МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра прикладної математики та механіки

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА

на тему: **«АСИМПТОТИКО-ЧИСЕЛЬНИЙ ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ ЗІ ЗМІННИМИ РОЗРИВНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ»**

Виконала: студентка 2 курсу, групи 8.1139
спеціальності 113 прикладна математика
(шифр і назва спеціальності)
освітньої програми прикладна математика
(назва освітньої програми)
Д.О. Руденко
(ініціали та прізвище)

Керівник завідувач кафедри прикладної математики та механіки, професор, д.т.н. Грищак В.З.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Рецензент завідувач кафедри фундаментальної математики, доцент, д.т.н. Гребенюк С.М.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Запоріжжя
2020

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет математичний

Кафедра кафедра прикладної математики і механіки

Рівень вищої освіти магістр

Спеціальність 113 прикладна математика
(шифр і назва)

Освітня програма прикладна математика

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри прикладної математики і механіки, д.т.н., професор

______________ Грищак В.З.
(підпис)

« 20 » 05 2020 р.

З А В Д А Н Н Я

НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТОВІ(СТУДЕНТЦІ)

Руденко Дар’ї Олексіївні
(прізвище, ім’я та по-батькові)

1. Тема роботи (проекту) Асимптотико-чисельний підхід до розв’язку задач математичної фізики зі змінними розривними коефіцієнтами

керівник роботи (проекту) Грищак Віктор Захарович, д.т.н, професор
(прізвище, ім’я та по-батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від « 20 » травня 2020 року № 576-с

2. Строк подання студентом роботи 03.12.2020

3. Вихідні дані до роботи 1. Формулювання задачі і методів дослідження.
2. Перелік основних публікацій за напрямком дослідження.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)
   1. Аналітичний огляд сучасного стану в напрямку проблеми дослідження. Формулювання актуальності теми роботи.
   2. Постановка задач дослідження. Основні теоретичні залежності.
   3. Наближені аналітичні розв’язки задач за темою роботи на базі асимптотичних підходів.
   4. Чисельна реалізація задач дослідження. Висновки. Список використаних джерел.

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов’язкових креслень)
Презентація

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв
1	Грищак В.З.	29.05.2020	08.06.2020
2	Грищак В.З.	31.07.2020	10.08.2020
3	Грищак В.З.	04.09.2020	14.09.2020

7. Дата видачі завдання 20.05.2020

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	21.05.2020	виконано
2.	Збір вихідних даних.	25.06.2020	виконано
3.	Обробка методичних та теоретичних		
	джерел.	28.07.2020	виконано
4.	Розробка першого розділу.	01.09.2020	виконано
5.	Розробка другого розділу.	15.09.2020	виконано
6.	Розробка третього розділу.	16.10.2020	виконано
7.	Оформлення та нормоконтроль		
	кваліфікаційної роботи.	20.11.2020	виконано
8.	Захист кваліфікаційної роботи.	17.12.2020	виконано

Студент ____________ Д.О. Руденко
(підпис) (ініціали та прізвище)

Керівник роботи ____________ В.З. Грищак
(підпис) (ініціали та прізвище)

Нормоконтроль пройдено

Нормоконтролер ____________ В.В. Леонтьєва
(підпис) (ініціали та прізвище)

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Асимптотико-чисельний підхід до розв’язання задач математичної фізики зі змінними коефіцієнтами»: 69 с., 13 рис., 46 джерел.

СИНГУЛЯРНЕ НЕЛІНІЙНЕ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ, ЗМІННІ КОЕФІЦІЄНТИ, АСИМТОТИЧНИЙ МЕТОД, ГІБРИДНА АПРОКСИМАЦІЯ ЗА МЕТОДАМИ ЗБУРЕННЯ ТА ВКБ, δ–ФУНКЦІЯ, НАБЛИЖЕНИЙ АНАЛІТИЧНИЙ РОЗВ’ЯЗОК.

Об’єкт дослідження – неоднорідне нелінійне диференціальне рівняння із змінними коефіцієнтами та δ-функцією у правій частині.

Мета роботи: створення алгоритму наближеного аналітичного розв’язку.

Метод дослідження – аналітичний на базі асимптотичного підходу, прямий чисельний метод інтегрування із застосуванням комп’ютерної алгебри і системи «Mathematica».

У кваліфікаційній роботі запропоновано наближений аналітичний розв’язок деяких задач математичної фізики, які зводяться до інтегрування сингулярних нелінійних диференціальних рівнянь із змінними розривними коефіцієнтами, нелінійною першою похідною і δ-функцією у правій частині.

SUMMARY

Qualification work of the master "Asymptotic-numerical approach to solving mathematical physics problems with variable discontinuous coefficients": 69 pages, 13 figures, 46 references.

SINGULAR NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATION, VARIABLE COEFFICIENTS, ASYMPTOTIC METHOD, HYBRID APPROXIMATION BY PERTURBATION AND WKB-METHODS, δ–FUNCTION, APPROXIMATE ANALYTICAL SOLUTION.

The object of the study is an inhomogeneous nonlinear differential equation with variable coefficients and δ-function in the right part.

The aim of the study – to create an algorithm for approximate analytical solution.

The methods of research are analytical based on the asymptotic approach, a direct numerical method of integration using computer algebra and the system "Mathematica".

The thesis proposes an approximate analytical solution of some problems of mathematical physics, which are reduced to the need to integrate singular nonlinear differential equations with variable discontinuities, nonlinear first derivative and δ-function in the right part.

ЗМІСТ

ВСТУП

У різних галузях народного господарства України, зокрема у конструкціях нової техніки, в якості відповідальних силових елементів використовуються конструкції зі змінними параметрами за координатами і часом та зовнішнього навантаження, у тому числі багатошарові пластини і оболонки обертання із композитних матеріалів змінної маси, які піддаються зовнішньому тиску, залежному від часу. На етапі створення конструкцій нової техніки принциповим моментом для інженера-проектувальника є наявність аналітичних залежностей для оцінки впливу параметрів досліджуваної системи та зовнішнього навантаження на її стійкість та динамічну поведінку. Це стосується неоднорідних конструкцій будівельної промисловості, машинобудування, аерокосмічної техніки. Розв’язки вказаних задач математичної фізики, що зводяться до необхідності інтегрування сингулярних диференціальних рівнянь другого порядку із змінними коефіцієнтами та їх систем, базуються, як правило, на застосуванні чисельних методів. Як показали дослідження останніх років, метод фазних інтегралів (метод ВКБ), гібридні асимптотичні методи на основі методів збурення і фазних інтегралів, дозволяють будувати досить точні наближення незалежно від величини параметра при старшій похідній, що дозволяє отримати надійні наближені аналітичні розв’язки прикладних задач з урахуванням залежності властивостей конструкції і зовнішнього навантаження від координат і часу, а також крайових і початкових умов.

Існуючі чисельні методи розрахунку потребують значної затрати комп’ютерного часу і не дають змогу на етапі проектування реальних конструкцій інженеру-досліднику мати в арсеналі надійні аналітичні залежності, які дозволяють провести якісний аналіз і запропонувати найбільш раціональний варіант конструкції. Особливе значення останнім часом приділяється розробці алгоритмів і аналізу розв’язків нелінійних диференціальних рівнянь сингулярного типу і розривними коефіцієнтами із застосуванням δ-функцій. І в цьому сенсі одержання нових наближених аналітичних розв’язків диференціальних рівнянь зі змінними розривними коефіцієнтами із застосуванням сучасних комп’ютерних технологій і програм є актуальною проблемою, яка має важливе наукове та прикладне значення з точки зору застосування якісної теорії диференціальних рівнянь у прикладних задачах математичної фізики.

1 АНАЛІТИЧНИЙ ОГЛЯД СУЧАСНОГО СТАНУ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ, ЩО ЗВОДЯТЬСЯ ДО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗМІННИМИ РОЗРИВНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Диференціальні рівняння – один з основних способів розв'язання задач математичної фізики. При розв'язанні велика частина задач зводиться до диференціальних рівнянь з розривними коефіцієнтами, диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами, або до диференціальних рівнянь з точками повороту. В останні десятиріччя все більше уваги привертає пошук рішення саме таких диференціальних рівнянь.

1.1 Диференціальні рівняння з розривними коефіцієнтами

У 1961 році вийшла праця [34] Олейник О. А., у якій авторка пропонує новий метод для розв'язання диференціальних рівнянь параболічного та еліптичного типів з розривними коефіцієнтами. Так, для загального параболічного рівняння з розривними коефіцієнтами, припускаючи, що поверхні розривів коефіцієнтів залежать від часу, розв'язано першу крайову задачу. В той же час, для загального еліптичного рівняння другого порядку з розривними коефіцієнтами розв'язано задачу Діріхле. Для знаходження рішення початкові задачі спрощено до задач з диференціальними рівняннями з гладкими коефіцієнтами, що є максимально наближеними до заданих розривних коефіцієнтів, а розв'язання представлено у вигляді границь рішення отриманих задач. Такий метод також можна застосувати для розв'язання рівнянь вищих порядків та рівнянь з розривними коефіцієнтами гіперболічного типу.

Під авторством Хао Шоу у 1963 році вийшла робота [43], у якій за допомогою однорідних різницевих схем досліджено різницеву задачу Штурма-

Ліувілля для диференціального рівняння четвертого порядку з розривними коефіцієнтами. Ще одним результатом є доведення твердження, що різницева однорідна схема другого порядку, що задовольняє умови другого порядку апроксимації, має перший порядок точності у випадку розривних коефіцієнтів та другий порядок точності у випадку гладких коефіцієнтів.

У циклі статей Матійчука М. І. [25-29], що виходили з 1974 року по 1992, досліджено параболічні системи з розривними коефіцієнтами, їх фундаментальні розв'язання та застосування розв'язань до крайових задач. Використовуючи метод теорії потенціалу, за умови найменшої гладкості задач Діріхле та Коші для рівнянь другого порядку, з точкою розриву на межі, або всередині, з відповідних просторів Діні, у першій статті [25] з циклу побудовано фундаментальні матриці розв'язків систем, що параболічні по І. Г. Петровському та їх коефіцієнти при менших похідних у точці вироджуються степеневим чином. У другій праці [26] представлено розв'язання для змішаної неоднорідної задачі з крайовими операторами рівного порядку за умови її найменшої гладкості. Для розв'язання використано метод теорії потенціалу як і в першій статті. Третя стаття [27] відрізняється від другої тим, що для загальної крайової неоднорідної параболічної задачі з розривними коефіцієнтами на гіперплощині основні положення гладкості накладено на межу циліндричної області та на коефіцієнти крайових операторів різного порядку. У четвертій роботі [28] досліджено загальну параболічну граничну задачу з нульовими крайовими умовами, за умови наявності виродження у крайових операторів та коефіцієнтів системи на межі циліндричної області, за допомогою методу Е. Хопфа, матриці Гріна та дробових степенів оператора Бельтрамі. У останній статті [29] циклу розв'язано загальну параболічну неоднорідну граничну задачу у циліндричній області з оператором Бесселя у циліндричній області, для якого використано змінну, що є спільною з крайовими операторами.

Асимптотичне розв'язання за допомогою задачі Коші сингулярно збуреного параболічного рівняння з розривними коефіцієнтами представлено у статті [19] 2000 року під авторством Капустіної Т. О.

В тому ж 2000 році Цурко В. А. опублікував працю [45], де використовуючи різницеві апроксимації отримано алгоритми знаходження наближеного розв’язання та оцінки точності для лінійних і нелінійних параболічних диференціальних рівнянь з розривними коефіцієнтами та розривним розв’язанням.

У 2002 році під авторством Алієва Б. А. вийшла робота [2], у якій досліджено асимптотичний розподіл власних значень, якщо відомо асимптотичний розподіл власних чисел, однієї крайової задачі для еліптичного диференціально-операторного рівняння другого порядку з розривним коефіцієнтом.

Ще одна стаття [46] Цурко В. А. вийшла у 2005 році, де для нестаціонарних крайових лінійних задач конвекції-дифузії, які мають розривні коефіцієнти на деяких фіксованих за часом границях, а також розриви розв’язання, побудовано різницеві схеми.

У 2008 році було опубліковано працю [1] написану у співавторстві Аббасова Е. М, Дишина О. О. і Сулейманова Б. А. В даній роботі для лінійної нестаціонарної задачі фільтрації за умови наявності неточних даних представлено алгоритм побудови регуляризованого по методу Тихонова розв’язання. У цьому алгоритмі використано загальну схему кінцевомірної апроксимації у методі регуляризації з розкладанням розв’язання по базисним функціям, які було отримано з добутків одномірних вейвлетів Добеші, а для визначення коефіцієнтів розкладання використано регулярний кратномасштабний аналіз. Результатом стала можливість застосування представленого методу побудови стійкого наближеного вейвлет-розкладання рішення першої крайової задачі для рівняння нестаціонарної фільтрації застосуємо і для рівняння з крайовими умовами II і III роду, якщо взяти до уваги, що для всіх основних крайових задач, які сформульовані для лінійних параболічних рівнянь з розривними коефіцієнтами, доведена однозначна розв'язність в класі $W_2^1(Q_T)$. Виявлена основна перевага вейвлет-методу для розв'язання крайових задач, що описують нестаціонарні процеси. З його допомогою можна досліджувати фізичні явища одночасно на різних часових і просторових масштабах, а також виявляти візуально неподільні сингулярності процесу, що відображають його складну структуру, з поведінки вейвлет-коефіцієнтів на різних рівнях дозволу.

У статті [41], що опублікував Урошлєв Л. А. у 2009 році, проведено дослідження звичайних диференціальних рівнянь першого порядку з розривними коефіцієнтами.

Аніконов Д. С. спільно з Коноваловою Д. С. у 2018 році представили статтю [5]. В ній було розглянуто одномірне хвильове рівняння, що описує поперечні коливання неоднорідної струни, або поздовжні коливання неоднорідного стрижня. Доведено теорему існування та єдиності розв’язання прямої задачі про визначення функції коливання у випадку, коли сила зовнішньої взаємодії, початкова швидкість та початковий стан відомі та довільні. Представлено зворотні задачі про знаходження точки стику різних матеріалів та швидкостей розповсюдження хвиль, для яких доведено теорему єдиності розв’язання за умови наявності деякої нерівності.

В тому ж році було опубліковано ще одну роботу [6] Аніконова і Коновалової. Автори дослідили майже диференціальне рівняння першого порядку з розривним коефіцієнтом при похідній за часом. Результатом став алгоритм розв’язання зворотньої задачі про знаходження ліній розриву коефіцієнта, що не залежить від часу, який було отримано після аналізу диференціальних властивостей загального розв’язання прямої задачі.

1.2 Диференціальні рівняння зі змінними коефіцієнтами

У 1961 році представлено загальне розв’язання лінійного диференціального рівняння n порядку у повних похідних у вигляді спеціальної системи інтегральних рівнянь. Систему інтегральних рівнянь розв’язано за допомогою методу послідовних наближень. На прикладі двох рівнянь показана задовільна точність початкового нульового наближення та доведено збіжність послідовних наближень. Це зроблено Куліковим Н. А. у статті [21].

Сибіряков В. А. у роботі [38] 1962 року, використав метод послідовних наближень для отримання системи фундаментальних функцій лінійного диференціального рівняння зі змінними коефіцієнтами та показав збіжність послідовних наближень для даного рівняння.

У праці [13] Горбачова В. І., яку було опубліковано у 2000 році, було описано інтегральне співвідношення, за допомогою якого можна розв’язати початково-крайову задачу для рівняння зі змінними коефіцієнтами через таку саму початково-крайову задачу для рівняння з постійними коефіцієнтами.

В цьому ж році вийшла робота [20] під авторством Колмановського В. Б. і Косарєвої Н. П. В даній роботі досліджуються деякі асимптотичні властивості розв’язань різницевих рівнянь стійкого та нестійкого типів зі змінними коефіцієнтами та відхиленнями аргументів.

У 2002 році Малишев Ю. В. опублікував статтю [23]. В ній за допомогою символічного методу було розв’язано лінійне диференціальне рівняння зі змінним коефіцієнтом та складною функцією у правій частині, що спрощує знаходження часних інтегралів та розширює класи рівнянь, що є інтегрованими у квадратурах.

Можливість розв’язання неоднорідних сингулярних диференціальних рівнянь в часних похідних зі змінними коефіцієнтами за допомогою гібридних асимптотичних методів описана у роботі [16] Грищака В. З. у 2012 році. Автор демонструє алгоритм розв’язання лінійного диференціального рівняння n порядку зі змінними коефіцієнтами на основі гібридного ВКБ-варіаційного методу, лінійне диференціальне рівняння зі змінним параметром та малим коефіцієнтом при старшій похідній – гібридним ВКБ-Гальоркін методом, нелінійне диференціальне рівняння зі змінними коефіцієнтами – гібридним методом, що поєднує метод збурень та принцип ортогоналізації Гальоркіна.

У праці [22], що вийшла під авторством Маклакова В. М. у 2015 році, знайдено швидкість збіжності матричного методу інтегрування різницевих крайових задач з граничними умовами першого роду. Та доведено, що швидкість збіжності пропорційна числу, що менше на одиницю від степені поліному Тейлора, якщо степінь є непарною. Якщо ж степінь парна, то швидкість прямо пропорційна степені поліному. Одночасно з цим доведено, що швидкість збіжності методу, при інтегруванні різницевих крайових задач з граничними умовами другого та третього порядку, пропорційна степені поліному Тейлора, що використовується, менша від степені поліному на одиницю і не залежить від його парності. Також, у статті знайдено достатній критерій стійкості матричного методу, за умови використання поліному Тейлора у степені три, або вище. В той же час, такий критерій стійкості може бути еквівалентним відомому достатньому критерію стійкості традиційного методу сіток для чисельного інтегрування різницевих крайових задач для лінійного неоднорідного звичайного диференціального рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами та з граничними умовами першого, другого та третього роду.

У 2016 році у статті [7] розглянуто нелокальну крайову задачу для псевдопараболічного рівняння третього порядку зі змінними коефіцієнтами, що вироджується, та доведено єдиність і стійкість розв’язання, за початковими даними і правою частиною на шарах, та збіжність розв’язання різницевої задачі до розв’язання диференціальної задачі. Доведення випливає з дослідження отриманих у ході розв’язання апріорних оцінок у диференціальному та різницевому трактуваннях. Автором статті був Бештоков М. Х.

1.3 Диференціальні рівняння з точкою повороту

Під авторством Мікуліної О. Ф. у 1971 році вийшла робота [31], у якій розкладено в узагальнений інтеграл Фур’є по власним функціям диференціального рівняння другого порядку з однією точкою повороту. Також доведено теорему Парсеваля та існування спектральної функції, з дослідженням її структури і спектру диференціального рівняння у випадку нескінченого інтервалу.

У 1984 році було опубліковано декілька статей, які пов’язано спільною темою диференціальних рівнянь з точкою повороту.

Давидов А. Б. спільно з Матвєєвим М. М. опублікували роботу [18], у якій описали асимптотичну поведінку розв’язків звичайних диференціальних рівнянь вищих порядків за умови наявності точки повороту.

У статті [42] Федорюка М. В. для диференціальних рівнянь порядку n та для систем отримано формули асимптотичного розкладу розв’язання в околі декількох типів точок повороту: простої точки повороту, злиття простих точок повороту та простої кратної точки повороту. Крім цього, наведено алгоритми, за допомогою яких можна отримати вищі наближення.

У тому ж році було опубліковано працю [32] Мотильова Л. Ю, у якій автор пропонує свій варіант інтегрального представлення формального асимптотичного розв’язання поблизу точки повороту для звичайного диференціального рівняння з малим параметром у випадку перетину, або дотику довільного порядку деякого числа характеристичних кривих. Також, автор розглядає варіант розв’язання такого диференціального рівняння методам ВКБ та канонічного оператора В. П. Маслова.

У 1991 році Бобочко В. М. у роботі [8] побудував рівномірну асимптотику розв’язання неоднорідної задачі з точкою повороту у векторному випадку.

Під авторством Грищака В. З. та Герасімова Т. С. у 2002 році вийшла робота [14], у якій автори пропонують новий підхід до розв’язку диференціального рівняння другого порядку із параметром збурювання та точкою повороту за допомогою гібридних методів. Так, за допомогою гібридного ВКБ-Гальоркін методу знайдено зовнішні асимптотики, дійсні розв’язки праворуч та ліворуч від околу точки повороту, а використовуючи гібридний метод збурювань-Гальоркіна отримано внутрішні асимптотики, дійсні розв’язки в околі точки повороту. Зрощення зовнішніх та внутрішніх асимптотик виконується з обов’язковою умовою неперервності отриманих розв’язків та перших похідних цих розв’язків. Для визначення оптимальних параметрів околу точки повороту застосовано методи варіаційного числення. Отриманий наближений аналітичний розв’язок має високу ступінь точності та є рівномірно придатним на протязі усієї області зміни аргументу, в тому числі в околі точки повороту, і на інтервалі зміни параметру збурювання.

У статті [39] Турсунова Д. А., що вийшла у 2016 році, автор, використовуючи узагальнений метод пограничних функцій, будує рівномірне асимптотичне розкладення розв’язання задачі Діріхле для лінійного неоднорідного сингулярно збуреного диференціального рівняння другого порядку з трьома точками повороту по малому параметру на дійсній вісі. Асимптотичний ряд, що отримано у результаті розкладення, носить назву ряд Пюйзе. Автор зауважує, що представлений метод можна застосувати для розв’язання задач з $n + 1$ точкою повороту.

Через 2 роки, у 2018, Турсунов Д. А. спільно з Кожобековим К. Г. публікують працю [40], у якій представлено удосконалений узагальнений метод пограничних функцій. Тепер, використовуючи даний метод, можна побудувати рівномірне асимптотичне розкладення розв’язання задачі Коші для неоднорідного лінійного сингулярно збуреного звичайного диференціального рівняння другого порядку з кратною точкою повороту на дійсній вісі. Отриманий асимптотичний ряд є рядом Пюйзе, як і в попередній роботі, а асимптотичний розклад називається розкладом Ердеї. Також, автори зробили оцінку залишкового члену асимптотичного розкладення для рішення задачі Коші.

1.4 Деякі особливості задач математичної фізики

Математичною наукою, що вивчає теорію, побудову та досліджує математичні моделі фізичних явищ є математична фізика [10]. Основною відмінністю математичної фізики від суто математичних наук є те, що результати досліджень, які оформлено у вигляді теорем, таблиць, графіків, завжди мають фізичне пояснення. Враховуючи таку широку характеристику до математичної фізики можна віднести гідродинаміку, теорію пружності та теоретичну механіку. Математичну фізику розділяють на класичну математичну фізику та сучасну математичну фізику [10]. Обидва напрямки мають важливе значення у сучасній науці.

1.4.1 Задачі класичної математичної фізики

Класична математична фізика вивчає крайові задачі для диференціальних рівнянь. Для дослідження задач у класичній математичній фізиці використовують обчислювальну математику, теорію функцій та функціональний аналіз, теорію ймовірностей, наближені методи, теорію диференціальних та інтегральних рівнянь [10].

1.4.2 Коротка історична довідка

Починаючи з часів Ньютона, паралельно з фізикою та математикою, свій розвиток мала класична математична фізика. Першим повністю сформулював основні закони класичної механіки та довів закон всесвітнього тяжіння І. Ньютон в кінці XVII ст. В той же час, І. Ньютон та Г. Лейбніц паралельно та незалежно один від одного створили диференціальне та інтегральне числення. В XVIII ст. під час дослідження задач пов’язаних з гідродинамікою, акустикою та коливаннями маятників, струн та стрижнів формулюються методи математичної фізики. Завдяки дослідженням Ж. д’Аламбера, Д. Бернуллі, Ж. Лагранжа, Л. Ейлера, К. Гаусса та П. Лапласа закладаються основи аналітичної механіки. Через появу задач дифузії, електродинаміки, оптики, теплопровідності, теорії пружності, нелінійних хвильових процесів у XIX ст. переживають нову хвилю розвитку методи математичної фізики. На основі праць С. Пуассона, Ж. Фур’є, О. Коші, Л. Больцмана, П. Діріхле, М. В. Остроградського, Дж. Максвелла, Дж. Стокса, С. В. Ковалевської, Б. Рімана, Г. Кірхгофа, А. Пуанкаре, О. М. Ляпунова, В. А. Стеклова, Д. Гільберта, Ж. Адамара виникають нові теорії: теорія стійкості руху, теорія потенціалу. XX ст. ознаменувалося появою нових задач у фізиці плазми, газовій динаміці та теорії переносу частинок [10].

1.4.3 Основні рівняння класичної математичної фізики

Одними з найпростіших рівнянь класичної математичної фізики вважають рівняння Пуассона, рівняння теплопровідності та хвильове рівняння.

Для рівняння Пуассона [12]:

$$-\Delta u = f,\ u = u(x),\ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in G \subset R^n, \tag{1.1}$$

де Δ – оператор Лапласа [12]:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2},$$

граничними умовами можуть бути [12]:

$$u|_{x \in S} = v(x) \quad \text{або} \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{x \in S} = v_1(x), \tag{1.2}$$

де S – границя області G,

$\vec{n}$ – одиничний вектор зовнішньої нормалі до S.

Вони визначають задачу Діріхле, або задачу Неймана.

Наступна нерівність є корисною при розв’язанні крайових задач Діріхле або Неймана [10]:

якщо область G обмежена, а її границя S – це кусочно гладка поверхня і функція f неперервно диференційована один раз у замиканні $\bar{G}$ та задовольняє умову [10]:

$$\int_G fdx = 0,$$

або умову [10]:

$$f|_{x\in S} = 0,$$

тоді [10]:

$$\int_G f^2(x)dx \leq C(G)\int_G \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2\right]dx.$$

Авторство даної нерівності віддають К. Фрідріхсу. Хоча правильніше називати її нерівність Пуанкаре-Стеклова, оскільки результат при $n = 3$ в першій умові описав А. Пуакаре у 1894 р., а результат при $n = 3$ в другій умові описав В. А. Стеклов у 1896 р. Також, В. А. Стеклов у своїй роботі описав точні константи [10]:

$$C(G) = \frac{1}{\lambda_0},$$

де λ_0 – найменше власне значення для задачі Неймана, або задачі Діріхле, в залежності від умови.

Якщо ж $n = 1$ нерівність має вигляд [10]:

$$\int_0^l f^2(x)dx \le \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \int_0^l f'^2(x)dx.$$

Для рівняння теплопровідності [12]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f,\ u = u(x,t),\ x \in G \subset R^n,\ t > 0, \tag{1.3}$$

де t – час,
початкові умови [12]:

$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in R^n \tag{1.4}$$

визначають задачу Коші.

Для хвильового рівняння [12]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f,\ u = u(x,t),\ x \in G \subset R^n,\ t > 0, \tag{1.5}$$

де t – час,
початковими умовами є [12]:

$$u(x,0) = u_0(x),\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = u_1(x),\ x \in R^n, \tag{1.6}$$

що визначають задачу Коші.

Стаціонарними називаються рівняння (1.3) та (1.5), якщо вони не залежать від часу. В такому випадку рівняння (1.3) та (1.5) зводяться до рівняння Пуассона (1.1). Якщо ж рівняння (1.3) та (1.5) мають крайові умови, тобто граничні умови виду (1.2) та початкові умови виду (1.4) або (1.6), тоді вони називаються змішаними задачами [12].

Рівняння Шредінгера, одношвидкісне рівняння переносу частинок для ізотропного розсіювання та рівняння Гельмгольца – нові рівняння математичної фізики, що виникли з розвитком квантової механіки та ядерної енергетики.

Одношвидкісне рівняння переносу частинок для ізотропного розсіювання [9]:

$$\frac{1}{v}\frac{\partial\psi}{\partial t} + (\Omega, grad\ \psi) + \alpha\psi = \frac{\beta}{4\pi}\int_{|\Omega'|=1} \psi(x, \Omega', t)\, d\Omega' + F,$$

де $\psi(x, \Omega', t)$ – щільність частинок, що летять зі швидкістю v у напрямку $\vec{\Omega}$,

$|\Omega| = 1$, у точці $x = (x_1, x_2, x_3)$ в момент часу t.

Для стаціонарного рівняння переносу частинок [9]:

$$(\Omega, grad\ \psi) + \alpha(x)\psi = \frac{\beta}{4\pi}\int_{|\Omega'|=1} \psi(x, \Omega')\, d\Omega' + F(x, \Omega) \tag{1.7}$$

гранична умова може мати вигляд [9]:

$$\psi|_{x\in S} = 0 \qquad \text{при} \qquad (\Omega, n) < 0. \tag{1.8}$$

В такому випадку гранична умова означає відсутність падаючого потоку частинок.

Крайова задача (1.7)-(1.8) є еквівалентною інтегральному рівнянню Пайерлса [10]:

$$n(x) = \frac{1}{4\pi}\int_G \frac{\exp\{-\int_0^1 \alpha[tx + (1-t)y]dt\}}{|x-y|^2} \times \left[\beta(y)n(y) + F\left(y, \frac{x-y}{|x-y|}\right)\right] dy$$

для середньої щільності [10]:

$$n(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{|\Omega'|=1} \psi(x, \Omega')\, d\Omega'.$$

Рівняння Шредінгера для хвильової функції $\psi(x,t)$ [9]:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V\psi,$$

де $x = (x_1, x_2, x_3)$,

$\hbar$ – постійна Планка.

Для стаціонарного рівняння Шредінгера [9]:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V(x)\psi = 0$$

гранична умова [9]:

$$\psi \in L_2(R^3).$$

Це показує поведінку рішення на нескінченності.

Для рівняння Гельмгольца [9]:

$$\Delta\psi + k^2\psi = -f(x)$$

використовуються граничні умови на нескінченності [9]:

$$\psi(x) = e^{ik(a,x)} + v(x), \qquad |a| = 1, \qquad |x| \to \infty,$$

де функція $v(x)$ задовольняє умови випромінювання Зоммерфельда [9]:

$$v(x) = O(|x|^{-1}), \qquad \frac{\partial v(x)}{\partial |x|} - ikv(x) = o(|x|^{-1}), \qquad |x| \to \infty,$$

де $a = (a_1, a_2, a_3)$,

$(a, x) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$ – скалярний добуток векторів $\vec{x}$ і $\vec{a}$,

$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ – евклідова довжина вектора $\vec{x}$.

1.4.4 Клас коректно поставлених задач

Велику цінність серед задач класичної математичної фізики має клас коректно поставлених задач по Адамару. Існування розв’язання в задачі, яке є єдиним та неперервно залежить від даних задачі, є важливим правилом даного класу задач. Доведення цього правила, не зважаючи на його простоту, є необхідним для вибраного математичного рівняння та є першим схваленням математичної моделі. Тобто, модель логічна, послідовна – рішення існує, модель описує саме фізичний процес – має одне рішення, модель нечутлива до зміни фізичних величин – рішення неперервно залежить від даних задачі [12].

1.5 Особливості постановок задач сучасної математичної фізики

В 1981 р. М. М. Боголюбов ввів термін, що позначав нову область математичної фізики – сучасна математична фізика. Нова область виникла в результаті тісної взаємодії сучасної теоретичної фізики та сучасної математики. Моделі сучасної математичної фізики частіше зводять до розв’язання аксіоматичним методом, ніж до крайових задач для диференціальних рівнянь [10].

1.5.1 Історична довідка

XX ст. багате появою нових розділів фізики. Так, у цей період з’явилися теорія відносності, квантова механіка, квантова статистична фізика, гравітація, квантова теорія поля. Великий вклад у розвиток цих наук внесли А. Пуанкаре, П. Дірак, Е. Шредінгер, Д. Гільберт, А. Ейнштейн, М. М. Боголюбов, В. О. Фок, Г. Вейль, Дж. фон Нейман, В. Гейзенберг, Р. Фейнман. З появою нових розділів, окрім традиційних областей математики, почали використовувати теорію функцій багатьох комплексних змінних, теорію чисел, теорію узагальнених функцій, теорію операторів, асимптотичні, топологічні, обчислювальні та алгебраїчні методи. З появою електронних обчислювальних машин стало можливим проводити обчислювальні експерименти, також, суттєво збільшилася кількість математичних моделей над якими можна проводити детальний аналіз. Розвиток теоретичної фізики у XX ст. передбачав П. Дірак ще у 1930 р [10].

М. М. Боголюбов у 50-ті рр. XX ст. спробував провести аксіоматизацію квантової теорії поля. Він використав у якості основи теорії матрицю розсіяння. Це дозволило збільшити множину допустимих математичних об’єктів, що було неможливо при використанні гамільтонова формалізма. Але накладалася умова відповідності матриці розсіяння основним фізичним аксіомам. М. М. Боголюбов одним із перших почав використовувати математику як метод отримання нової інформації з низки відомих аксіом. Саме такий підхід дозволив М. М. Боголюбову закласти основи сучасної математичної фізики, а запропонована ним система аксіом квантової теорії поля дала сильний поштовх для вирішення шостої проблеми Д. Гільберта [10].

1.5.2 Узагальнені функції

Узагальнене розв’язання рівняння та узагальнені функції, що використовуються для цього, мають велике значення для математичної фізики. В XIX ст. Дж. Максвелл, Г. Кірхгоф, О. Хевісайд були одними з перших, хто у своїх працях вводив поняття δ-функції та використовували узагальнені рішення. В 20-30-х рр. наступного століття узагальнене рішення для розв’язання диференціальних рівнянь та нове поняття узагальненої похідної зустрічаються і в працях математиків, наприклад, у роботах Д. Еванса, Ч. Морі, Л. Тонеллі та інших вчених. Проте одна з перших згадок про узагальнене рішення була ще у 1830 р. у праці Л. Ейлера «Integralrechnung». В цій роботі, для хвильового рівняння, що описує малі поперечні коливання однорідної струни, [10]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.9}$$

було отримано загальне розв’язання [10]:

$$u(x,t) = f(x - at) + g(x + at).$$

Тобто, функцію [10]:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[H(x - at) + H(x + at)],$$

що є розривною, треба вважати узагальненим рішенням задачі Коші для рівняння (1.9) з початковими умовами [10]:

$$u(x,0) = H(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \qquad x \in R,$$

де $H(x)$ – функція Хевісайда, що дорівнює 1, коли $x \geq 0$, та дорівнює 0, коли $x < 0$.

Математичне визначення δ-функції, або δ-функції Дірака, як лінійного функціоналу, що кожній неперервній функції $\varphi(x)$ ставить у відповідність $\varphi(0)$, тобто [12]:

$$\delta(x) = 0, \qquad x \neq 0,$$
$$\int \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0) = (\delta, \varphi), \tag{1.10}$$

вперше довів та використав у своїх роботах П. Дірак в кінці 20-х рр. Спираючись на (1.10) маємо співвідношення [12]:

$$\int \delta_\varepsilon(x)\varphi(x)dx \to \varphi(0) = (\delta, \varphi),\ \varepsilon \to +0. \tag{1.11}$$

Співвідношення (1.11) показує, що послідовність δ-функцій $\delta_\varepsilon(x), \varepsilon \to +0$, яка є «наближеною», має слабку збіжність до δ-функції Дірака. Проте, якщо розглядати δ-функції $\delta_\varepsilon(x)$ по точкам, стане зрозуміло, що вони збігаються до нульової функції, тобто до «формальної» δ-функції [12].

Над правильним означенням узагальненої функції та її похідних працювали такі вчені, як Ж. Адамар, М. Рісс, С. Бохнер, С. Л. Соболєв, Л. Шварц. У 1936 р. С. Л. Соболєв створив підґрунтя для математичної теорії узагальнених функцій, яку в подальшому застосував для розв'язання узагальненої задачі Коші для гіперболічного рівняння. В 1950-1951 рр. вийшла монографія «Theorie des distributions» Л. Шварца. В ній автор систематично описав теорію узагальнених функцій, використовуючи теорію векторних локально опуклих топологічних просторів, та відмітив ряд важливих додатків. Все більше використання теорії узагальнених функцій у математичній фізиці провокує її швидкий розвиток [10].

Завдяки властивостям узагальнених функцій збільшується кількість задач, які можна розв'язати швидше, оскільки спрощуються елементарні операції.

В наш час теорію узагальнених функцій у своїх дослідженнях використовують інженери, математики та фізики.

1.5.3 Закони збереження

Закони збереження мають велике значення при аналізі складних динамічних систем.

Законом збереження динамічної системи відносно невідомої функції $u(x,t)$ є будь-який оператор $J(t) \equiv J(u, u'_x, \dots; t)$, що на рішеннях u системи зберігається по часу t [10].

Прикладом може бути закон збереження енергії [10]:

$$J(t) = \frac{1}{2}\int_0^l \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right] dx = const, \qquad t \geq 0$$

для рівняння [10]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при нульових граничних умовах [10]:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0.$$

Ще одним прикладом може бути локальний закон збереження [10]:

$$J(t) = \frac{{\varphi'}^2}{2} - \frac{g}{R}\cos\varphi = const$$

для рівняння коливання маятника [10]:

$$\varphi''(t) + \frac{g}{R}\sin\varphi(t) = 0. \qquad (1.12)$$

Щодо нелінійних законів збереження, прикладом закону може бути [10]:

$$J(t) = \varphi'\psi - \psi'\varphi = const, \qquad (1.13)$$

де ψ – рішення для лінійного рівняння виду [10]:

$$\psi'' + \frac{g}{R}\frac{\sin\varphi}{\varphi}\psi = 0, \qquad (1.14)$$

що відповідає (1.12). Якщо розв'язок рівняння (1.14) підставити у (1.13), отримаємо нелокальний закон збереження для рівняння (1.12) [10]:

$$\psi(t) = C\varphi(t)\int^{t}\frac{1}{\varphi^2(\tau)}d\tau,$$

де C – довільна константа.

1.5.4 ρ-Адична математична фізика

ρ-Адична математична фізика – це новий розділ у сучасній математичній фізиці, який є альтернативною математичною фізикою, де дійсні просторово-часові змінні (x, t) замінюються ρ-адичними числами [11].

Довгий період часу головною математичною моделлю для реального фізичного простору вважався евклідів простір R^3. Проте у працях М. А. Маркова та інших вчених з квантової теорії з врахуванням гравітації описано, що для похибки вимірювання довжини Δx правильною також є нерівність [11]:

$$\Delta x \geq l_{pl} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 10^{-33} \text{ см}, \qquad (1.15)$$

де l_{pl} – довжина Планка,

G – константа гравітації,

c – швидкість світла.

Спираючись на нерівність (1.15) можна зробити висновок, що неможливо вимірювати довжину, яка є меншою за довжину Планка. Тобто, на довжині Планка не є дійсними аксіоми Архімеда для часу та простору. Наслідком є потреба визначення часу та простору на довжині Планка за допомогою нових неархімедових полів. Для побудови неархімедового поля потрібно в полі раціональних чисел Q знайти неархімедову норму та замкнути поле Q по цій нормі [11]. Результатом буде створення поля ρ-адичних чисел.

К. Гензель в кінці XIX ст. відкрив велику кількість нетривіальних норм $|\cdot|_p$, де p – прості числа ($p = 2,3,5, \dots ,137, \dots$). Для поля раціональних чисел Q норму $|\cdot|_p$ можна ввести наступним чином [11]:

будь-яке число x, що належить полю раціональних чисел Q, позначається [11]:

$$x = \pm p^{\gamma} \frac{a}{b},$$

де γ, a, b – цілі числа,

a, b на число p поділити не можна.

Маємо [11]:

$$|x|_p = p^{-\gamma},$$

$$|0|_p = 0.$$

Властивості норми $|x|_p$ [11]:

а) $|x|_p \geq 0, |x|_p = 0 \leftrightarrow x = 0, \forall\, x \in Q_p$;

б) $|xy|_p = |x|_p |y|_p, \forall\, x \in Q_p, \forall\, y \in Q_p$;

в) $|x + y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p) \leq |x|_p + |y|_p, \forall\, x \in Q_p, \forall\, y \in Q_p$.

Властивість неархімедовості поля Q_p описується у нерівності трикутників під буквою в. Отже, можна зробити висновок, що $|\cdot|_p$ – неархімедова норма, а Q_p – ультраметричний простір [11].

За допомогою формули [11]:

$$|x - y| \prod_p |x - y|_p = 1, \qquad x, y \in Q, \qquad x \neq y,$$

поєднують ρ-адичну норму $|\cdot|_p, p = 2,3,5, \ldots$, та евклідову норму $|\cdot|$ для чисел $x, y \in Q,\ x \neq y$. Формула пояснює, що в евклідовому просторі та в ρ-адичних просторах зміни довжини відрізка $x - y$, де $x, y \in Q$, еквівалентні [11]. Це підтверджує теорема Островського, якій відмічено, що при поповнені поля раціональних чисел нееквівалентними нормами можна побудувати лише евклідові та ρ-адичні поля [11].

В останні роки активно створюється та розвивається ρ-адичний аналіз: інтегрування, узагальнені функції, перетворення Фур'є, спектральна теорія та інші напрямки. ρ-адична фізика базуючись на ρ-адичному аналізі розвивається у таких напрямках: ρ-адична теорія ймовірності, ρ-адична квантова механіка і квантова теорія поля, ρ-адичні струни та супер струни, динамічні ρ-адичні системи, розпізнання образів, динаміка тахіонні струни і поля, моделі свідомості та емоцій, біологічні та інші ієрархічні системи.

На основі проведеного аналізу досліджуваної проблеми слід зауважити, що особливе значення останнім часом дослідниками приділяється розробці алгоритмів і аналізу розв’язків нелінійних диференціальних рівнянь сингулярного типу і розривними коефіцієнтами із засосуванням δ-функцій, зокрема з характером нелінійності, повязаної із першою похідною,або нелінійностю шуканої фугкції у основному диференціальному рівнянні. Одержання нових наближених аналітичних розв’язків диференціальних рівнянь зі змінними розривними коефіцієнтами із застосуванням сучасних комп’ютерних технологій і програм є актуальним як з точки зору розвитку якісної теорії диференціальних рівнянь, так у прикладних задачах математичної фізики.

2 ГІБРИДНИЙ АСИМПТОТИЧНИЙ РОЗВ’ЯЗОК ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ ІЗ НЕЛІЙНОЮ ПЕРШОЮ ПОХІДНОЮ

При розв’язанні диференціального рівняння з нелінійною першою похідною не можливо здобути точний аналітичний розв’язок. Одним з ефективних підходів до розв’язку такого класу задач може бути асимптотичний підхід на базі застосування методів збурення та фазних інтегралів, який знайшов достатньо широке застосування у прикладних задачах математичної фізики.

2.1 Алгоритм загального розв’язку диференціального рівняння із змінними коефіцієнтами та нелінійною першою похідною

Розглядається розв'язок диференціального рівняння другого порядку з нелінійною першою похідною у формі [36, 37]:

$$y'' + \varepsilon a(x) y'^{n} + \lambda^2 b(x) y = 0, \tag{2.1}$$

де $y(x)$ – шукана функція;

$a(x)$, $b(x)$ – задані функції;

n – степінь першої похідної;

ε, λ – параметри, з умовою, що $\varepsilon < 1$ та $\lambda > 1$.

В якості початкових умов приймається:

$$y(0) = 1, \tag{2.2}$$

$$y'(0) = 0. \tag{2.3}$$

За допомогою методу збурення [15] отримується розв'язок рівняння у вигляді:

$$y(x) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \cdots = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i y_i(x). \tag{2.4}$$

Розглядаються перші два елементи (2.4) для отримання загального розв'язку:

$$y(x) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x), \tag{2.5}$$

$$y_0''(x) + \varepsilon y_1''(x) + \varepsilon a(x)[y_0'(x) + \varepsilon y_1'(x)]^n + \lambda^2 b(x)[y_0(x) + \varepsilon y_1(x)] = 0. \tag{2.6}$$

Перша початкова умова (2.2) підставляється в розв'язок (2.5):

$$y_0(0) + \varepsilon y_1(0) = 1. \tag{2.7}$$

При однакових степенях параметру ε отримуємо:

$$\begin{aligned} y_0(0) &= 1, \\ y_1(0) &= 0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Друга початкова умова (2.3):

$$y_0'(0) + \varepsilon y_1'(0) = 0 \tag{2.9}$$

приводить до залежностей:

$$\begin{aligned} y_0'(0) &= 0, \\ y_1'(0) &= 0. \end{aligned} \tag{2.10}$$

При першому наближенні за параметром ε розглядається однорідне диференціальне рівняння другого порядку:

$$y_0{}'' + \lambda^2 b(x) y_0 = 0. \qquad (2.11)$$

Після заміни $\mu = \frac{1}{\lambda}$ в (2.11) отримується рівняння у формі:

$$\mu^2 y_0{}'' + b(x) y_0 = 0, \qquad (2.12)$$

де μ – малий параметр.

При розв’язанні рівняння (2.12) згідно методу фазних інтегралів [44], маємо:

$$y_0(x) = \exp(\int \varphi d\xi), \qquad (2.13)$$

де $\varphi(x) = \mu^{-1}\varphi_0(x) + \mu^0\varphi_1(x) + \cdots$ – невідомі функції.

Розглядаючи лише перший член розвинення у рівнянні (2.13), знайдемо першу та другу похідні $y_0(x)$:

$$y_0'(x) = \varphi \exp(\int \varphi d\xi),$$
$$y_0''(x) = (\varphi^2 + \varphi') \exp(\int \varphi d\xi). \qquad (2.14)$$

Підставляючи (2.13) і (2.14) у рівняння (2.12), буде знайдено розв’язок для функції $\varphi_0(x)$:

$$\varphi_0^2(x) = -b(x),$$
$$\varphi_{0_{1,2}}(x) = \pm i b(x)^{\frac{1}{2}}. \qquad (2.15)$$

Отже, розв’язок рівняння (2.12) за методом ВКБ [15] має вид:

$$y_0(x) = C_1 \sin\big(k(x)\big) + C_2 \cos\big(k(x)\big), \qquad (2.16)$$

де:

$$k(x) = \int \mu^{-1}\varphi_0(x)dx = \int \lambda b(x)^{\frac{1}{2}}dx = \lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}}dx. \qquad (2.17)$$

В результаті розв'язок (2.16) матиме вигляд:

$$y_0(x) = C_1 \sin\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}}dx\right) + C_2 \cos\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}}dx\right). \qquad (2.18)$$

При застосуванні першої початкової умови (2.2) у розв'язку (2.18) знаходиться значення коефіцієнту C_2:

$$y_0(0) = C_1 \sin\left(\lambda \int b(0)^{\frac{1}{2}}dx\right) + C_2 \cos\left(\lambda \int b(0)^{\frac{1}{2}}dx\right) = C_1 \sin(0) + C_2 \cos(0) =$$
$$= C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 = C_2 = 1. \qquad (2.19)$$

Знайдемо першу похідну (2.18):

$$y_0'(x) = C_1\lambda b(x)^{\frac{1}{2}} \cos\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}}dx\right) - C_2\lambda b(x)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}}dx\right). \qquad (2.20)$$

А за умови застосування другої початкової умови (2.3) до першої похідної (2.20) значення коефіцієнту C_1 є таким:

$$y_0'(0) = C_1\lambda b(0)^{\frac{1}{2}} \cos\left(\lambda \int b(0)^{\frac{1}{2}}dx\right) - C_2\lambda b(0)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\lambda \int b(0)^{\frac{1}{2}}dx\right) = 0. \qquad (2.21)$$

З даних розрахунків випливає, що коефіцієнт $C_1 = 0$, а коефіцієнт $C_2 = 1$. Отже, розв'язок рівняння (2.11) має вигляд:

$$y_0(x) = \cos\,(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}}dx). \qquad (2.22)$$

На другому наближенні, прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ε^1 отримуємо неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку:

$$y_1'' + \lambda^2 b(x) y_1 = -\varepsilon a(x) {y_0'}^n. \quad (2.23)$$

Частинний розв'язок рівняння (2.23) шукається за допомогою методу варіації довільної сталої [15], тобто розв'язок буде мати вигляд:

$$y_1(x) = y_1^{з}(x) + y_1^{ч}(x), \quad (2.24)$$

де $y_1^{з}(x)$ – загальний розв'язок однорідного рівняння,

$y_1^{ч}(x)$ – частинний розв'язок неоднорідного рівняння.

Однорідне рівняння від (2.23) записується у формі:

$${y_1^{з}}'' + \lambda^2 b(x) y_1^{з} = 0. \quad (2.25)$$

Загальне рішення рівняння (2.25) має вид:

$$y_1^{з}(x) = C_1 \sin\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right) + C_2 \cos\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right). \quad (2.26)$$

Зробивши заміну констант на невідомі функції:

$$C_1 = d_1(x), C_2 = d_2(x) \quad (2.27)$$

у розв'язку (2.26), маємо частинне рішення неоднорідного рівняння (2.23):

$$y_1^{ч}(x) = d_1(x) \sin\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right) + d_2(x) \cos\left(\lambda \int b(x)^{\frac{1}{2}} dx\right). \quad (2.28)$$

Використовуючи метод варіації довільної сталої для розв'язання рівняння отримується система:

$$\begin{cases} d_1'(x)\sin\left(\lambda\int b(x)^{\frac{1}{2}}dx\right) + d_2'(x)\cos\left(\lambda\int b(x)^{\frac{1}{2}}dx\right) = 0 \\ d_1'(x)\cos\left(\lambda\int b(x)^{\frac{1}{2}}dx\right) - d_2'(x)\sin\left(\lambda\int b(x)^{\frac{1}{2}}dx\right) = \frac{-\varepsilon a(x){y_0'}^{n}}{\lambda b(x)^{\frac{1}{2}}}. \end{cases} \quad (2.29)$$

З системи можемо знайти значення невідомих функцій. Для цього з (2.29) виразимо похідні $d_1'(x)$, $d_2'(x)$:

$$d_1'(x) = -\frac{\varepsilon a(x){y_0'}^{n} cos\left(\lambda\int b(x)^{\frac{1}{2}}dx\right)}{\lambda b(x)^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.30)$$

$$d_2'(x) = \frac{\varepsilon a(x){y_0'}^{n} sin\left(\lambda\int b(x)^{\frac{1}{2}}dx\right)}{\lambda b(x)^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.31)$$

Після інтегрування виразів (2.30) і (2.31) отримуються невідомі функції $d_1(x)$, $d_2(x)$:

$$d_1(x) = \int -\frac{\varepsilon a(x){y_0'}^{n} cos\left(\lambda\int b(x)^{\frac{1}{2}}dx\right)}{\lambda b(x)^{\frac{1}{2}}}dx =$$

$$\varepsilon(-\lambda)^{n-1}\int a(x)b(x)^{\frac{n-1}{2}} sin^{n}\left(\lambda\int b(x)^{\frac{1}{2}}dx\right)\cos\left(\lambda\int b(x)^{\frac{1}{2}}dx\right)dx, \quad (2.32)$$

$$d_2(x) = \int \frac{\varepsilon a(x){y_0'}^{n} sin\left(\lambda\int b(x)^{\frac{1}{2}}dx\right)}{\lambda b(x)^{\frac{1}{2}}}dx =$$

$$-\varepsilon(-\lambda)^{n-1}\int a(x)b(x)^{\frac{n-1}{2}} sin^{n+1}\left(\lambda\int b(x)^{\frac{1}{2}}dx\right)dx. \quad (2.33)$$

Підставляючи отримані результати (2.32) та (2.33) у (2.28) отримаємо рішення рівняння (2.23):

$$y_1(x) =$$

$$\varepsilon(-\lambda)^{n-1} sin\left(\frac{\lambda}{2}x^2\right)\int a(x)b(x)^{\frac{n-1}{2}} sin^n\left(\lambda\int b(x)^{\frac{1}{2}}dx\right)\cos\left(\lambda\int b(x)^{\frac{1}{2}}dx\right)dx -$$

$$-\varepsilon(-\lambda)^{n-1} cos\left(\frac{\lambda}{2}x^2\right)\int a(x)b(x)^{\frac{n-1}{2}} sin^{n+1}\left(\lambda\int b(x)^{\frac{1}{2}}dx\right)dx. \quad (2.34)$$

Загальний розв’язок рівняння (2.1) представляється у формі:

$$y(x) = cos\left(\lambda\int b(x)^{\frac{1}{2}}dx\right) + \varepsilon\left[d_1(x) sin\left(\lambda\int b(x)^{\frac{1}{2}}dx\right) +\right.$$

$$\left.+d_2(x) cos\left(\lambda\int b(x)^{\frac{1}{2}}dx\right)\right], \quad (2.35)$$

де

$$d_1(x) = \varepsilon(-\lambda)^{n-1}\int a(x)b(x)^{\frac{n-1}{2}} sin^n\left(\lambda\int b(x)^{\frac{1}{2}}dx\right)\cos\left(\lambda\int b(x)^{\frac{1}{2}}dx\right)dx, \quad (2.36)$$

$$d_2(x) = -\varepsilon(-\lambda)^{n-1}\int a(x)b(x)^{\frac{n-1}{2}} sin^{n+1}\left(\lambda\int b(x)^{\frac{1}{2}}dx\right)dx. \quad (2.37)$$

2.2 Чисельний приклад та графічне представлення запропонованого алгоритму

Задамо функції $a(x)$, $b(x)$, а також степінь n у виді:

$$a(x) = 1,$$

$$b(x) = x^2,$$

$$n = 3,$$

тоді рівняння (2.1) можна записати як:

$$y'' + \varepsilon y'^3 + \lambda^2 x^2 y = 0, \quad (2.38)$$

за умови, що $\varepsilon < 1$ та $\lambda > 1$, а початковими умовами залишаються: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Використовуючи метод збурення [15] отримаємо розв'язок рівняння у вигляді:

$$y(x) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \cdots = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i y_i(x). \qquad (2.39)$$

Розглядаються перші два елементи (2.39) для отримання загального розв'язку:

$$y(x) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x). \qquad (2.40)$$

Рівняння (2.38) буде мати вигляд:

$$y_0''(x) + \varepsilon y_1''(x) + \varepsilon[y_0'(x) + \varepsilon y_1'(x)]^3 + \lambda^2 x^2 [y_0(x) + \varepsilon y_1(x)] = 0. \qquad (2.41)$$

Підставляючи першу початкову умову в розв'язок (2.40) маємо:

$$y_0(0) + \varepsilon y_1(0) = 1. \qquad (2.42)$$

Розв'язком рівняння (2.42) є:

$$\begin{aligned} y_0(0) &= 1, \\ y_1(0) &= 0. \end{aligned} \qquad (2.43)$$

Після підстановки другої початкової умови в (2.40):

$$y_0'(0) + \varepsilon y_1'(0) = 0, \qquad (2.44)$$

рівняння буде мати розв'язок у вигляді:

$$y_0'(0) = 0,$$
$$y_1'(0) = 0. \qquad (2.45)$$

Отже, при першому наближенні ε^0, розглядаємо однорідне диференціальне рівняння другого порядку виду:

$$y_0'' + \lambda^2 x^2 y_0 = 0. \qquad (2.46)$$

Після заміни $\mu = \frac{1}{\lambda}$ в (2.46) отримуємо рівняння:

$$\mu^2 y_0'' + x^2 y_0 = 0, \qquad (2.47)$$

де μ – малий параметр.

При розв'язанні рівняння (2.47) згідно методу фазних інтегралів [44], маємо:

$$y_0(x) = \exp(\int \varphi d\xi), \qquad (2.48)$$

де $\varphi(x) = \mu^{-1}\varphi_0(x) + \mu^0\varphi_1(x) + \cdots$ – невідомі функції.

Розглядаючи лише перший член розвинення у рівнянні (2.48), знайдемо першу та другу похідні $y_0(x)$:

$$y_0'(x) = \varphi exp\left(\int \varphi d\xi\right),$$
$$y_0''(x) = (\varphi^2 + \varphi')\exp(\int \varphi d\xi). \qquad (2.49)$$

Підставляючи (2.48) і (2.49) у рівняння (2.47) розв'язок для функції $\varphi_0(x)$ має вид:

$$\varphi_0^2(x) = -x,$$

$$\varphi_{0_{1,2}}(x) = \pm ix. \tag{2.50}$$

Розв’язок рівняння (2.47) за методом ВКБ [15] можна подати у вигляді:

$$y_0(x) = C_1 \sin\big(k(x)\big) + C_2 \cos\big(k(x)\big). \tag{2.51}$$

де:

$$k(x) = \int \mu^{-1}\varphi_0(x)dx = \int \lambda x dx = \lambda \int x dx = \lambda \frac{x^2}{2}, \tag{2.52}$$

В результаті розв'язок (2.51) матиме вигляд:

$$y_0(x) = C_1 \sin\left(\frac{\lambda}{2}x^2\right) + C_2 \cos\left(\frac{\lambda}{2}x^2\right). \tag{2.53}$$

Застосовуючи (2.43) у (2.53) знайдемо значення коефіцієнту C_2:

$$y_0(0) = C_1 \sin\left(\frac{\lambda}{2}0^2\right) + C_2 \cos\left(\frac{\lambda}{2}0^2\right) = C_1 \sin(0) + C_2 \cos(0) = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 =$$
$$= C_2 = 1. \tag{2.54}$$

Підставляючи (2.45) у першу похідну від (2.53):

$$y_0'(x) = \frac{C_1\lambda}{2} 2x \cos\left(\frac{\lambda}{2}x^2\right) - \frac{C_2\lambda}{2} 2x \sin\left(\frac{\lambda}{2}x^2\right) \tag{2.55}$$

дізнаємось значення коефіцієнту C_1:

$$y_0'(0) = \frac{C_1\lambda}{2} 2 \cdot 0 \cdot \cos\left(\frac{\lambda}{2}0^2\right) + \frac{C_2\lambda}{2} 2 \cdot 0 \cdot \sin\left(\frac{\lambda}{2}0^2\right) = 0. \tag{2.56}$$

Отже, коефіцієнт C_1 дорівнює 0, коефіцієнт C_2 дорівнює 1. Тоді розв'язок рівняння (2.46) буде мати вигляд:

$$y_0(x) = \cos\left(\frac{\lambda}{2}x^2\right). \tag{2.57}$$

У другому наближенні, після того як прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях ε^1, отримаємо неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку:

$$y_1{}'' + \lambda^2 x^2 y_1 = -\varepsilon {y_0'}^3, \tag{2.58}$$

Розв'язання рівняння (2.58) будемо шукати за допомогою методу варіації довільної сталої [15]:

$$y_1(x) = y_1^{з}(x) + y_1^{ч}(x), \tag{2.59}$$

де $y_1^{з}(x)$ – загальний розв'язок однорідного рівняння,

$y_1^{ч}(x)$ – частинний розв'язок неоднорідного рівняння.

Однорідне рівняння від (2.58) буде мати вигляд:

$$y_1^{з}{}'' + \lambda^2 x^2 y_1^{з} = 0, \tag{2.60}$$

Загальне рішення рівняння (2.60) можна представити:

$$y_1^{з}(x) = C_1 \sin\left(\frac{\lambda}{2}x^2\right) + C_2 \cos\left(\frac{\lambda}{2}x^2\right). \tag{2.61}$$

Після заміни констант на невідомі функції:

$$C_1 = d_1(x), C_2 = d_2(x) \tag{2.62}$$

у розв’язку (2.61), отримаємо рішення неоднорідного рівняння (2.58):

$$y_1^{ч}(x) = d_1(x)\sin\left(\frac{\lambda}{2}x^2\right) + d_2(x)\cos\left(\frac{\lambda}{2}x^2\right). \tag{2.63}$$

При застосуванні методу варіації довільної сталої для розв’язання рівняння отримуємо систему:

$$\begin{cases} d_1'(x)\sin\left(\frac{\lambda}{2}x^2\right) + d_2'(x)\cos\left(\frac{\lambda}{2}x^2\right) = 0 \\ d_1'(x)\cos\left(\frac{\lambda}{2}x^2\right) - d_2'(x)\sin\left(\frac{\lambda}{2}x^2\right) = \frac{-\varepsilon {y_0'}^3}{\lambda x} \end{cases}. \tag{2.64}$$

З системи можемо знайти значення шуканих функцій $d_1(x)$, $d_2(x)$. Для цього з (2.64) знайдемо перші похідні цих функцій:

$$d_1'(x) = \frac{\varepsilon {y_0'}^3 cos\left(\frac{\lambda}{2}x^2\right)}{\lambda x}, \tag{2.65}$$

$$d_2'(x) = -\frac{\varepsilon {y_0'}^3 sin\left(\frac{\lambda}{2}x^2\right)}{\lambda x}. \tag{2.66}$$

Після інтегрування виразів (2.65) і (2.66) знаходимо невідомі функції $d_1(x)$, $d_2(x)$:

$$d_1(x) = \int \frac{\varepsilon {y_0'}^3 cos\left(\frac{\lambda}{2}x^2\right)}{\lambda x} dx = -\varepsilon\lambda^2 \int x^2 sin^3\left(\frac{\lambda}{2}x^2\right)\cos\left(\frac{\lambda}{2}x^2\right) dx, \tag{2.67}$$

$$d_2(x) = -\int \frac{\varepsilon {y_0'}^3 sin\left(\frac{\lambda}{2}x^2\right)}{\lambda x} dx = \varepsilon\lambda^2 \int x^2 sin^4\left(\frac{\lambda}{2}x^2\right) dx. \tag{2.68}$$

Після підстановки функції $d_1(x)$ (2.67) та функції $d_2(x)$ (2.68) у (2.63) рішення рівняння (2.58) можна подати у вигляді:

$$y_1(x) = -\varepsilon\lambda^2 sin\left(\frac{\lambda}{2}x^2\right)\int x^2 sin^3\left(\frac{\lambda}{2}x^2\right)\cos\left(\frac{\lambda}{2}x^2\right)dx +$$
$$+\varepsilon\lambda^2 cos\left(\frac{\lambda}{2}x^2\right)\int x^2 sin^4\left(\frac{\lambda}{2}x^2\right)dx. \quad (2.69)$$

Для отримання загального рішення рівняння (2.38) підставимо отримані функції (2.57) та (2.69) у (2.40):

$$y(x) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) = cos\left(\frac{\lambda}{2}x^2\right) + \varepsilon\left[d_1(x) sin\left(\frac{\lambda}{2}x^2\right) + d_2(x) cos\left(\frac{\lambda}{2}x^2\right)\right], \quad (2.70)$$

де

$$d_1(x) = -\varepsilon\lambda^2\int x^2 sin^3\left(\frac{\lambda}{2}x^2\right)\cos\left(\frac{\lambda}{2}x^2\right)dx, \quad (2.71)$$
$$d_2(x) = \varepsilon\lambda^2\int x^2 sin^4\left(\frac{\lambda}{2}x^2\right)dx. \quad (2.72)$$

Аналіз чисельних даних із застосуванням системи «Mathematica» приведено на рисунках 2.1-2.5:

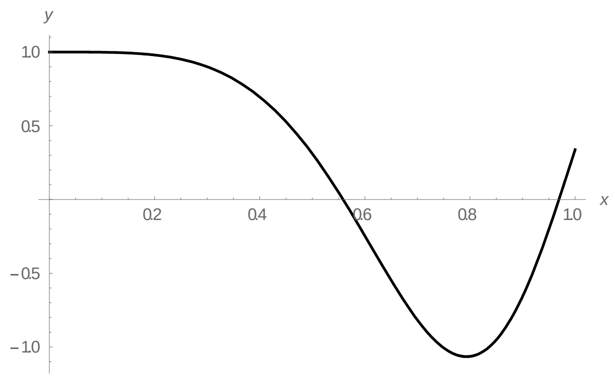

Рисунок 2.1 – Розв’язок рівняння, отриманий на базі асимптотичного підходу ($\varepsilon = 0{,}1$, $\lambda^2 = 100$)

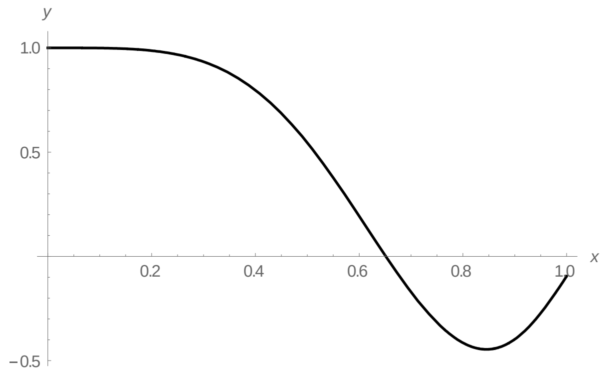

Рисунок 2.2 – Розв’язок рівняння, отриманий на базі прямого чисельного інтегрування ($\varepsilon = 0{,}1$, $\lambda^2 = 100$)

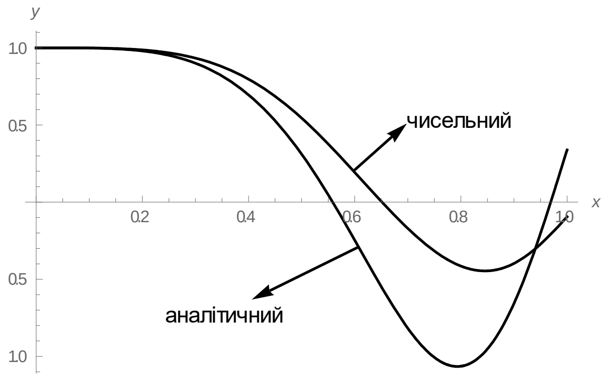

Рисунок 2.3 – Порівняння наближеного аналітичного та чисельного розв’язків при $\varepsilon = 0{,}1$, $\lambda^2 = 100$

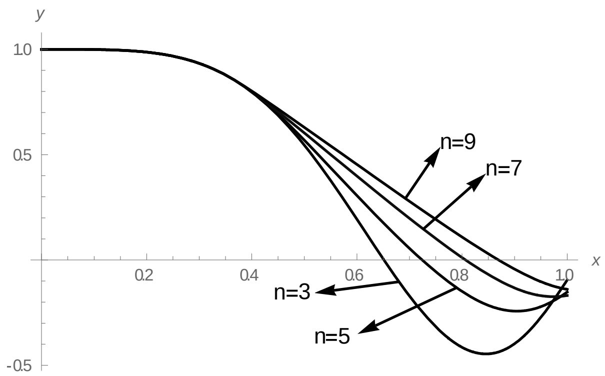

Рисунок 2.4 – Залежність розв’язку від порядку нелінійності n

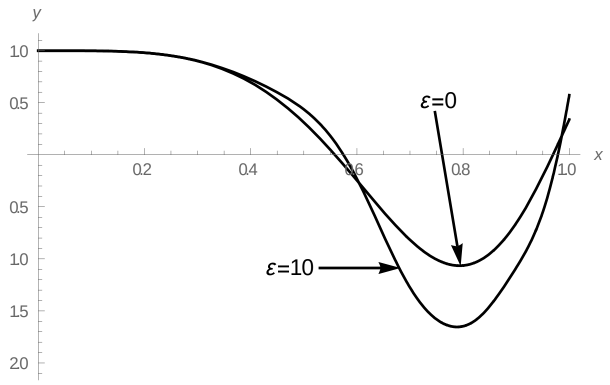

Рисунок 2.5 – Вплив параметра асимптотичного розвинення за методом збурення ε на характер розв’язку

Необхідне залучення подальших асимптотичних наближень для отримання поліпшеної відповідності аналітичного та чисельного розв’язків.

3 АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ НЕЛІНІЙНОЇ ДИНАМІКИ СИСТЕМИ ІЗ ЗМІННИМИ ЗА ЧАСОМ ПАРАМЕТРАМИ І ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

3.1 Аналітичний розв'язок задачі нелінійної динаміки системи

В якості прикладу розглядається задача динаміки систем із змінними за часом коефіцієнтами і дискретно-континуальними характеристиками у нелінійній постановці.

Основне диференціальне рівняння розглянутої системи має вид:

$$y''(t) + \alpha(t)y'(t) + \omega^2(t)y(t) = -N(t)y^3(t) - \gamma(t)y'(t)\delta(t - t_0). \qquad (3.1)$$

Вважаючи, що:

$$\omega^2(t) = \omega_0^2\beta(t), \qquad (3.2)$$

де $\omega_0^2 \gg 1$ – власна частота коливань.

Поділивши обидві частини рівняння (3.1) на ω_0^2, отримуємо:

$$\varepsilon^2[y''(t) + \alpha(t)y'(t)] + \beta(t)y(t) = -\bar{N}(t)y^3(t) - \bar{\gamma}(t)y'(t)\delta(t - t_0), \quad (3.3)$$

де $\varepsilon^2 = \frac{1}{\omega_0^2} \ll 1$,

$\delta(t - t_0)$ – функція Дірака [9],

$\bar{N} = \mu\bar{N}_0(t)$,

μ – параметр нелінійності системи ($\mu < 0$).

Диференціальне рівняння (3.3) є прообразом рівняння Дюфінга з кубічною нелінійністю [24].

Застосовуючи гібридний асимптотичний підхід [15, 17] до розв'язку рівняння (3.3), функцію $y(t)$, яку треба знайти, представляємо у формі асимптотичного ряду (метод збурень [15]) за параметром μ:

$$y(t) = y_0(t) + \mu y_1(t) + \mu^2 y_2(t) + \cdots = \sum_{i=0}^{n} \mu^i y_i(t). \tag{3.4}$$

Підставляючи розклад (3.4) у рівняння (3.3) отримуємо рівняння у першому наближенні:

$$\varepsilon^2[y_0''(t) + \alpha(t)y_0'(t)] + \beta(t)y_0(t) = -\bar{\gamma}(t)y_0'(t)\delta(t - t_0). \tag{3.5}$$

Розв'язок однорідного рівняння:

$$\varepsilon^2[y_0''(t) + \alpha(t)y_0'(t)] + \beta(t)y_0(t) = 0 \tag{3.6}$$

отримуємо застосовуючи метод фазних інтегралів (метод ВКБ) [44]:

$$y_0(t) = \exp \int [\varphi(t)]dt. \tag{3.7}$$

З рівняння (3.6), враховуючи (3.7), отримуємо:

$$\varepsilon^2[\varphi^2(t) + \varphi'(t) + \alpha(t)\varphi(t)] + \beta(t) = 0. \tag{3.8}$$

За процедурою методу представляємо:

$$\varphi(t) = \varepsilon^{-1}\varphi_0(t) + \varepsilon^0\varphi_1(t) + \varepsilon^1\varphi_2(t) + \cdots = \sum_{i=0}^{m} \varepsilon^{i-1}\varphi_i(t). \tag{3.9}$$

Враховуючи (3.9) вираз (3.8) дає наступні співвідношення:

$$\varepsilon^2[\varepsilon^{-2}\varphi_0^2(t) + \varepsilon^{-1}\varphi_0(t)\varphi_1(t) + \varphi_1^2(t)] +$$
$$+\varepsilon^2\alpha(t)[\varepsilon^{-1}\varphi_0(t) + \varphi_1(t)] + \beta(t) = 0. \quad (3.10)$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях параметру ε, отримуємо:

$$\varepsilon^0 \colon \varphi_0^2(t) + \beta(t) = 0 \quad (3.11)$$
$$\varepsilon^1 \colon 2\varphi_0(t)\varphi_1(t) + \alpha(t)\varphi_0(t) = 0. \quad (3.12)$$

З рівнянь (3.11) і (3.12) знаходимо чому дорівнює $\varphi_0(t)$ та $\varphi_1(t)$:

$$\varphi_{0_{1,2}}(t) = \pm i\beta^{1/2}(t) \quad (3.13)$$
$$\varphi_1(t) = -\frac{\alpha(t)}{2}\frac{\varphi_0(t)}{\varphi_0(t)} = -\frac{\alpha(t)}{2}. \quad (3.14)$$

Розв'язок однорідного рівняння (3.6) отримуємо у вигляді:

$$y_0(t) = C_1 \exp\left[\int \left(i\varepsilon^{-1}\beta^{1/2}(t) - \frac{\alpha(t)}{2}\frac{\varphi_0'(t)}{\varphi_0(t)}\right) dt\right] +$$
$$+C_2 \exp\left[\int \left(-i\varepsilon^{-1}\beta^{1/2}(t) - \frac{\alpha(t)}{2}\frac{\varphi_0'(t)}{\varphi_0(t)}\right) dt\right]. \quad (3.15)$$

З (3.13) розв'язок однорідного рівняння (3.6) можна представити у формі:

$$y_0(t) = \exp\left[\frac{1}{4}\int \alpha(t)\frac{\beta'(t)}{\beta(t)} dt\right] \cdot \left[C_1 \cos\bigl(k(t)\bigr) + C_2 \sin\bigl(k(t)\bigr)\right], \quad (3.16)$$

де $k(t) = \int \varepsilon^{-1}\beta^{1/2}(t) dt$.

У випадку $\alpha(t) = 0$ розв'язок (3.16) спрощується, що не обмежує впровадження гібридного підходу:

$$y_0(t) = C_1 \cos\big(k(t)\big) + C_2 \sin\big(k(t)\big). \tag{3.17}$$

Для отримання розв'язку неоднорідного рівняння (3.5) застосовується метод варіації довільних сталих:

$$y_0(t) = C_1(t) \cos\big(k(t)\big) + C_2(t) \sin\big(k(t)\big). \tag{3.18}$$

Підставляючи (3.18) у рівняння (3.5) здобуваємо систему рівнянь для одержання сталих $C_1(t)$ та $C_2(t)$:

$$y_0'(t) = C_1'(t) \cos\big(k(t)\big) + C_2'(t) \sin\big(k(t)\big) - \\ -k'(t) C_1(t) \sin\big(k(t)\big) + k'(t) C_2(t) \cos\big(k(t)\big). \tag{3.19}$$

Вважаючи, що:

$$C_1'(t) \cos\big(k(t)\big) + C_2'(t) \sin\big(k(t)\big) = 0, \tag{3.20}$$

перша похідна розв'язку має вигляд:

$$y_0'(t) = k'(t)\big[-C_1(t) \sin\big(k(t)\big) + C_2(t) \cos\big(k(t)\big)\big] \tag{3.21}$$

тому:

$$y_0''(t) = k''(t)\big[-C_1(t) \sin\big(k(t)\big) + C_2(t) \cos\big(k(t)\big)\big] + k'(t)\big[-C_1'(t) \sin\big(k(t)\big) + \\ +C_2'(t) \cos\big(k(t)\big)\big] + k'^2(t)\big[-C_1(t) \cos\big(k(t)\big) - C_2(t) \sin\big(k(t)\big)\big]. \tag{3.22}$$

З урахуванням (3.18) і (3.21) після підстановки у рівняння (3.5) та за умови означення:

$$k'(t) = \frac{\beta^{1/2}(t)}{\varepsilon} \quad (3.23)$$

отримуємо:

$$k''(t)\left[-C_1(t)\sin(k(t)) + C_2(t)\cos(k(t))\right] + k'(t)\left[-C_1'(t)\sin(k(t)) + \right.$$
$$\left. +C_2'(t)\cos(k(t))\right] - k'^2(t)\left[C_1(t)\cos(k(t)) + C_2(t)\sin(k(t))\right] +$$
$$+k'^2(t)\left[C_1(t)\cos(k(t)) + C_2(t)\sin(k(t))\right] = -\bar{\gamma}(t)y_0'(t)\delta(t-t_0) \quad (3.24)$$

Виключаючи випадок швидкої зміни коефіцієнту рівняння $\beta(t)$, тобто вважаючи, що $k''(t)$ є величиною, якою можна нехтувати, здобуваємо друге рівняння системи алгебраїчних рівнянь для одержання невідомих сталих $C_1(t)$ і $C_2(t)$:

$$\begin{cases} C_1'(t)\cos(k(t)) + C_2'(t)\sin(k(t)) = 0 \\ -C_1'(t)\sin(k(t)) + C_2'(t)\cos(k(t)) = F(t)' \end{cases} \quad (3.25)$$

де функція $F(t)$ дорівнює:

$$F(t) = -\frac{\overline{\gamma}(t)}{k'(t)} y_0'(t)\delta(t-t_0). \quad (3.26)$$

Із першого рівняння системи (3.25) виразимо похідну $C_2'(t)$:

$$C_2'(t) = -C_1'(t)ctg(k(t)) \quad (3.27)$$

і підставимо рівність у друге рівняння системи (3.25):

$$-C_1'(t)\left[\sin(k(t)) + \frac{cos^2(k(t))}{\sin(k(t))}\right] = F(t). \quad (3.28)$$

Із отриманого виразу знайдемо похідну $C_1'(t)$:

$$C_1'(t) = -\frac{F(t)\sin\big(k(t)\big)}{sin^2\big(k(t)\big)+cos^2\big(k(t)\big)} = -F(t)\sin\big(k(t)\big), \tag{3.29}$$

тоді $C_1(t)$ дорівнюватиме:

$$C_1(t) = -\int F(t)\sin\big(k(t)\big)\,dt, \tag{3.30}$$

а $C_2(t)$ матиме вигляд:

$$C_2(t) = \int F(t)\cos\big(k(t)\big)\,dt. \tag{3.31}$$

Підставимо вираз функції $F(t)$ з (3.26) у (3.30) і (3.31), одержимо шукані функції $C_1(t)$ та $C_2(t)$:

$$C_1(t) = \int \frac{\overline{\gamma}(t)}{k'(t)} y_0'(t)\sin\,(k(t))\delta(t-t_0)dt, \tag{3.32}$$

$$C_2(t) = -\int \frac{\overline{\gamma}(t)}{k'(t)} y_0'(t)\cos\big(k(t)\big)\,\delta(t-t_0)dt. \tag{3.33}$$

Але враховуючи властивості δ-функції Дірака:

$$\int f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0) \tag{3.34}$$

функції $C_1(t)$ та $C_2(t)$ будуть мати вигляд:

$$C_1(t) = \gamma_1(t_0)y_0'(t_0), \tag{3.35}$$

$$C_2(t) = \gamma_2(t_0)y_0'(t_0), \tag{3.36}$$

де функції $\gamma_1(t_0)$ і $\gamma_2(t_0)$ дорівнюють:

$$\gamma_1(t_0) = \frac{\bar{\gamma}(t_0)\sin(k(t_0))}{k'(t_0)}, \tag{3.37}$$

$$\gamma_2(t_0) = \frac{\bar{\gamma}(t_0)\cos(k(t_0))}{k'(t_0)}. \tag{3.38}$$

Таким чином загальний розв'язок лінійної неоднорідної задачі у першому наближенні буде мати вигляд:

$$y_0(t) = \cos\big(k(t)\big)\,[C_1 + \gamma_1(t_0)y_0'(t_0)] + \sin\big(k(t)\big)\,[C_2 - \gamma_2(t_0)y_0'(t_0)]. \tag{3.39}$$

У другому наближенні за параметром μ шукана функція основного рівняння задачі є:

$$y_1(t) = \cos\big(k(t)\big)\left[d_1 + \int \widetilde{N}_{0_1}(t)dt + \gamma_1(t_0)y_0'(t_0)\right] +$$
$$+\sin\big(k(t)\big)\left[d_2 - \int \widetilde{N}_{0_2}(t)dt + \gamma_2(t_0)y_0'(t_0)\right], \tag{3.40}$$

де нові функції $\widetilde{N}_{0_1}(t)$ та $\widetilde{N}_{0_2}(t)$ дорівнюють:

$$\widetilde{N}_{0_1}(t) = \bar{N}_0 \sin\big(k(t)\big), \tag{3.41}$$

$$\widetilde{N}_{0_2}(t) = \bar{N}_0 \cos\big(k(t)\big). \tag{3.42}$$

Загальний розв'язок нелінійного диференціального рівняння (3.1) відповідно до (3.4) з урахуванням другого наближення буде мати вид:

$$y(t) = y_0(t) + \mu y_1(t) = \cos\big(k(t)\big)\,[C_1 + \gamma_1(t_0)y_0'(t_0)] + \sin\big(k(t)\big)\,[C_2 +$$
$$+\gamma_2(t_0)y_0'(t_0)] + \mu\big\{\cos\big(k(t)\big)\left[d_1 + \gamma_1(t_0)y_0'(t_0) + \int \widetilde{N}_{0_1}(t)dt\right] + \sin\big(k(t)\big)\left[d_2 -\right.$$

$$-\gamma_2(t_0)y_0'(t_0) - \int \widetilde{N}_{0_2}(t)dt\big]\big\} = \cos\big(k(t)\big)\big\{\bar{C}_1 + (1+\mu)\gamma_1(t_0)y_0'(t_0) +$$
$$+\mu \int \widetilde{N}_{0_1}(t)dt\big\} + \sin\big(k(t)\big)\big\{\bar{C}_2 - (1+\mu)\gamma_2(t_0)y_0'(t_0) - \mu \int \widetilde{N}_{0_2}(t)dt\big\}, \qquad (3.43)$$

де $\bar{C}_1 = C_1 + \mu d_1$,

$\bar{C}_2 = C_2 + \mu d_2$.

Здобутий розв’язок (3.43) початкового рівняння (3.1) здобуто в одному наближені за параметром ε при старшій похідній та у двох наближеннях по параметру нелінійності μ, що дає змогу отримати наближений аналітичний розв’язок задачі нелінійної динаміки системи із змінними за часом параметрами, яка зводиться до диференціального рівняння сингулярного типу із змінними коефіцієнтами і δ-функцією у правій частині.

3.2 Чисельний приклад застосування запропонованого алгоритму

Розглянемо випадок, коли диференціальне рівняння має вигляд:

$$\varepsilon^2 y''(t) + \beta(t)y(t) = -\bar{\gamma}(t)y'(t)\delta(t-t_0). \qquad (3.44)$$

Задамо функції $\beta(t)$ та $\bar{\gamma}(t)$ у виді:

$$\beta(t) = t^2, \qquad (3.45)$$
$$\bar{\gamma}(t) = t. \qquad (3.46)$$

Розв’язок однорідного рівняння, яке відповідає (3.44):

$$\varepsilon^2 y_o''(t) + t^2 y_o(t) = 0 \qquad (3.47)$$

має вид:

$$y_o(t) = C_1 \cos(k(t)) + C_2 \sin(k(t)), \tag{3.48}$$

де $k(t) = \int \frac{\beta^{1/2}(t)}{\varepsilon} dt = \frac{t^2}{2\varepsilon}$.

Для одержання довільних сталих задамо початкові умови:

$$\begin{aligned} y_0(0) &= 1, \\ y_1'(0) &= 0. \end{aligned} \tag{3.49}$$

Підставляючи першу початкову умову у розв'язок однорідного рівняння (3.48) знаходимо значення C_1:

$$y_0(0) = C_1 \cdot 1 + 0 = 1,$$
$$C_1 = 1.$$

Підставляючи другу початкову умову у розв'язок (3.48) дізнаємось C_2:

$$y_1'(0) = -k'C_1 \sin 0 + k'C_2 \cos 0 = 0,$$
$$C_2 = 0.$$

Розв'язок однорідного рівняння (3.48) при початкових умовах (3.49) має вигляд:

$$y_o(t) = \cos\left[\frac{t^2}{2\varepsilon}\right]. \tag{3.50}$$

Аналітичний та чисельний розв'язки на базі (3.50) із застосуванням системи «Mathematica» представлені на рисунках 3.1-3.4:

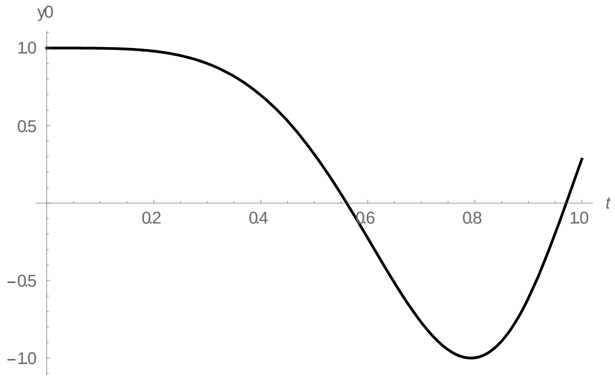

Рисунок 3.1 – Розв'язок рівняння, отриманий на базі методу фазних інтегралів ($\varepsilon = 0{,}1$)

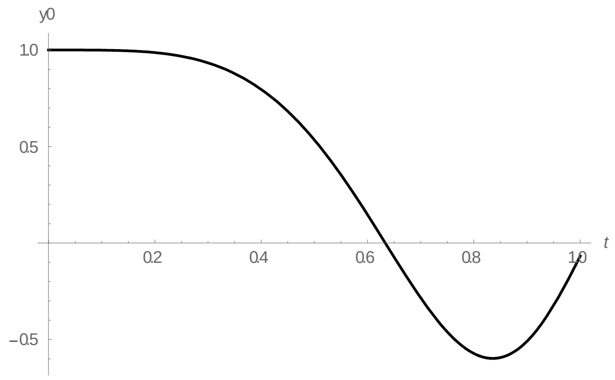

Рисунок 3.2 – Розв'язок рівняння, отриманий на базі прямого чисельного інтегрування ($\varepsilon = 0{,}1$)

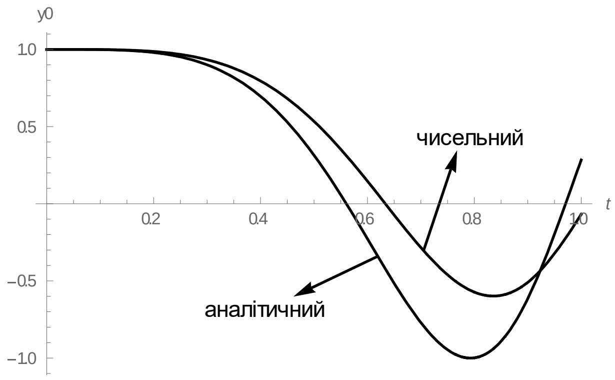

Рисунок 3.3 – Порівняння наближеного аналітичного та чисельного розв'язків при $\varepsilon = 0{,}1$

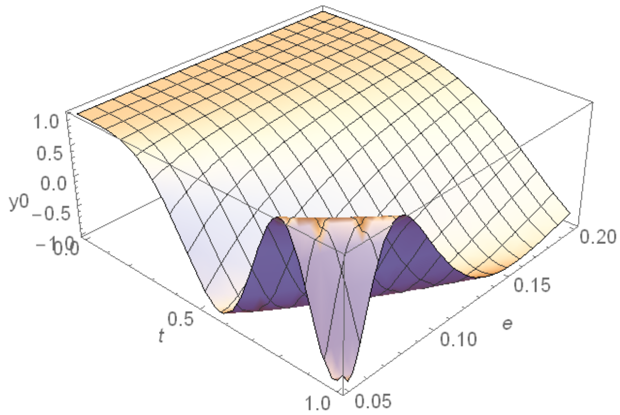

Рисунок 3.4 – Тривимірна залежність розв’язку $y_0(t)$ від параметру ε

3.3 Графічне представлення лінійного неоднорідного рівняння

За заданими параметрами розв’язок лінійної неоднорідної задачі має вид:

$$\tilde{y}_0(t) = \cos\left[\frac{t^2}{2\varepsilon}\right]\left\{C_1 + \gamma_1(t_0)\cos\left[\frac{t^2}{2\varepsilon}\right]\right\} + \sin\left[\frac{t^2}{2\varepsilon}\right]\left\{C_2 - \gamma_2(t_0)\cos\left[\frac{t^2}{2\varepsilon}\right]\right\}. \quad (3.51)$$

Функція $\gamma_1(t_0)$ дорівнює:

$$\gamma_1(t_0) = \frac{\bar{\gamma}(t_0)\sin\left(k(t_0)\right)}{k'(t_0)}, \quad (3.52)$$

де $\bar{\gamma}(t_0) = \frac{\gamma(t_0)}{\varepsilon^2} = \frac{t_0}{\varepsilon^2}$.

За умови, що $k(t_0) = \frac{t^2}{2\varepsilon}$, функція $\gamma_1(t_0)$ буде мати вигляд:

$$\gamma_1(t_0) = \frac{t_0 \sin\left(\frac{t_0^2}{2\varepsilon}\right)\varepsilon}{t_0}. \quad (3.53)$$

Звідки отримуємо:

$$\gamma_1(t_0) = \varepsilon \sin\left(\frac{t_0^2}{2\varepsilon}\right), \qquad (3.54)$$

тоді функція $\gamma_2(t_0)$ дорівнює:

$$\gamma_2(t_0) = \varepsilon \cos\left(\frac{t_0^2}{2\varepsilon}\right). \qquad (3.55)$$

Підставивши значення $\gamma_1(t_0)$ та $\gamma_2(t_0)$ у (3.51) розв'язок буде мати вигляд:

$$\tilde{y}_0(t) = \cos\left[\frac{t^2}{2\varepsilon}\right]\left\{C_1 + \varepsilon \sin\left[\frac{t_0^2}{2\varepsilon}\right]\cos\left[\frac{t^2}{2\varepsilon}\right]\right\} + \sin\left[\frac{t^2}{2\varepsilon}\right]\left\{C_2 - \varepsilon \cos\left[\frac{t_0^2}{2\varepsilon}\right]\cos\left[\frac{t^2}{2\varepsilon}\right]\right\}. \quad (3.56)$$

Задавши значення $t_0 = 0{,}5$ та $\varepsilon = 0{,}1$, отримуємо розв'язок (3.56) у формі:

$$\tilde{y}_0(t) = \cos[5t^2]\{C_1 + 0{,}1\sin[1{,}25]\cos[5t^2]\} +$$
$$+\sin[5t^2]\{C_2 - 0{,}1\cos[1{,}25]\cos[5t^2]\}. \qquad (3.57)$$

Перепишемо отриманий розв'язок у формі:

$$\tilde{y}_0(t) = \cos[5t^2]\{C_1 + 0{,}095\cos[5t^2]\} + \sin[5t^2]\{C_2 - 0{,}032\cos[5t^2]\}. \quad (3.58)$$

Підставляючи першу початкову умову:

$$y_0(0) = 1,$$

у (3.58), знаходимо значення коефіцієнта C_1:

$$\tilde{y}_0(0) = 1 \cdot \{C_1 + 0{,}095 \cdot 1\} + 0 \cdot \{C_2 - 0{,}032 \cdot 1\} = 1,$$
$$C_1 = 0{,}905.$$

Знайдемо першу похідну (3.58):

$$\tilde{y}_0'(t) = -10t\sin(5t^2)\,[C_1 + 0{,}095\cos(5t^2)] + \cos(5t^2)\,[-0{,}095\cdot 10t\,\cdot$$
$$\cdot\sin(5t^2)] + 10t\cos(5t^2)\,[C_2 - 0{,}032\cos(5t^2)] +$$
$$+\sin(5t^2)\,[0{,}032\cdot 10t\cdot\sin(5t^2)]. \qquad (3.59)$$

Підставляючи другу початкову умову:

$$y_1'(0) = 0$$

у першу похідну, знаходимо чому дорівнює C_2:

$$y_1'(0) = 0[0 + 0{,}095] + 1\cdot 0 + 0[C_2 - 0{,}032] + 0\cdot 0 = 0,$$
$$C_2 = 0.$$

Отже, кінцевий розв'язок рівняння (3.51) має вид:

$$\tilde{y}_0(t) = \cos[5t^2]\,\{0{,}905 + 0{,}095\cos[5t^2]\} + \sin[5t^2]\,\{-0{,}032\cos[5t^2]\}. \quad (3.60)$$

На рисунках 3.5-3.8 представлені результати обчислень за гібридним асимптотичним методом та прямим чисельним інтегруванням основного рівняння задачі:

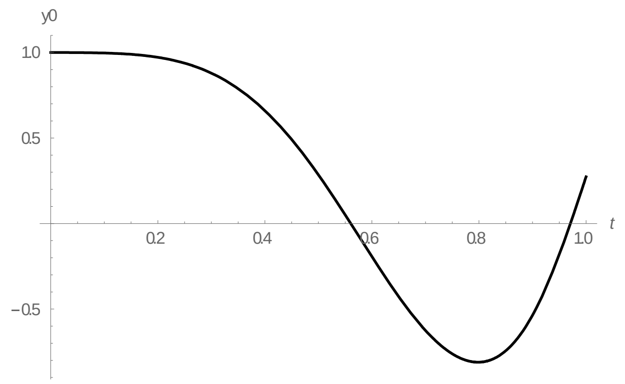

Рисунок 3.5 – Розв’язок рівняння, отриманий на базі гібридного асимптотичного методу ($\varepsilon = 0{,}1$)

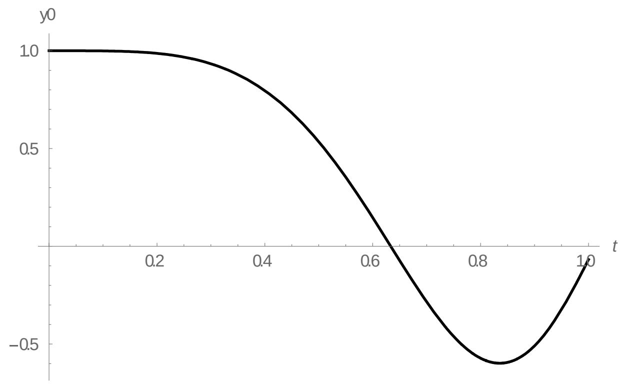

Рисунок 3.6 – Розв’язок рівняння, отриманий на базі прямого чисельного інтегрування ($\varepsilon = 0{,}1$)

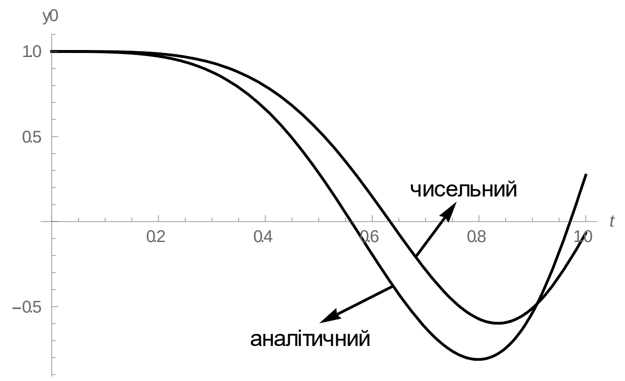

Рисунок 3.7 – Порівняння наближеного аналітичного та чисельного розв’язків при $\varepsilon = 0{,}1$

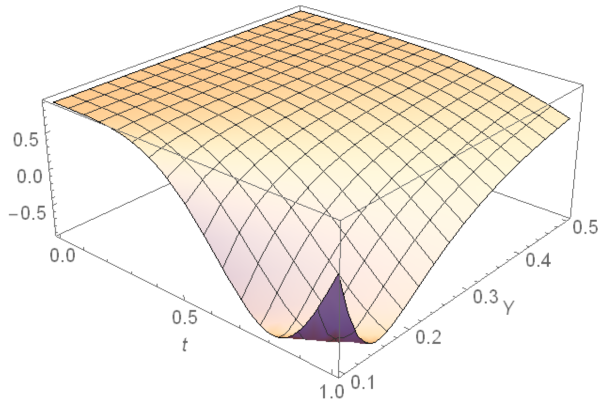

Рисунок 3.8 – Тривимірна залежність розв’язку від малого параметру ε

ВИСНОВКИ

У кваліфікаційній роботі, присвяченій розробці наближеного аналітичного розв'язку задач математичної фізики, які зводяться до необхідності інтегрування сингулярних нелінійних диференціальних рівнянь із змінними розривними коефіцієнтами, зокрема нелінійною першою похідною і δ-функцією у правій частині, одержано наступні результати.

1. Надано аналітичний огляд сучасного стану розв'язку задач математичної фізики, пов'язаних з необхідністю інтегрування звичайних нелінійних диференціальних рівнянь із змінними розривними коефіцієнтами. Зокрема розглядаються класичні методи розв'язку задач математичної фізики і сучасні підходи.

2. На базі гібридного асимптотичного підходу із застосуванням методів збурення і фазних інтегралів запропоновано розв'язок диференціального рівняння другого порядку із змінними коефіцієнтами і нелінійною першою похідною степені n.

3. Порівняння здобутих наближених аналітичних розв'язків із прямим чисельним обчисленням досліджуваних диференціальних рівнянь показало для ряду випадків параметру нелінійності рівняння їх ефективність.

4. Запропоновано алгоритм наближеного аналітичного розв'язку неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку, зокрема задач математичної фізики, пов'язаних з аналізом динамічних процесів, із змінними коефіцієнтами, кубічною нелінійністю шуканого рішення і δ-функцією у правій частині.

5. Результати дослідження доповідались на наукових конференціях молодих вчених ЗНУ.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Аббасов Э. М., Дышин О. А., Сулейманов Б. А. Вейвлет-метод решения задачи нестационарной фильтрации с разрывными коэффициентами. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2008. Т. 48. № 12. С. 2163-2179.

2. Алиев Б. А. Асимптотическое поведение собственных значений одной краевой задачи для эллиптического дифференциально-операторного уравнения второго порядка с разрывным коэффициентом. *Дифференциальные уравнения*. 2002. Т. 38. № 1. С. 58-62.

3. Андрианов И. В., Маневич Л. И. Асимптотология : идеи, методы, результаты. Москва : АСЛАН, 1994. 160 с.

4. Андрианов И., Аврейцевич Я. Методы асимптотического анализа и синтеза в нелинейной динамике і механике деформируемого твердого тела. Москва : Институт компьютерных исследований, 2013. 276 с.

5. Аниконов Д. С., Коновалова Д. С. Пряма та обратная задачи для волнового уравнения с разрывными коэффициентами. *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические задачи*. 2018. Т. 11. № 2. С. 61- 72.

6. Аниконов Д. С., Коновалова Д. С. Прямая та обратная задачи для дифференциального уравнения с разрывным коэффициентом. *Сибирский журнал чистой и прикладной математики*. 2018. Т. 18. № 2. С. 13-29.

7. Бештоков М. Х. Разностный метод решения нелокальной краевой задачи для вырождающегося псевдопараболического уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами. *Журнал вычислительной математики та математической физики*. 2016. Т. 56. № 10. С. 1780-1794.

8. Бобочко В. Н. Асимптотическое интегрирование системы дифференциальных уравнений с точкой поворота. *Дифференциальные уравнения*. 1991. Т. 27. № 9. С. 1505-1515.

9. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. Москва : Наука, 1981. 512 с.

10. Владимиров В. С. Что такое математическая физика? Москва : МИАН, 2006. 20 с.

11. Владимиров В. С., Волович И. В., Зеленов Е. И. *P*-адический анализ и математическая физика. Москва : Физматлит, 1994. 352 с.

12. Владимиров В. С., Жаринов В. В. Уравнения математической физики. Москва : Физико-математическая литература, 2000. 400 с.

13. Горбачев В. И. О представлении решений линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. *Вестник Московского университета. Серия 1. Математика, механика*. 2000. № 6. С. 68- 71.

14. Герасімов Т. С., Грищак В. З. Про підходи до розв'язання диференціального рівняння другого порядку із точкою повороту, засновані на використанні гібридних методів. Частина перша. Вісник Запорізького державного університету (Серія: фізико-математичні науки). 2002. №3. С. 25- 33.

15. Грищак В. З. Гібридні асимптотичні методи та техніка їх застосування. Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2009. 226 с.

16. Грищак В. З. Про ефективність гібридних асимптотичних методів у прикладних задачах математичної фізики. Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. 2012. №19. С. 80-88.

17. Gristchak V. Z., Dmitrijeva Ye. M. A Hybrid WKB–Galerkin Method and its Application. Technishe Mechanik. 1995. 15, № 3. P. 281–294.

18. Давыдов А. Б., Матвеев Н. М. Асимптотическое поведение решений обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков с точкой поворота. *Дифференциальные уравнения*. 1984. Т. 20. № 2. С. 347-349.

19. Капустина Т. О. Асимптотическое решение сингулярно возмущенной задачи Коши для параболического уравнения с разрывными коэффициентами. *Дифференциальные уравнения*. 2000. Т. 36. № 5. С. 662-666.

20. Колмановский В. Б., Косарева Н. П. О свойствах решений некоторых разностных систем с переменными коэффициентами. *Дифференциальные уравнения*. 2000. Т. 36. № 11. С. 1554-1559.

21. Куликов Н. А. Метод решения обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. *Известия вузов. Математика*. 1961. № 4. С. 50-56.

22. Маклаков В. Н. Сходимость матричного метода численного интегрирования краевых задач для линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия физико-математические науки*. 2015. Т. 19. № 3. С. 559- 577.

23. Малышев Ю. В. Решение линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и сложными функциями. *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия физико-математические науки*. 2002. № 16. С. 5-9.

24. Мандельштам Л. И. Лекции по теории колебаний. Москва : Наука, 1972. 466 с.

25. Матийчук М. И. Фундаментальные решения параболических систем с разрывными коэффициентами и их применения к краевым задачам. I. *Дифференциальные уравнения*. 1974. Т. 10. № 8. С. 1463-1477.

26. Матийчук М. И. Фундаментальные решения параболических систем с разрывными коэффициентами и их применения к краевым задачам. II. *Дифференциальные уравнения*. 1975. Т. 11. № 7. С. 1293-1303.

27. Матийчук М. И. Фундаментальные решения параболических систем с разрывными коэффициентами и их применения к краевым задачам. III. *Дифференциальные уравнения*. 1978. Т. 14. № 2. С. 291-303.

28. Матийчук М. И. Фундаментальные решения параболических систем с разрывными коэффициентами и их применения к краевым задачам. IV. *Дифференциальные уравнения*. 1978. Т. 14. № 5. С. 885-899.

29. Матийчук М. И. Фундаментальные решения параболических систем с разрывными коэффициентами и их применения к краевым задачам. V. *Дифференциальные уравнения*. 1992. Т. 28. № 3. С. 501-508.

30. Митропольский Ю. А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. Москва : Наука, 1964. 432 с.

31. Микулина О. Ф. Разложение по собственным функциям дифференциального уравнения второго порядка с одной точкой поворота. *Дифференциальные уравнения*. 1971. Т. 7. № 2. С. 244-260.

32. Мотылев Л. Ю. Формальные асимптотические решения некоторогоо класса обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности точки поворота. *Математический сборник*. 1984. Т. 123 (165). № 1. С. 130-140.

33. Olver F. V. The asymptotic solution of linear differential equations of the second order for large values of a parameter and the asymptotic expansion of Bessel function of a large order. Phil. Trans. Roy. Soc. London. 1954. № 247. P. 307–327.

34. Олейник О. А. Краевые задачи для линейных уравнений эллиптического и параболического типа с разрывными коэффициентами. *Известия АН СССР. Серия математика*. 1961. Т. 25. № 1. С. 3-20.

35. Руденко Д. О., Грищак В. З. Асимптотико-чисельний підхід до розв’язку задач математичної фізики, які зводяться до спеціального класу нелінійних диференціальних рівнянь із змінними розривними коефіцієнтами та «точками повороту». *Актуальні проблеми математики та інформатики* : Збірка тез доповідей Одинадцятої Всеукраїнської, вісімнадцятої регіональної наукової конференції молодих дослідників. (Запоріжжя, 23─24 квітня 2020 р.). Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2020. С. 122.

36. Руденко Д. О., Грищак В. З. Асимптотичний розв’язок диференціальних рівнянь другого порядку зі змінними коефіцієнтами з нелінійністю у першій похідній. *Молода наука ─ 2019* : Збірник наукових праць студентів, аспірантів і молодих вчених, у 5 т. (Запоріжжя, 15─17 квітня 2019 р.). Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2019. Т. 1. С. 52–53.

37. Руденко Д. О., Грищак В. З. Вплив параметру нелінійності першої

похідної до розв'язку диференціальних рівнянь другого порядку зі змінними коефіцієнтами. *Актуальні проблеми математики та інформатики* : Збірка тез доповідей Десятої Всеукраїнської, сімнадцятої регіональної наукової конференції молодих дослідників. (Запоріжжя, 25─26 квітня 2019 р.). Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2019. С. 120–121.

38. Сибиряков В. А. О решении одного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами. *Известия вузов. Математика*. 1962. № 4. С. 143- 145.

39. Турсунов Д. А. Асимптотическое разложение решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с тремя точками поворота. *Труды института математики и механики УрО РАН*. 2016. Т. 22. № 1. С. 271-281.

40. Турсунов Д. А., Кожобеков К. Г. Асимптотическое решение сингулярно возмущенной задачи Коши с точкой поворота. *Итоги науки и техники. Серия Современная математика и её приложения. Тематические обзоры*. 2018. Т. 156. С. 84-88.

41. Урошлев Л. А. Исследование обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами. *Вестник МДУЛ – Лесной вестник*. 2009. № 6. С. 143-144.

42. Федорюк М. В. Асимптотика решений обыкновенных дифференциальных уравнений с точками поворота. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1984. Т. 24. № 6. С. 840-849.

43. Хао Шоу. Разностная задача Штурма-Лиувилля для уравнения четвертого порядка с разрывными коэффициентами. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1963. Т. 3. № 6. С. 1014-1031.

44. Хединг Дж. Введение в метод фазовых интегралов. Москва : Мир, 1965. 238 с.

45. Цурко В. А. О точности разностных схем для параболических уравнений с разрывным решением. *Дифференциальные уравнения*. 2000. Т. 36. № 7. С. 986-992.

46. Цурко В. А. Разностные методы для задач конвекции-диффузии с разрывными коэффициентами. *Дифференциальные уравнения*. 2005. Т. 41. № 2. С. 274- 280.