(\frac{b^2}{3} - \frac{2b^2}{3} - c\right) + \frac{b^3}{27} - \frac{b^3}{9} - \frac{cb}{3} - d = 0,$$

$$y^3 + y\left(\frac{-b^2 - 3c}{3}\right) + \frac{b^3 - 3b^3 - 9cb - 27d}{27} = 0,$$

$$y^3 + y\left(\frac{-b^2 - 3c}{3}\right) + \frac{-2b^3 - 9cb - 27d}{27} = 0,$$

де $p = \frac{-b^2 - 3c}{3}$ та $q = \frac{-2b^3 - 9cb - 27d}{27}$ дійсні числа.

Оскільки, корінь y загальному за формулою Кардано випадку приймає вигляд

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}}, \quad (3.22)$$

$$\text{де } Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2.$$

Необхідно визначити характер його коренів, а саме визначити знак виразу $\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$, що знаходиться під квадратним коренем:

– якщо $\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 > 0$, тоді кубічне рівняння має три різних кореня: один з яких дійсний, а інші два комплексно спряжені;

– якщо $\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = 0$, тоді усі три кореня кубічного рівняння дійсні, два з яких дорівнюють один одному;

– якщо $\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 < 0$, тоді усі три кореня кубічного рівняння дійсні та відмінні один від одного.

Отже, з огляду на це, знайдемо Q та визначимо його знак:

$$\begin{aligned} Q &= \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = \left(\frac{-b^2 - 3c}{9}\right)^3 + \left(\frac{-2b^3 - 9bc - 27d}{54}\right)^2 = \\ &= \frac{(-b^2 - 3c)^3}{729} + \frac{(-2b^3 - 9bc - 27d)^2}{2916} = \\ &= \frac{-(b^6 + 9b^4c + 27b^2c^2 + 27c^3)}{729} \\ &+ \frac{4b^6 + 81b^2c^2 + 729d^2 + 36b^4c + 108b^3d + 486bcd}{2916} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-4b^6 - 36b^4c - 108b^2c^2 - 108c^3 + 4b^6 + 81c^2b^2 + 729d^2 + 36b^4c + 108b^3d}{2916} \\
&+ \frac{486bcd}{2916} = \frac{-27b^2c^2 - 108c^3 + 729d^2 + 108b^3d + 486bcd}{2916} \\
&= \frac{-27f_1^2 p_1^2 f_2^2 - 108p_1^3 f_2^3 + 729p_1^2 p_2^2 f_3^2 + 108f_1^3 p_1 p_2 f_3 + 486f_1 p_1^2 f_2 p_2 f_3}{2916}.
\end{aligned}$$

Таким чином, становиться зрозуміло, що отриманий кінцевий вираз важко проаналізувати на додатність або від'ємність. Тож, розглянемо частину розв'язку, в якій найпростіше визначитись із знаком: $Q = \frac{(-b^2-3c)^3}{729} + \frac{(-2b^3-9bc-27d)^2}{2916}$. Наочно бачимо, що частина $(-2b^3 - 9bc - 27d)^2$ без сумніву більше нуля, оскільки знаходиться під квадратною степеню. Отже необхідно розглянути вираз $(-b^2 - 3c)^3$. Розкладемо його у вигляді

$$(-b^2 - 3c)^3 = -(b^2 + 3c)(b^2 + 3c)^2,$$

де однозначно $(-b^2 - 3c)^2 \geq 0$, а значить розглядаємо $(-b^2 - 3c)$. З огляду на те, що значення коефіцієнтів за умовою моделі невід'ємні, тоді справедливо сказати, що

$$-b^2 - 3c \leq 0,$$

$$-b^2 \leq 3c,$$

$$c \geq -\frac{b^2}{3},$$

$$p_1 f_2 \geq -\frac{f_1^2}{3},$$

$$\frac{p_1 f_2}{f_1^2} \geq -\frac{1}{3}.$$

Отже оскільки, $\frac{p_1 f_2}{f_1^2} \geq 0$, можемо сказати, що $\frac{p_1 f_2}{f_1^2} > -\frac{1}{3}$ та $Q > 0$. На підставі цього можемо стверджувати, що наша система має три кореня, з яких один дійсних, а два інших комплексно спряжені. Далі наведемо формули для їх знаходження:

$$y_1 = \alpha + \beta,$$

де

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} = \\ &= \sqrt[3]{\frac{2b^3 + 9bc + 27d}{54} + \sqrt{\frac{(-b^2 - 3c)^3}{729} + \frac{(-2b^3 - 9bc - 27d)^2}{2916}}} = \\ &= \sqrt[3]{\frac{2b^3 + 9bc + 27d}{54} + \sqrt{\frac{-27b^2c^2 - 108c^3 + 729d^2 + 108b^3d + 486bcd}{2916}}} = \\ &= \sqrt[3]{\frac{2f_1^3 + 9f_1f_2p_1 + 27p_1f_3p_2}{54} + \sqrt{\frac{-27f_1^2f_2^2p_1^2 - 108f_2^3p_1^3 + 729p_1^2f_3^2p_2^2 + 108f_1^3p_1f_3p_2 + 486f_1f_2p_1^2f_3p_2}{2916}}}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned}
\beta &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}} = \sqrt[3]{\frac{2b^3 + 9bc + 27d}{54} - \sqrt{\frac{(-b^2 - 3c)^3}{729} + \frac{(-2b^3 - 9bc - 27d)^2}{2916}}} \\
&= \sqrt[3]{\frac{2b^3 + 9bc + 27d}{54} - \sqrt{\frac{-27b^2c^2 - 108c^3 + 729d^2 + 108b^3d + 486bcd}{2916}}} = \\
&= \sqrt[3]{\frac{2f_1^3 + 9f_1f_2p_1 + 27p_1f_3p_2}{54} - \sqrt{\frac{-27f_1^2f_2^2p_1^2 - 108f_2^3p_1^3 + 729p_1^2f_2^2p_2^2 + 108f_1^3p_1f_3p_2 + 486f_1f_2p_1^2f_3p_2}{2916}}} \quad (3.24)
\end{aligned}$$

та отримаємо корені :

$$\begin{aligned}
y_1 = \alpha + \beta &= \sqrt[3]{\frac{2b^3 + 9bc + 27d}{54} + \sqrt{\frac{(-b^2 - 3c)^3}{729} + \frac{(-2b^3 - 9bc - 27d)^2}{2916}}} \\
&+ \sqrt[3]{\frac{2b^3 + 9bc + 27d}{54} - \sqrt{\frac{(-b^2 - 3c)^3}{729} + \frac{(-2b^3 - 9bc - 27d)^2}{2916}}} = \\
&= \sqrt[3]{\frac{2f_1^3 + 9f_1f_2p_1 + 27p_1f_3p_2}{54} + \sqrt{\frac{(-f_1^2 - 3f_2p_1)^3}{729} + \frac{(-2f_1^3 - 9f_1f_2p_1 - 27p_1f_3p_2)^2}{2916}}} + \\
&+ \sqrt[3]{\frac{2f_1^3 + 9f_1f_2p_1 + 27p_1f_3p_2}{54} - \sqrt{\frac{(-f_1^2 - 3f_2p_1)^3}{729} + \frac{(-2f_1^3 - 9f_1f_2p_1 - 27p_1f_3p_2)^2}{2916}}} \quad (2.25)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_{2,3} = & -\frac{\alpha + \beta}{2} \pm i\sqrt{3} \frac{\alpha - \beta}{2} = -\frac{\sqrt[3]{\frac{2b^3 + 9bc + 27d}{54} + \sqrt{\frac{(-b^2 - 3c)^3}{729} + \frac{(-2b^3 - 9bc - 27d)^2}{2916}}} + \sqrt[3]{\frac{2b^3 + 9bc + 27d}{54} - \sqrt{\frac{(-b^2 - 3c)^3}{729} + \frac{(-2b^3 - 9bc - 27d)^2}{2916}}}}{2} \\
& \pm i\sqrt{3} \frac{\sqrt[3]{\frac{2b^3 + 9bc + 27d}{54} + \sqrt{\frac{(-b^2 - 3c)^3}{729} + \frac{(-2b^3 - 9bc - 27d)^2}{2916}}} - \sqrt[3]{\frac{2b^3 + 9bc + 27d}{54} - \sqrt{\frac{(-b^2 - 3c)^3}{729} + \frac{(-2b^3 - 9bc - 27d)^2}{2916}}}}{2}.
\end{aligned}$$

Проаналізував отриманні корені, які є власними значеннями досліджуємої системи приходимо до висновку, що корень y_1 і є власне значення λ_{max} , бо воно є додатне на більше за інші власні значення за модулем, відповідно до теореми Фробеніуса – Перрона.

Також, з цієї теореми випливає, що якщо існує $L \geq 0$ та $\lambda_{max} = \rho(L)$ – дійсне та невід'ємне, необхідно розглянути три випадки:

– якщо $\lambda_{max} = \rho(L) > 1$ із відповідним власним вектором $p \geq 0$, тоді p також власний вектор матриці $(I - L)^{-1}$ і тому $(I - L)^{-1}p = \frac{p}{1 - \rho(L)}$. Оскільки $\rho(L) > 0$ виходить, що $\frac{p}{1 - \rho(L)} < 0$, а значить $(I - A)^{-1}$ не може бути невід'ємною;

- якщо $\lambda_{max} = \rho(L) = 1$ тоді матриці $(I - L)^{-1}$ – не існує;
- якщо $\lambda_{max} = \rho(L) < 1$ тоді матриця $(I - L)^{-1}$ – невід’ємна.

Це також, каже про те, що якщо $\rho(L) > 1$, тоді популяційна модель Леслі неперервно зростає; $\rho(L) = 1$, тоді популяційна модель Леслі має нестабільну динаміку росту; $\rho(L) = 1$, тоді популяційна модель Леслі зменшується.

$$\begin{aligned} \Delta(I - L) &= \begin{vmatrix} 1 - f_1 & -f_2 & -f_3 \\ -p_1 & 1 & 0 \\ 0 & -p_2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (1 - f_1) \cdot 1 \cdot 1 + (-f_2) \cdot 0 + (-f_3)(-p_1)(-p_2) - (-f_3) \cdot 0 - (1 - f_1)(-p_2) \cdot 0 \\ &\quad - (-f_2)(-p_1) \cdot 1 = 1 - f_1 - f_3 p_1 p_2 - p_1 f_2, \end{aligned}$$

$$(I - L)_*^T = \begin{pmatrix} 1 & p_1 & p_1 p_2 \\ f_2 + p_2 f_3 & 1 - f_1 & p_2 - f_1 p_2 \\ f_3 & p_1 f_3 & p_1 f_1 f_2 - p_1 f_2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & f_2 + p_2 f_3 & f_3 \\ p_1 & 1 - f_1 & p_1 f_3 \\ p_1 p_2 & p_2(1 - f_1) & p_1 f_2(f_1 - 1) \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} (I - L)^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 - f_1 & -f_2 & -f_3 \\ -p_1 & 1 & 0 \\ 0 & -p_2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta(I - L)} (I - L)_*^T = \\ &= \frac{1}{1 - f_1 - f_3 p_1 p_2 - p_1 f_2} \begin{pmatrix} 1 & f_2 + p_2 f_3 & f_3 \\ p_1 & 1 - f_1 & p_1 f_3 \\ p_1 p_2 & p_2(1 - f_1) & 1 - f_1 - p_1 f_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

У випадку, якщо $\Delta(I - L) = \frac{1}{1 - f_1 - f_3 p_1 p_2 - p_1 f_2} < 0$ у (2.25), то матриця $(I - L)^{-1}$ не може бути невід’ємною, тому можна вважати, що популяційна дискретна модель Леслі позитивна та зростає неперервно, а якщо $\Delta(I - L) = \frac{1}{1 - f_1 - f_3 p_1 p_2 - p_1 f_2} > 0$, тоді популяційна дискретна модель Леслі позитивна неперервно зменшується.

Проаналізуємо на позитивність також неперервну модель Леслі, яка має вигляд:

$$\dot{x}(t) = (L - E)x(t),$$

де

$$(L - I) = \begin{pmatrix} f_1 - 1 & f_2 & f_3 \\ p_1 & -1 & 0 \\ 0 & p_2 & -1 \end{pmatrix} f_i \geq 0,$$

де $i = 1 \dots n$;

$$1 \leq p_i \leq 0, i = 1 \dots n - 1.$$

У випадку з неперервним часом, увага концентрується на матрицях Мецлера[20]. Дійсна матриця L розмірності $n \times n$ є матрицею Мецлера, якщо l_{ij} усіх $i \neq j$. Простіше кажучи, L є матрицею Мецлера, коли усі її недіагональні елементи невід'ємні. Таким чином, вважаємо однорідну систему неперервного часу $\dot{x}(t) = (L - I)x(t)$ – позитивною, якщо матриця $(L - I)$ буде матрицею Мецлера, а вона дійсно має невід'ємні елементи поза діагоналлю, оскільки сама матриця L є невід'ємною и при відніманні від не одиничної отримаємо від'ємні значення по діагоналі. Тоді справедлива теорема, яка встановлює, що

Якщо матриця $(L - I)$ є матрицею Мецлера, тоді існує такий дійсне власне значення λ_0 та власний вектор p_0 такі, що $(L - I)p_0 = \lambda_0 p_0$ та якщо $\lambda_0 \neq \lambda$, тобто це власне значення буде відрізнитись від інших, то можна

сказати, що $\lambda_0 > \text{Re}(\lambda)$. Перевіримо цю теорему, а для цього необхідно в першу чергу, знайти характеристичне рівняння:

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - L + I) &= \begin{vmatrix} \lambda - f_1 + 1 & -f_2 & -f_3 \\ -p_1 & \lambda + 1 & 0 \\ 0 & -p_2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - f_1 + 1)(\lambda + 1)^2 + 0 + (-f_3) \cdot (-p_1) \cdot (-p_2) - 0 - 0 - (-f_2) \cdot (-p_1)(\lambda + 1) \\ &= \lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - f_1\lambda^2 - 2f_1\lambda - f_1 + \lambda^2 + 2\lambda + 1 - f_2p_1\lambda - f_2p_1 - f_3p_1p_2 = \\ &= \lambda^3 + 3\lambda^2 - f_1\lambda^2 + 3\lambda - 2f_1\lambda - f_2p_1\lambda - f_1 - f_2p_1 - f_3p_1p_2 + 1 \\ &= \lambda^3 + \lambda^2(3 - f_1) + \lambda(3 - 2f_1 - f_2p_1) - f_1 - f_2p_1 - f_3p_1p_2 + 1 \\ &= \lambda^3 - \lambda^2(f_1 - 3) - \lambda(f_2p_1 + 2f_1 - 3) - (f_1 + f_2p_1 + f_3p_1p_2 - 1). \end{aligned}$$

Тобто маємо характеристичний поліном

$$\lambda^3 - \lambda^2(f_1 - 3) - \lambda(f_2p_1 + 2f_1 - 3) - (f_1 + f_2p_1 + f_3p_1p_2 - 1) = 0. \quad (3.27)$$

Який можна подати у вигляді: $\lambda^3 - b\lambda^2 - c\lambda - d = 0$, вигляд якого співпадає з (2.17), а значить попередні результати придатні до застосування і зараз. Тобто маємо, що корені цього полінома мають вигляд:

$$\begin{aligned} y_1 = \alpha + \beta &= \sqrt[3]{\sqrt{\frac{2b^3 + 9bc + 27d}{54} + \sqrt{\frac{(-b^2 - 3c)^3}{729} + \frac{(-2b^3 - 9bc - 27d)^2}{2916}}} +} \\ &+ \sqrt[3]{\sqrt{\frac{2b^3 + 9bc + 27d}{54} - \sqrt{\frac{(-b^2 - 3c)^3}{729} + \frac{(-2b^3 - 9bc - 27d)^2}{2916}}} =} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt[3]{\frac{2f_1^3 + 9f_1f_2p_1 + 27f_3p_1p_2}{54} + \sqrt{\frac{(-7f_1 - 3p_1f_2 + 12)^3}{729} + \frac{(2f_1^3 + 9f_1f_2p_1 + 27f_3p_1p_2)^2}{2916}}} + \\
&+ \sqrt[3]{\frac{2f_1^3 + 9f_1f_2p_1 + 27f_3p_1p_2}{54} - \sqrt{\frac{(-7f_1 - 3p_1f_2 + 12)^3}{729} + \frac{(2f_1^3 + 9f_1f_2p_1 + 27f_3p_1p_2)^2}{2916}}}, \quad (3.28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_{2,3} = -\frac{\alpha + \beta}{2} \pm i\sqrt{3}\frac{\alpha - \beta}{2} = & -\frac{\sqrt[3]{\frac{2b^3 + 9bc + 27d}{54} + \sqrt{\frac{(-b^2 - 3c)^3}{729} + \frac{(-2b^3 - 9bc - 27d)^2}{2916}}} + \\
& -\sqrt[3]{\frac{2b^3 + 9bc + 27d}{54} - \sqrt{\frac{(-b^2 - 3c)^3}{729} + \frac{(-2b^3 - 9bc - 27d)^2}{2916}}}{2} \pm \\
& \pm i\sqrt{3}\frac{\sqrt[3]{\frac{2b^3 + 9bc + 27d}{54} + \sqrt{\frac{(-b^2 - 3c)^3}{729} + \frac{(-2b^3 - 9bc - 27d)^2}{2916}}} - \\
& -\sqrt[3]{\frac{2b^3 + 9bc + 27d}{54} - \sqrt{\frac{(-b^2 - 3c)^3}{729} + \frac{(-2b^3 - 9bc - 27d)^2}{2916}}}{2} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt[3]{\frac{2f_1^3 + 9f_1f_2p_1 + 27f_3p_1p_2}{54} + \sqrt{\frac{(-7f_1 - 3p_1f_2 + 12)^3}{729} + \frac{(2f_1^3 + 9f_1f_2p_1 + 27f_3p_1p_2)^2}{2916}}}}{2} - \\
&\frac{\sqrt[3]{\frac{2f_1^3 + 9f_1f_2p_1 + 27f_3p_1p_2}{54} - \sqrt{\frac{(-7f_1 - 3p_1f_2 + 12)^3}{729} + \frac{(2f_1^3 + 9f_1f_2p_1 + 27f_3p_1p_2)^2}{2916}}}}{2} \pm \\
&\pm i\sqrt{3} \frac{\sqrt[3]{\frac{2f_1^3 + 9f_1f_2p_1 + 27f_3p_1p_2}{54} + \sqrt{\frac{(-7f_1 - 3p_1f_2 + 12)^3}{729} + \frac{(2f_1^3 + 9f_1f_2p_1 + 27f_3p_1p_2)^2}{2916}}}}{2} - \\
&\frac{\sqrt[3]{\frac{2f_1^3 + 9f_1f_2p_1 + 27f_3p_1p_2}{54} - \sqrt{\frac{(-7f_1 - 3p_1f_2 + 12)^3}{729} + \frac{(2f_1^3 + 9f_1f_2p_1 + 27f_3p_1p_2)^2}{2916}}}}{2}, \quad (3.29)
\end{aligned}$$

де $y_1 = \lambda_0$,

$y_{2,3} = \lambda_{1,2}$.

З огляду на те, що $\lambda_0 = \alpha + \beta$, а $Re(\lambda_{1,2}) = -\frac{\alpha + \beta}{2}$ можна з певністю сказати, що $\lambda_0 > Re(\lambda_{1,2})$, тобто λ_0 приймає значення дійсне додатне значення, а $\lambda_{1,2}$ відємні.

У даному розділі проводився аналіз динамічної системи з постійними коефіцієнтами на позитивність. Системи дискретної моделі Леслі є

позитивною, якщо в моделі остання вікова група буде розглядатись лише репродуктивна.

Отже, далі розглянемо приведений вище аналіз на конкретному прикладі матриці Леслі 3×3 :

$$L = \begin{pmatrix} 0.28 & 1.2 & 0.5 \\ 0.51 & 0 & 0 \\ 0 & 0.81 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.30)$$

Знайдемо характеристичне рівняння дискретної моделі(3.10), для цього спочатку знайдемо визначник матриці

$$\begin{aligned} \det(\lambda E - L) &= \begin{vmatrix} \lambda - 0.28 & -1.2 & -0.5 \\ -0.51 & \lambda & 0 \\ 0 & -0.81 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 0.28)\lambda^2 - 0.612\lambda - 0.2 \\ &= \lambda^3 + 0.28\lambda^2 - 0.612\lambda - 0.2. \end{aligned}$$

Корені даного характеристичного рівняння мають вигляд: $\lambda_1 = 1.04$, $\lambda_{2,3} = -0.383 \pm 0,2i$. В даному випадку наочно видно, що дійсно існує такий дійсний та додатній корень характеристичного рівняння, що за модулем більший дійсної частини інших коренів.

Далі проведемо ті ж розрахунки тільки для безперервної моделі(3.12) на основі тієї ж самої матриці Леслі (3.30). Спочатку знайдемо характеристичне рівняння

$$\begin{aligned}
\det(\lambda E - L - E) &= \begin{pmatrix} \lambda + 0.72 & -1.2 & -0.5 \\ -0.51 & \lambda + 1 & 0 \\ 0 & -0.81 & \lambda + 1 \end{pmatrix} = \\
&= (\lambda + 0.72)(\lambda + 1)^2 - 0.612(\lambda + 1) - 0.2 = \\
&= (\lambda + 0.72)(\lambda^2 + 2\lambda + 1) - 0.612(\lambda + 1) - 0.2 = \\
&= \lambda^3 + 0.28\lambda^2 - 0.612\lambda - 0.2.
\end{aligned}$$

Корені даного характеристичного рівняння мають вигляд: $\lambda_1 = 1.04$, $\lambda_{2,3} = -0.383 \pm 0,2i$. В даному випадку наочно видно, що дійсно існує такий дійсний та додатній корень характеристичного рівняння, що за модулем більший дійсної частини інших коренів, а також те, що вони збігаються із коренями дискретної моделі.

3.3 Особливості застосування математичної моделі об'єкта дослідження із запізненням

Розглянемо диференціальне рівняння (3.12) з аргументом, що запізнюється

$$\frac{dX(t)}{dt} = (L - E)X(t - \tau),$$

де $\tau \geq 0$,

$t - \tau \geq 0$, із заданою початковою функцією $X(t) = \varphi_0(t)$ при $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$. Необхідно знайти розв'язок рівняння (3.12) при $t \geq t_0$.

Для знаходження розв'язку рівняння (3.12) при $t \geq t_0$ треба скористатись методом кроків (або метод послідовного інтегрування). Суть метода кроків полягає в тому, що спочатку знаходиться розв'язок рівняння (3.12) для $t_0 \leq t \leq t_0 + \tau$, потім для $t_0 + \tau \leq t \leq t_0 + 2\tau$ і т.д. При цьому необхідно помітити, наприклад, що оскільки в області $t_0 \leq t \leq t_0 + \tau$ аргумент $t - \tau$ змінюється в межах $t_0 - \tau \leq t - \tau \leq t$, в рівнянні (3.12) в цій області замість $x(t - \tau)$ можна взяти початкову функцію $\varphi_0(t - \tau)$. Тоді вийде так, що для знаходження рівняння (3.12) в області $t_0 \leq t \leq t_0 + \tau$ треба розв'язати звичайне диференціальне рівняння без запізнення у вигляді

$$\frac{dx}{dt} = (L - E)\varphi_0(t - \tau), \quad (3.31)$$

при $t_0 \leq t \leq t_0 + \tau$, із початковою умовою $X(t_0) = \varphi(t_0)$ (див. рис. 2.1).

Далі, після того, як було знайдено розв'язання цієї початкової задачі у вигляді $X(t) = \varphi_1(t)$, можна поставити задачу знаходження розв'язку на відрізку $t_0 + \tau \leq t \leq t_0 + 2\tau$ і т.д.

Тож, маємо:

$$\frac{dx}{dt} = (L - E)\varphi_0(t - \tau),$$

при $t_0 \leq t \leq t_0 + \tau$, $X(t_0) = \varphi(t_0)$,

$$\frac{dx}{dt} = (L - E)\varphi_1(t - \tau), \quad (3.32)$$

при $t_0 + \tau \leq t \leq t_0 + 2\tau$, $X(t_0 + \tau) = \varphi_1(t_0 + \tau)$,

$$\frac{dx}{dt} = (L - E)\varphi_2(t - \tau), \quad (3.33)$$

при $t_0 + 2\tau \leq t \leq t_0 + 3\tau$, $X(t_0 + 2\tau) = \varphi_2(t_0 + 2\tau)$,

$$\frac{dx}{dt} = (L - E)\varphi_n(t - \tau), \quad (3.34)$$

при $t_0 + n\tau \leq t \leq t_0 + (n + 1)\tau$, $X(t_0 + n\tau) = \varphi_n(t_0 + n\tau)$,

де $\varphi_i(t)$ є розв'язок даної початкової задачі на відрізку $t_0 + (i - 1)\tau \leq t \leq t_0 + i\tau$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n, \dots$). Загальний розв'язок тоді має вигляд

$$X(t) = (L - E) \int \varphi_n(t - \tau) dt$$

Цей метод кроків розв'язання диференціального рівняння із аргументом, що запізнюється (3.12) дозволяє визначити розв'язок $X(t)$ на деякому скінченному відрізку зміни t .

Розглянемо приклад розв'язання матрично диференціального рівняння із запізненням, де матриця L розмірності 2×2 має вигляд

$$L = \begin{pmatrix} 0.2 & 1.5 \\ 0.8 & 0 \end{pmatrix}, \quad L - E = \begin{pmatrix} -0.8 & 1.5 \\ 0.8 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тобто маємо

$$\begin{aligned}\dot{X}(t) &= (L - E)x(t - \tau), \\ \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -0.8 & 1.5 \\ 0.8 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t - \tau) \\ x_2(t - \tau) \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{3.35}$$

а почтакові умови мають вигляд — $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Спершу розглянемо випадок, коли $\tau = 0$. Спочатку запишемо характеристичне рівняння та знайдемо власні значення:

$$\begin{aligned}\det\left(\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.8 & 1.5 \\ 0.8 & -1 \end{bmatrix}\right) &= 0, \\ \det\begin{pmatrix} \lambda + 0.8 & -1.5 \\ -0.8 & \lambda + 1 \end{pmatrix} &= 0, \\ \lambda^2 + 1.8\lambda - 0.4 &= 0, \\ \lambda_1 = -2, \lambda_2 &= 0.2.\end{aligned}$$

Подальшим розрахунками визначемо власні функції. Коли $\lambda_1 = -2$ будемо мати

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} -0.8 & 1.5 \\ 0.8 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= -2 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \\ a &= -1.25, \\ b &= 1, \\ \bar{v}_1 &= \begin{pmatrix} -1.25 \\ 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

У випадку коли $\lambda_2 = 0.2$ розв'язок буде мати наступний вигляд

$$\begin{pmatrix} -0.8 & 1.5 \\ 0.8 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0.2 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

$$a = 1.5,$$

$$b = 1,$$

$$\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Наступним шагом знайдемо шукані функції:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = Me^{\lambda_1 t} \bar{v}_1 + Ne^{\lambda_2 t} \bar{v}_2,$$

де $M, N = const.$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = Me^{-2t} \begin{pmatrix} -1.25 \\ 1 \end{pmatrix} + Ne^{0.2t} \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.25 & 1.5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Me^{-2t} \\ Ne^{0.2t} \end{pmatrix}$$

або

$$\begin{cases} x_1 = -1.25Me^{-2t} + 1.5Ne^{0.2t} \\ x_2 = Me^{-2t} + Ne^{0.2t} \end{cases},$$

$$x_1(0) = -1.25e^2 + 1.5Ne^{-0.2} = 1,$$

$$x_2(0) = Me^2 + Ne^{-0.2} = 0,$$

$$\begin{cases} -1.25Me^2 + 1.5Ne^{-0.2} = 1 \\ Me^2 + Ne^{-0.2} = 0 \end{cases},$$

$$M = -Ne^{-2.2},$$

$$1.25Ne^{-0.2} + 1.5Ne^{-0.2} = 1,$$

$$2.75Ne^{-0.2} = 1,$$

$$M = -\frac{e^{-2}}{2.75} \approx -0,0492,$$

$$N = \frac{e^{0.2}}{2.75} \approx 0,4441.$$

Тобто загальний розв'язок приймає вигляд:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.25 & 1.5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2.75} e^{4t} \\ \frac{1}{2.75} e^{0.04t} \end{pmatrix}.$$

Графічне представлення даного розв'язку (див. рис. 3.2) було проведено в середовищі Mathematica за допомогою коду (див. рис. 3.1).

```

In[14]:= X0[t_] := {x1[t], x2[t]};
A0 = {{-0.8, 1.5}, {0.8, -1}};
eqs = Thread[D[X0[t], t] == A0.X0[t]]
sol1 = DSolve[{eqs, x1[0] == 1, x2[0] == 0}, X0[t], t]

Out[16]= {x1'[t] == -0.8 x1[t] + 1.5 x2[t], x2'[t] == 0.8 x1[t] - x2[t]}

Out[17]= {{x1[t] -> 0.545455 e^{-2. t} (0.833333 + 1. e^{2.2 t}), x2[t] -> 0.363636 e^{-2. t} (-1. + 1. e^{2.2 t})}}

In[18]:= Plot[Evaluate[{x1[t], x2[t]} /. sol1], {t, 0, 10}]

```

Рисунок 3.1 — Код до прикладу (3.35) при $\tau = 0$

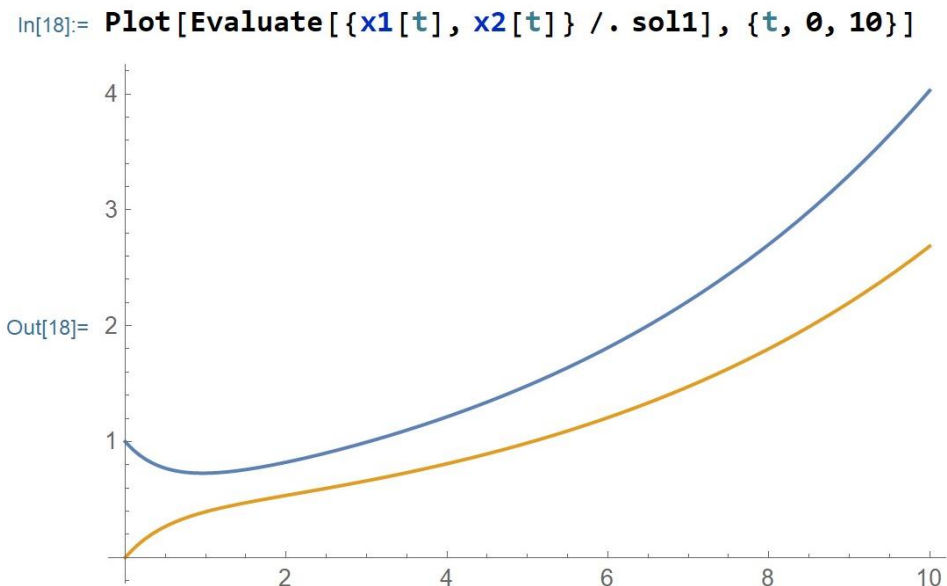


Рисунок 3.1 — Графічне представлення розв’язку прикладу (3.35) для $0 \leq t \leq 10$ при $\tau = 0$

Далі розглянемо також приклад (3.35), але при $\tau = 1$. Графічне представлення (див. рис. 3.3) для $0 \leq t \leq 10$ також було проведено в системі Mathematica за допомогою коду (див. рис. 3.2)

```
sol2 = NDSolve[{x1'[t] == -0.8 x1[t - 1] + 1.5 x2[t - 1], x2'[t] == 0.8 x1[t - 1] - x2[t - 1],
  x1[t /; t <= 0] == 1, x2[t /; t <= 0] == 0}, {x1, x2}, {t, 0, 10}];
Plot[Evaluate[{x1[t], x2[t]} /. sol2], {t, 0, 10}]
```

Рисунок 3.2 — Код до прикладу (3.35) $\tau = 1$

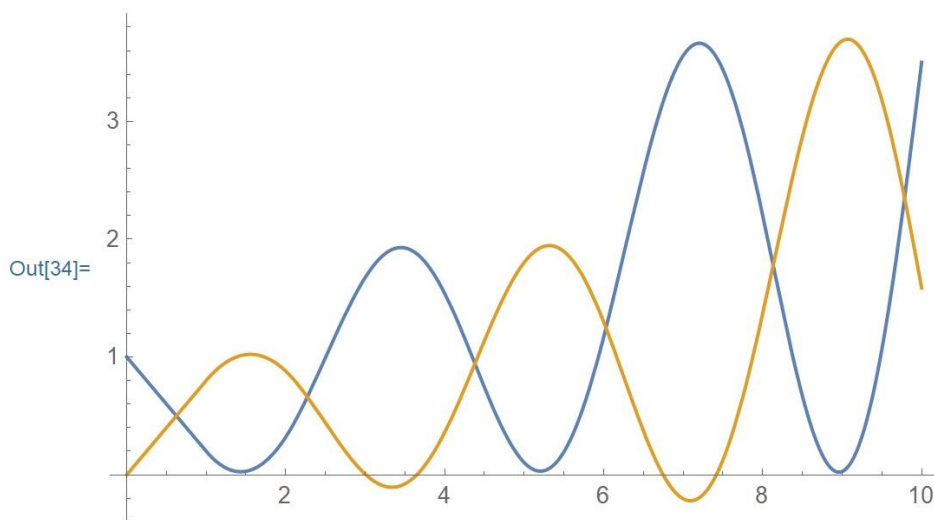


Рисунок 3.2 — Графічне представлення розв’язку приклада (3.35) для $0 \leq t \leq 10$ при $\tau = 1$

Розглянемо ще приклад (3.30) та його графічне представлення (див. рис. 3.4) для $0 \leq t \leq 50$ при $\tau = 1$, яке було проведено в системі Mathematica за допомогою коду (див. рис. 3.3)

```
In[45]:= sol3 = NDSolve[{x1'[t] == -0.72 x1[t - 1] + 1.2 x2[t - 1] + 0.5 x3[t - 1],
  x2'[t] == 0.51 x1[t - 1] - x2[t - 1] + 0 x3[t - 1],
  x3'[t] == 0 x1[t - 1] + 0.81 x2[t - 1] - x3[t - 1], x1[t /; t <= 0] == 80,
  x2[t /; t <= 0] == 40, x3[t /; t <= 0] == 60}, {x1, x2, x3}, {t, 0, 50}];

In[46]:= Plot[Evaluate[{x1[t], x2[t], x3[t]} /. sol3], {t, 0, 50}]
```

Рисунок 3.3 — Код до прикладу (3.30)

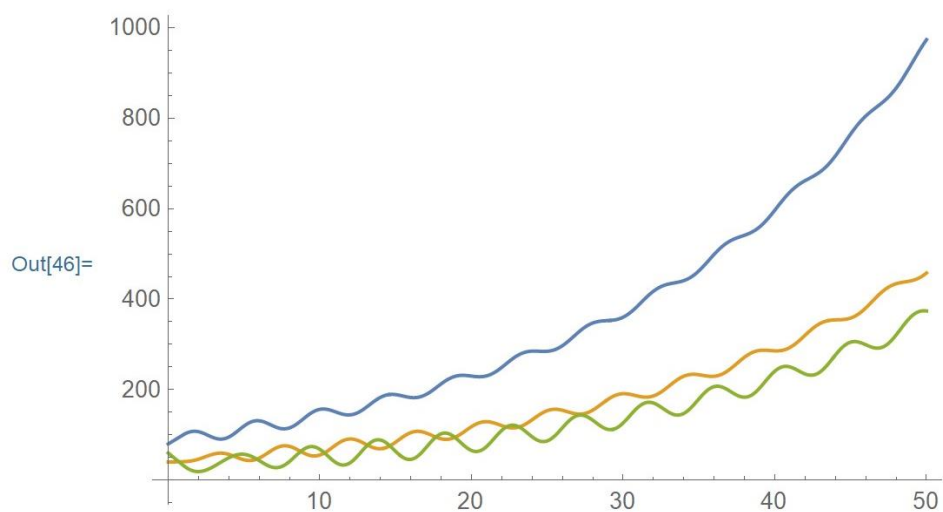


Рисунок 3.4 — Графічне представлення розв'язку приклада (3.30) для $0 \leq t \leq 50$ при $\tau = 1$

4 АНАЛІЗ ОСНОВНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ БІОЛОГІЧНОЇ СИСТЕМИ У ЗМІННИХ СТАНУ ЗАСОБАМИ ТЕОРІЇ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

В даному розділі проводиться аналіз основних властивостей біологічної системи: стійкість руху, керованість та спостережуваність.

4.1 Побудова математичної моделі у змінних стану

В першу чергу побудуємо модель об'єкта з дискретним розподілом часу у змінних стану. У загальному випадку математична модель об'єкта у змінних стану має вигляд:

$$\begin{aligned}x(k + 1) &= Ax(k - \tau) + Bu(k), \\y(k) &= Cx(k).\end{aligned}\tag{4.1}$$

Матриця стану в якій приймає вид:

$$A = L = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_{n-1} & f_n \\ p_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}_{n \times 1} = C_{n \times n} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}_{n \times 1},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Тож, маємо

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Lx(k-\tau) + Bu(k), \\ y(k) &= Cx(k), \end{aligned} \tag{4.2}$$

де матриці з розмірністю 3×3 приймають вигляд:

$$L = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь розглянемо неперервну модель об'єкта стану, яка приймає вигляд:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t - \tau) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t).\end{aligned}$$

де матриця A

$$A = L - E = \begin{pmatrix} f_1 - 1 & f_2 & \dots & f_{n-1} & f_n \\ p_1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_{n-1} & -1 \end{pmatrix}.$$

З огляду на це, маємо

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (L - E)(t - \tau) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t).\end{aligned}\tag{4.3}$$

де

$$\begin{aligned}L - E &= \begin{pmatrix} f_1 - 1 & f_2 & f_3 \\ p_1 & -1 & 0 \\ 0 & p_2 & -1 \end{pmatrix}, \\ B &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ C &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

4.2 Стійкість руху

Оскільки кожна система завжди потрапляє під вплив різноманітних обурень, що можуть вплинути на її нормальну роботу, вона повинна стійко функціонувати незважаючи на обурення, що на неї діють. У найпростішому випадку стійкість системи характеризується її здатністю, з певною точністю, повертатись в стан рівноваги після зникнення зовнішнього обурення, яке вивело її з цього стану. Тож, якщо система не повертається в стан рівноваги, з якого її вивели або віддаляється від нього, або робить навколо нього зростаючі по амплітуді коливання, можна стверджувати, що система є не стійкою. Очевидно, що така система була б непрацездатною. Отже, стійкість є необхідною умовою працездатності будь-якої системи.

Розглянемо систему лінійних диференціальних рівнянь с постійними коефіцієнтами дискретної моделі виду:

$$\dot{x}(t) = Lx(t - \tau). \quad (4.4)$$

У даному випадку, найпростішим методом дослідження стійкості системи буде методи аналізу, що ґрунтуються на оцінці коренів характеристичного поліному, оскільки в попередньому розділі при дослідженні на позитивність, ці корені вже були знайдені. Тож, до таких методів відносяться кореневий критерій стійкості та критерій Гурвіца.

Розглянемо властивості критерія кореневої стійкості [19]. Нехай маємо характеристичний поліном з полюсами $p_i = \lambda_i\{L\}$. Тож, запишемо

$$p_i = \operatorname{Re} p_i + \operatorname{Im} p_i. \quad (4.5)$$

За виглядом дійсної частини кореня (4.2) визначається наступне :

– якщо $\operatorname{Re} p_i < 0, i = \overline{1, n}$ можемо казати, що система асимптотично стійка;

– якщо $\begin{cases} \operatorname{Re} p_i < 0, i = \overline{1, n-2}, \\ p_n = 0 \end{cases}$, можемо стверджувати, що система стійка за Ляпуновим, якщо виконується одна з умов;

Якщо знайдеться хоча б один такий полюс, що $\operatorname{Re} p_i > 0$, тоді система нестійка.

В попередньому розділі була детально розглянута неперервна модель і знайдені корені (3.28), (3.29) характеристичного поліному даної системи (4.1). Оскільки після їх аналізу були зроблені висновки про те, що один з коренів є строго додатнім, можемо дійти висновку про нестійкість її розв'язків. І дійсно, корені характеристичного поліному даної системи, що були знайдені раніше, мають вигляд

$$y_1 = \alpha + \beta,$$

$$y_{2,3} = -\frac{\alpha+\beta}{2} \pm i\sqrt{3}\frac{\alpha-\beta}{2},$$

де α та β приймають строго додатні значення.

Таким чином, приходимо до висновку, що розв'язки за досліджуваною є системою нестійкими, оскільки дійсна частка одного з коренів полінома $\operatorname{Re}(y_1) > 0$.

Наступним кроком дослідимо стійкість руху біологічної системи з неперервним часом, що описується рівнянням:

$$\frac{dX(t)}{dt} = (L - E)X(t)$$

З огляду на те, що в попередньому розділі ми дійшли висновку, що загальний вигляд коренів подібний до коренів дискретної моделі, тобто можемо заключити, що неперервна модель також є нестійкою.

Тож, розглянемо стійкість руху на конкретному прикладі для, де матриця Леслі розмірності 3×3 має вигляд

$$L = \begin{pmatrix} 0.28 & 1.2 & 0.5 \\ 0.51 & 0 & 0 \\ 0 & 0.81 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L - E = \begin{pmatrix} -0.7 & 1.2 & 0.5 \\ 0.51 & -1 & 0 \\ 0 & 0.81 & -1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки ми вже знаходили корені характеристичного рівняння, розглянемо їх ще раз. Для неперервної та дискретної моделей вони мають однаковий вигляд:

$$\lambda_1 = 1.04, \lambda_{2,3} = -0.383 \pm 0.2i$$

Оскільки ми бачимо що корень $\lambda_1 > 0$ можемо одразу дійти висновку, що система моделей дискретного та неперервного розподілу часу нестійка.

4.3 Керованість об'єкта

Об'єкт вважається керованим, якщо з довільного початкового стану можна перевести систему у довільний кінцевий стан за обмежений час, за допомогою вектора керованості. Таким чином, щоб перевести систему зі стану $x(0)$ в заданий стан $x(n)$, необхідно знайти умову, при якій можна визначити керування [25]:

$$x(n) - A^n x(0) = [A^{n-1}B \quad A^{n-2}B \quad \dots \quad B] \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(n-1) \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

Оскільки A , $x(0)$ та $x(n)$ відомі, ліва частина рівняння визначена. Єдиний розв'язок u існує тільки тоді, коли матриця

$$[A^{n-1}B \quad A^{n-2}B \quad \dots \quad B], \quad (4.7)$$

має ранг n . В такому випадку, (A, B) називають керованою парою.

Нехай об'єкт з дискретним розподілом часу описується наступними рівняннями:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k), \\ y(k) &= Cx(k), \end{aligned}$$

де x – вектор розмірності n .

Для моделі розмірності 3×3 маємо матрицю вида:

$$[L^2B \quad LB \quad B], \quad (4.8)$$

де матриці стану та керованості приймають вигляд

$$L = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді маємо нульовий ранг, оскільки проводиться множення на нульову матрицю:

$$\text{rang} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Модель з неперервним розподылом часу має наступний вигляд

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (L - E)(t - \tau) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t). \end{aligned}$$

Незважаючи на те, що моделі відрізняються на розв'язок це не впливає. В даному випадку матриця має вигляд

$$[(L - I)^2B \quad (L - I)B \quad B], \quad (4.9)$$

де

$$L - I = \begin{pmatrix} f_1 - 1 & f_2 & f_3 \\ p_1 & -1 & 0 \\ 0 & p_2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{rang} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Приходимо до висновка, що дискретна на неперервні математичні моделі Леслі у змінних стану є не керованими, не зважаючи на введення заізнення, що свідчить про те, що на модель неможливо вплинути із зовні.

Розглянемо дану властивість на конкретному прикладі, де матриця Леслі розмірності 3×3 :

$$L = \begin{pmatrix} 0.28 & 1.2 & 0.5 \\ 0.51 & 0 & 0 \\ 0 & 0.81 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L - E = \begin{pmatrix} -0.7 & 1.2 & 0.5 \\ 0.51 & -1 & 0 \\ 0 & 0.81 & -1 \end{pmatrix}.$$

Для моделі із дискретним та неперервним розподілом часу розв'язок існує тоді, коли ранг матриць (4.8), (4.9) дорівнює 3. Але, оскільки, матриця B залишається нульовою ранг буде дорівнювати нулю. Відповідно ми не можемо вважати модель у даному випадку керовною.

4.4 Спостережуваність об'єкта

Об'єкт вважають спостережуваним, якщо за вимірюванням вихідного сигналу об'єкта можна визначити стан цього об'єкта. З чого випливає, не обхідність визначення умови, в наслідок якої за обчислюванням y можна визначити $x(0)$ [25]:

$$\begin{aligned}y(0) &= Cx(0), \\y(1) &= Cx(1) = CAx(0), \\&\dots \\y(n-1) &= CA^{n-1}x(0),\end{aligned}$$

або, транспонуючи, маємо

$$[y' \quad y'(1) \quad \dots \quad y'(n-1)] = x'(0)[C' \quad A'C' \quad \dots \quad A'^{n-1}C']. \quad (5)$$

Оскільки вектор y відомий, єдиний розв'язок $x(0)$ існує тільки тоді, коли матриця

$$[C^T \quad A^T C^T \quad \dots \quad A'^{n-1} C^T] \quad (5.1)$$

має ранг n . В такому випадку (A, C) називаються спостережуваною парою.

Розглянемо чи є дискретна (4.2) та неперервна (4.3) моделі спостережуваними. Тобто, для повної спостережуваності моделі Леслі розмірності 3×3 необхідно виконання умови для дискретної та неперервної відповідно:

$$\text{rang}[C^T \quad L^T C^T \quad L^{T^2} C^T] = 3, \quad (5.2)$$

$$\text{rang}[C^T \quad (L - E)^T C^T \quad (L - E)^{T^2} C^T] = 3, \quad (5.3)$$

де матриці мають вигляд:

$$L = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \end{pmatrix}, L^T = \begin{pmatrix} f_1 & p_1 & 0 \\ f_2 & 0 & p_2 \\ f_3 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L^2 = \begin{pmatrix} f_1^2 + p_1 f_2 & f_1 f_2 + f_3 p_2 & f_1 f_3 \\ p_1 f_1 & p_1 f_2 & p_1 f_3 \\ p_1 p_2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L^{T^2} = \begin{pmatrix} f_1^2 + p_1 f_2 & p_1 f_1 & p_1 p_2 \\ f_1 f_2 + f_3 p_2 & p_1 f_2 & 0 \\ f_1 f_3 & p_1 f_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$L - I = \begin{pmatrix} f_1 - 1 & f_2 & f_3 \\ p_1 & -1 & 0 \\ 0 & p_2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$(L - I)^T = \begin{pmatrix} f_1 - 1 & p_1 & 0 \\ f_2 & -1 & p_2 \\ f_3 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$(L - I)^{T^2} = \begin{pmatrix} (f_1 - 1)^2 + p_1 f_2 & (f_1 - 1)p_1 - p_1 & p_1 p_2 \\ (f_1 - 1)f_2 - f_2 + p_2 f_3 & p_1 f_2 + 1 & -2p_2 \\ (f_1 - 1)f_3 - f_3 & p_1 f_3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Тобто умова (3.11) приймає вигляд:

$$\text{rang} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & f_1 & p_1 & 0 & f_1^2 + p_1 f_2 & p_1 f_1 & p_1 p_2 \\ 0 & 1 & 0 & f_2 & 0 & p_2 & f_1 f_2 + f_3 p_2 & p_1 f_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & f_3 & 0 & 0 & f_1 f_3 & p_1 f_3 & 0 \end{bmatrix} = 3$$

та

$$\text{rang} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & f_1 - 1 & p_1 & 0 & (f_1 - 1)^2 + p_1 f_2 & (f_1 - 1)p_1 - p_1 & p_1 p_2 \\ 0 & 1 & 0 & f_2 & -1 & p_2 & (f_1 - 1)f_2 - f_2 + p_2 f_3 & p_1 f_2 + 1 & -2p_2 \\ 0 & 0 & 1 & f_3 & 0 & -1 & (f_1 - 1)f_3 - f_3 & p_1 f_3 & 1 \end{bmatrix} \\ = 3.$$

Як бачимо, оскільки матриці приведені до ступінчатого вигляду, можемо сказати, що вони мають три лінійно незалежних змінних, тобто ранг дорівнює трьом.

Дискретна та неперервна математичні моделі, мають три лінійно незалежних змінних, що каже нам про їх повну спостережуваність.

Розглянемо дану властивість на конкретному прикладі, де матриця Леслі розмірності 3×3 :

$$L = \begin{pmatrix} 0.28 & 1.2 & 0.5 \\ 0.51 & 0 & 0 \\ 0 & 0.81 & 0 \end{pmatrix}, \\ L - E = \begin{pmatrix} -0.72 & 1.2 & 0.5 \\ 0.51 & -1 & 0 \\ 0 & 0.81 & -1 \end{pmatrix}.$$

Для моделі із дискретним та неперервним розподілом часу розв'язок існує тоді, коли ранг матриць (4.8), (4.9) дорівнює 3. Тож розглянемо спочатку дискретну модель. Матриця (4.8) має наступний вигляд

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.28 & 0.51 & 0 & 0.69 & 0.14 & 0.4 \\ 0 & 1 & 0 & 1.2 & 0 & 0.81 & 0.74 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0.14 & 0.25 & 0 \end{bmatrix}.$$

А матриця (4.9) для моделі з неперервним розподілом часу має вигляд

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -0.72 & 0.51 & 0 & 1.13 & -0.88 & 0.4 \\ 0 & 1 & 0 & 1.2 & -1 & 0.81 & -1.66 & 1.61 & -1.62 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 & 0 & -1 & -0.86 & 0.25 & 1 \end{bmatrix}.$$

Як бачимо, в обох випадках ранг дорівнює трьом, бо матриці приведені до ступінчатого вигляду можемо сказати, що вони мають три лінійно незалежних змінних. З огляду на це, можемо дійти висновку, що моделі є спостережуваними.

ВИСНОВКИ

В даній роботі було проведено аналіз математичної моделі популяційної динаміки П. Леслі із запізненням, який в першу чергу з'ясував, що досліджувана модель є позитивною. Дана характеристика, розглянутої моделі, полегшила надалі роботу, оскільки скоротила кількість можливих методів аналізу, що застосовувались у подальшому дослідженні.

Далі проводився аналіз, який показав, що основні властивості динамічних керованих систем – стійкість, в сенсі за Ляпуновим, керованість, в окремих випадках, не виконується. З огляду на це, робимо висновок, що досліджувана система в загальному випадку не є доступною для керування та стабілізації та. В той самий час, аналіз продемонстрував, що властивість спостереження для досліджуваної моделі виконується. Це нам каже про те, що біологічна система є повністю спостережуваною, а отже може бути розв'язана задача спостережуваності, при якій вектор стану буде повністю відновлен.

З метою здійснення керованості в даній моделі, необхідно в першу чергу розв'язати задачу синтезу, тобто структурно змінити початкову модель таким чином, щоб вказані властивості виконувались в повному обсязі. Це можливо здійснити шляхом введення в початковій моделі вектора керованого впливу.

Структурно робота складається з чотирьох розділів, кожний з яких повністю розкриває поставлені у роботі завдання.

В першому розділі було проведено ознайомлення із сутністю та основними методами роботи моделювання біологічної популяційної динаміки, розглядалися особливості застосування математичних моделей із

запізненням, а також вивчались особливості застосування математичних моделей позитивних систем та детально аналізувались критерії позитивності

Другий розділ було присвячено загальним поняттям та теорії диференціальних рівнянь із аргументом, що запізнюється, а також методам, які до них застосовуються. А саме метод кроків та наближений метод розкладання невідомої функції з аргументом, що запізнюється, за ступенями запізнювання.

Третій розділ було присвячено безпосередньо моделі об'єкта дослідження. Тобто особливостям побудови та умовам застосування математичної моделі Леслі із запізненням, а також аналіз позитивності об'єкта дослідження..

У четвертому розділі проводився аналіз досліджуваної системи та її математичної моделі у змінних стану на виконання основних якісних та динамічних властивостей засобами теорії позитивних систем та керування. Аналіз проводився за наступними напрямками: стійкість руху, керованість та спостережуваність біологічних систем.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАСНЬ

1. Алілуйко А. М. Інваріантні конуси та стійкість лінійних динамічних систем. *Укр. мат. журн.* 2006. Т. 58, № 11. С. 1446–1461.
2. Алілуйко А. М. Аналіз стійкості, стабілізація та порівняння динамічних систем дис... канд. фіз.-мат. наук. Ін-ту математики НАН України. Київ, 2007. 123 с.
3. Бахвалов Н. С. Численные методы. М. : Наука, 1975. 613 с.
4. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М. : Мир, 1967. 548 с.
5. Геворкян Э. А. Дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: 2004. 42 с.
6. Долгий Ю. Ф., Сурков П. Г. Математические модели динамических систем с запаздыванием. Екатеринбург: Урал, ун-та, 2012. 124 с.
7. Дэй У. А. Термодинамика простых сред с памятью. М. : Мир, 1974. 192 с.
8. Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М. : Наука, 1971. 297 с.
9. Ким А. В., Пименов В. Г. i-Гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений. М. ;Ижевск : НИУ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. 256 с.
10. Колесов А. Ю., Колесов Ю. С. Релаксационные колебания в математических моделях экологии . Тр. мат. ин-та. 1993. 199 с.

11. Колмановский В. Б., Носов В. Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М. : Наука, 1981. 448 с.
12. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 2 :Теория поля. М.: Наука, 1988. 576 с.
13. Ланкастер П. Теория матриц. Москва : Наука, 1973. 255 с.
14. Леонтьева В.В., Кондрат'єва Н.О., Єлховська Я.А., Собокар Н.В. Позитивність дискретної та неперервної моделей динаміки популяцій П.Леслі. *Scientific achievements of modern society. Abstracts of the 5th International scientific and practical conference.* Cognum Publishing House. Liverpool, United Kingdom. 2020. P. 657–660.
15. Леонтьева В.В., к.ф.-м.н., Кондратьева Н.А. Построение и анализ разомкнутой непрерывной математической модели позитивной динамической системы балансового типа. Зб. наук. праць. *Вісник Запорізького національного університету.* Запоріжжя, 2010. С. 81-88.
16. Леонтьева В.В. Математическая модель динамики функционирования позитивных систем балансового типа. Зб. наук. праць. *Вісник Запорізького національного університету.* Запоріжжя, 2008. №1. С. 118-124.
17. Леонтьева В.В. Построение и анализ замкнутых дискретной и непрерывной математических моделей позитивных динамических систем балансового типа. *Шоста регіональна наукова конференція молодих дослідників «Актуальні проблеми математики та інформатики» Збірка тез доповідей.* Запоріжжя: ЗНУ, 2008. С. 34-37
18. Леонтьева В.В. Управление в непрерывной математической модели позитивной динамической системы балансового типа. *Вестник Херсонского национального технического университета: Сб. научных статей.* Херсон: ХНТУ, 2009. Вып. 2 (35). С.273-278.

19. Lorenzo F. Positive linear systems. Canada : Wiley, 1963. 120 p.
20. Lorenzo Farina Positive systems in the state space approach: main issues and recent results. Roma : Ruberti. 130 p.
21. Логофет Д. О. Неотрицательные матрицы как инструмент моделирования динамики популяций: классические модели и современные обобщения. Москва : Открытые системы, 2007. 146 с.
22. Мазко А.Г. Устойчивость линейных позитивных систем. *Укр. мат. журн.* 2001. Т. 53, № 3. С. 323–330.
23. Мазко А.Г. Устойчивость позитивных и монотонных систем в полуупорядоченном пространстве. *Укр. мат. журн.* – 2004. Т. 56, № 4. С. 462–475.
24. Марчук Г. И. Математические модели в иммунологии. Вычислительные методы и эксперименты. М. : Наука, 1991. 276 с.
25. Мирошник И.В. Теория автоматического управления. Линейные системы. Санкт–Петербург :Питер, 2005. 37 с.
26. Мышкис А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М. : Наука, 1972. 255 с.
27. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. : Наука, 1982. 332 с.
28. Постников М. М . Устойчивые многочлены. М. : «Едиториал УРСС», 2009. 179 с.
29. Работное Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М. : Наука, 1977. 384 с.
30. Свирежев Ю. Н., Логофет Д. О. Устойчивость биологических сообществ. М. : Наука, 1978. 352 с.
31. Скоркин А. И. Математическое моделирование биологических процессов Казань: Казан. ун-т, 2015, 87 с.

32. Соколов С. В. Модели динамики популяций: учеб. пособие. Санкт–Петербург : Лэти, 2018. 61 с.
33. Тарасевич Ю.Ю. Избранные вопросы математического моделирования и численных методов: Учебное пособие. Астрахань: АГУ, 2004. 104 с.
34. Фельдбаум А. А., Бутковский А. Г. Методы теории автоматического управления. М. : Наука, 1971. 744 с.
35. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. : Мир, 1970. 720 с.
36. Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла. М. : Мир, 1985. 67 с.
37. Цыпкин Я. З. Основы теории автоматических систем. М. : Наука, 1977. 560 с.
38. Ярош А.О., Леонтьева В.В., Кондрат'єва Н.О., Єлховська Я.А. Позитивність дискретної динамічної математичної моделі П.Леслі та її модифікації. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки.* 2019. С. 134–145.