МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра прикладної математики і механіки

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА

на тему: **«ЕКСПЕРТНИЙ ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ»**

Виконав(ла): студент(ка) 2 курсу, групи 8.1139-з
спеціальності 113 прикладна математика
(шифр і назва спеціальності)
освітньої програми прикладна математика
(назва освітньої програми)
І. В. Васильєва
(ініціали та прізвище)

Керівник Доцент кафедри прикладної математики і механіки, доцент, к.ф.-м.н. Кондратє'ва Н.О.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Рецензент Завідувач кафедри фундаментальної математики, доцент, д.т.н. Гребенюк С.М.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Запоріжжя
2020

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет математичний

Кафедра прикладної математики і механіки

Рівень вищої освіти магістр

Спеціальність 113 прикладна математика

(шифр і назва)

Освітня програма прикладна математика

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри прикладної математики, д.т.н., професор

Грищак В.З.

(підпис)

« 25 » травня 2020 р.

З А В Д А Н Н Я

НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТОВІ(СТУДЕНТЦІ)

Васильєвій Ірині Володимирівні

(прізвище, ім'я та по-батькові)

1. Тема роботи (проекту) Експертний підхід до розв'язання задач прийняття рішень

керівник роботи (проекту) Кондрат'єва Наталія Олександрівна, к.ф.-м.н., доцент

(прізвище, ім'я та по-батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від « 20 » травня 2020 року № 577-с

2. Строк подання студентом роботи 07 грудня 2020 року

3. Вихідні дані до роботи 1. Постановка задачі.

2. Перелік літератури.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)

1. Постановка задачі.
2. Експертні методи прийняття рішень.

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень)

Презентація

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання ______________________________

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	25.05.2020	
2.	Збір вихідних даних.	29.05.2020	
3.	Обробка методичних та теоретичних		
	джерел.	29.06.2020	
4.	Розробка першого та другого розділу.	21.08.2020	
5.	Розробка третього розділу.	19.10.2020	
6.	Оформлення та нормоконтроль	28.11.2020	
	кваліфікаційної роботи.		
7.	Підготовка доповіді та презентаці.	28.11.2020	
8.	Захист кваліфікаційної роботи.	10.12.2020	

Студент ______________ І. В. Васильєва
(підпис) (ініціали та прізвище)

Керівник роботи ______________ Н. О. Кондрат'єва
(підпис) (ініціали та прізвище)

Нормоконтроль пройдено

Нормоконтролер ______________ В. В. Леонтьєва
(підпис) (ініціали та прізвище)

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Експертний підхід до розв’язання задач прийняття рішень»: 86 с., 5 рис., 4 табл.,1 додаток, 28 джерел.

ЕКСПЕРТ, ЕКСПЕРТНЕ ОЦІНЮВАННЯ, ЗАДАЧІ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ, МЕТОДИ ОБРОБКИ ІНФОРМАЦІЇ, РАНЖУВАННЯ.

Об’єкт дослідження – методи оцінювання та обробки експертної інформації.

Мета роботи: проаналізувати експертний підхід до розв’язання задач прийняття рішень. Автоматизувати процес прийняття рішень на основі застосування експертних методів.

Метод дослідження – аналітичний.

У кваліфікаційній роботі розглядаються задачі прийняття рішень та їх класифікація, проблеми експертного оцінювання та методи обробки експертної інформації. Наведено історію розвитку теорії прийняття рішень та надано загальну характеристику проблеми прийняття рішень на основі застосування експертних методів. Описані метод ранжування, голосування та метод аналізу ієрархії. Розроблено програмний продукт, який дозволяє автоматизувати процес прийняття рішень на основі застосування методів парних порівнянь та безпосереднього ранжування.

SUMMARY

Master's Qualification Paper "Expert approach to solving decision-making problems": 86 pp., 5 fig., 4 tables,1 appendix, 28 sources.

EXPERT, EXPERT EVALUATION, DECISION MAKING TASKS, INFORMATION PROCESSING METHODS, RANKING.

The object of research in methods of evaluation and processing of expert information.

Purpose: to consider and analyze the expert approach to decision-making.

The research method is analytical.

The qualification work considers the tasks of decision-making and their classification, problems of expert evaluation and methods of processing expert information. The history of development and the general characteristic of a problem are studied. The method of voting and the method of hierarchy analysis are described.

ЗМІСТ

ВСТУП

Все наше життя пронизане різними проблемами. З необхідністю прийняття рішень стикається щодня кожна людина. В більшості випадків навіть не усвідомлюється, що було прийнято рішення, адже їх так багато і приймають їх так часто. Виділяються і стають предметом аналізу тільки найбільш важливі і важкі рішення. При цьому основний підхід завжди один: збирається точна, надійна і адекватна інформація, а потім робиться вибір серед можливих рішень.

Прийняття рішень – це важлива функція управління, яка є умінням, яким повинна опанувати кожна людина, що працює як в бізнесі, виробництві, так і науці.

Прийняття неоптимальних рішень в життєвих і виробничих ситуаціях зменшує значну частку можливостей і уповільнює темп розвитку. І чим складніша ситуація, тим більше втрати. Прийняттю рішень необхідно вчитися, і вчить цьому наука, звана «Теорія прийняття рішень», яка включає в себе комплекс знань, містить неабияку частку математики, але, якщо використання так званих структурованих методів неможливо, то використовується неструктурований, тобто експертний підхід.

1 ЗАДАЧІ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ ТА ЇХ КЛАСИФІКАЦІЯ

1.1 Історія розвитку та загальна характеристика проблеми

З процесами прийняття рішень нерозривно пов’язана свідома діяльність людини. Люди завжди приймали рішення, ґрунтуючись на своєму досвіді, інтуїції і здоровому глузді. Свідома діяльність людини нерозривно пов’язана з процесами прийняття рішень. Люди завжди приймали рішення, ґрунтуючись на своєму досвіді, інтуїції і здоровому глузді. Уміння приймати рішення, які дають найкращі результати в різних складних ситуаціях завжди розглядалося як мистецтво.

Науково-технічна революція привела до суттєвих перетворень в організаційному управлінні. Ускладнення технології та укрупнення виробництва призвело до необхідності застосовувати різні математичні розрахунки при вирішенні питань управління.

Сукупність математичних дисциплін, що відносяться до організаційного управління, складають теорію прийняття рішень або теорію дослідження операцій[13].

Лише на рубежі XIX–XX століть почалися систематичні спроби перетворити це мистецтво в науку. Саме в цей час публікуються дослідження математиків – економістів Курно, Квінсі, Вальраса. І трохи згодом Парето, які поклали початок теорії ігор;розробляються основи лінійного програмування Жорданом, Мінковським, Фаркашем; серйозних результатів в області динамічного програмування домагається Марков. Бурхливий розвиток моделей і методів теорії прийняття рішень почалося з серединиXXстоліття і призвело до утворення таких самостійних математичних дисциплін як теорія ігор, багатокритеріальний вибір і векторна оптимізація, математичне програмування. Причому остання дисципліна включає такі цілком самостійні розділи як лінійне програмування, опукле програмування, дискретне програмування, календарне планування, стохастичне програмування та ін. [7].

Настільки стрімкий розвиток математичних методів теорії прийняття рішень може бути пояснено такими обставинами.

Успіхи в області електронно-обчислювальної техніки зробили реальною практичну реалізацію в різних додатках багатьох математичних результатів (які до цього мали суто теоретичне значення) і стимулювали розробку нових математичних моделей і методів.

З іншого боку, у зв’язку зі зростанням темпів науково-технічного процесу, зростання динамізму навколишнього середовища, загострення конкуренції, перед керівниками, організаціями, колективами постійно виникають завдання прийняття складних економічних, технічних, соціальних, організаційно-управлінських рішень. Причому, типовою є така ситуація, коли наслідки прийнятих рішень стосуються великої кількості людей, пов’язані з великими матеріальними витратами, що обумовлює багаторазове підвищення ступеня відповідальності за наслідки прийнятого рішення.

З цього можна зробити висновок, що задача прийняття рішень – одна з найпоширеніших в будь-якій предметній області. Рішення такої задачі зводиться до вибору однієї або декількох кращих альтернатив з деякого набору. Що необхідно, щоб зробити такий вибір – чітко визначити ціль і критерії (показники якості), за якими буде проводитися оцінка набору альтернатив. Вибір методу вирішення такої задачі залежить від якості та кількості доступної інформації. Дані, необхідні для здійснення обґрунтованого вибору, можна розділити на 4 категорії: інформація про критерії вибору, інформація про альтернативні варіанти, інформація про оточення завдань, інформація про переваги [1, 2, 4].

Процес прийняття рішення розглядається, як процес перетворення інформації, що включає етапи змістовної постановки задачі, формування переліку можливих дій (альтернативних рішень) і їх наслідків, вибір альтернативного рішення, аналіз результатів прийнятого рішення. Часто такий процес носить ітеративний характер, наприклад, в результаті отриманого рішення може бути скоригована вихідна безліч альтернативних рішень $[8, 25, 28]$.

У найзагальнішому вигляді задача прийняття рішення може бути сформульована в термінах умов – цілі. Умови включають безліч станів об’єкта і безліч операторів, які переводять об’єкт з одного стану в інший. Іншими словами, завдання умов представляється формальним описом засобів, результатів і способу їх зв’язку.

Бажаний стан об’єкта визначає ціль. Різноманіття деталізацій цієї загальної постановки обумовлюється різноманіттям різних практичних задач прийняття рішень.

Введемо в розгляд безлічі Ω і U, елементи безлічі Ω будемо називати альтернативними рішеннями або просто альтернативами, елементи безлічі U – наслідками. Тоді задача прийняття рішення полягає у виборі альтернативи $x \in \Omega$, що призводить до деякого результату $u \in U$. Ефективність рішення визначається ступенем відповідності отриманого результату поставленої цілі.

Формалізація цієї постановки передбачає виконання таких етапів: формалізацію цілі, побудова формального опису деякої універсальної безлічі альтернативних рішень Ω_u, (безлічі всіх можливих в різних реалізаціях даної задачі прийняття рішень альтернативних рішень), аналіз цього числа й виділення безлічі допустимих (з урахуванням обмежень конкретної реалізації задачі прийняття рішень) альтернатив $\Omega \subseteq \Omega_u$, побудова формального опису безлічі випадків U і взаємозв’язку Ω і U і, нарешті, побудова самої формальної процедури вибору $x \in \Omega$.

У різних моделях теорії прийняття рішень під задачею прийняття рішення часто розуміється тільки сам одноразовий акт вибору x із заданого Ω. Таке обмеження проблеми може бути виправдано тим, що в деяких практичних задачах безлічі U і Ω фіксовані, але не зважаючи на це, проблема прийняття рішення залишається складною. З іншого боку, в різних складних задачах прийняття рішень задача вибору Ω (або послідовність таких завдань) завжди має місце і є центральною.

Однак, звернемо увагу на той факт, що процес виробки альтернатив має першорядне значення, оскільки успішне його завершення гарантує, що всі «хороші» альтернативи будуть брати участь у виборі. Тому автоматизація процесів прийняття рішень повинна охоплювати всі етапи процесу прийняття рішення, а відповідні програмно-алгоритмічні засоби повинні включати процедури підтримки цих етапів[13].

У процесі прийняття рішення беруть участь:

а) особа, яка приймає рішення;

б) експерти;

в) консультанти.

Особою, яка приймає рішення, називають людину, що має ціль, яка служить мотивом постановки задачі і пошуку її вирішення; людини, що є компетентним фахівцем у своїй галузі, відповідно до уявлень якого про проблемну ситуацію здійснюється її формалізація; людини наділеного необхідними повноваженнями, відповідно до яких він приймає остаточне або проміжне рішення і несе повну або часткову відповідальність за його наслідки [23].

При формалізації постановки задач прийняття рішень використовується одержувана від особи, яка приймає рішення, інформація про його переваги. Під уподобаннями особа, яка приймає рішення, будемо розуміти сукупність зазвичай спочатку не структурованих його уявлень, пов'язаних з перевагами і недоліками різних альтернативних рішень (тобто має місце деяка вихідна невизначеність переваг). Інформація про переваги використовується на різних етапах формалізації задачі прийняття рішення і її розв'язання [6, 27].

Експертом називають фахівця, здатного надавати інформацію, необхідну для формалізації задачі прийняття рішення, але не несе відповідальність за наслідки прийнятого рішення. Отримана від експертів інформація часто використовується для опису Ω, U і взаємозв'язку Ω і U.

Консультантом (дослідником, системним аналітиком) називають фахівця з теорії прийняття рішень, який здійснює формалізацію задачі прийняття рішень, розробляє процедуру прийняття рішень, організовує роботу експертів і особи, яка приймає рішення.

Іноді під особою, яка приймає рішення розуміється не єдина людина, а група людей, які виконують зазначені функції в процесі прийняття рішень. За типом їх участі в процесі прийняття рішення можуть бути виділені наступні класи задач:

А. Індивідуальне прийняття рішень. На різних етапах прийняття рішення бере участь єдина особа, яка приймає рішення, вона же несе повну відповідальність за прийняте рішення.

Б. Колективне прийняття рішень. У цьому випадку має місце багатоетапний вибір. Нарізних етапах здійснюється вибір, звужує допустиму безліч альтернатив Ω різними особами. Остаточний вибір здійснюється єдиною особою, відповідно до його цілі.

В. Групове прийняття рішень. Тут ставиться задача виробки узгодженого рішення на основі індивідуальних виборів багатьох осіб, які переслідують власні цілі. В цьому випадку немає «головної особи, яка приймає рішення», а потрібно знайти «найбільш справедливе» рішення, «найкращим чином» задовольняє цілям (часто суперечливим) різних осіб, які приймають рішення [22].

При формалізації цілі в задачах прийняття рішень всіх трьох перерахованих типів доводиться мати справу з вихідної невизначеністю індивідуальних переваг. У задачах прийняття рішень типу 1необхідно формалізувати переваги єдиної особи, яка приймає рішення, в задачах типу 2 і 3 – декількох осіб, які приймають рішення. У задач прийняття рішень типу 3, крім того, має місце вихідна невизначеність узгодження індивідуальних переваг.

У цьому сенсі задачі типу 2 і 3 можуть бути декомпозовані до задач типу 1.

За типом цілі задачі прийняття рішень можуть бути розділені на задачі вибору і задачі оцінювання. Задачі оцінювання близькі за своєю суттю до задач класифікації. В цьому випадку задано розбиття множини альтернатив Ω на класи Ω_i ($\cup\, \Omega_i = \Omega$, $\cap\, \Omega_i = \emptyset$) і задана деяка альтернатива $x \in \Omega$. Потрібно визначити доякого класу Ω_i ставитися розглянута альтернатива x. До таких завдань,наприклад, ставитися задача діагностування.

У задачах вибору потрібно побудувати формальний опис деякої універсальної множини альтернативних рішень Ω_u, формалізувати ціль, виділити на основі побудованого опису безліч допустимих альтернативних рішень $\Omega \subseteq \Omega_u$ і здійснити з Ω вибір кращого рішення (кількох кращихрішень).

1.2 Приклади задач прийняття рішень та їх поділ на класи

В теорії прийняття рішень існує введена Саймоном і Ньюеллом (1958) класифікація, що виділяє добре структуровані і слабо структуровані проблеми. Добре структуровані проблеми – це ті, в яких на етапах постановки невизначеність мети (індивідуальних переваг) і невизначеність взаємозв’язку Ωі U усунуті настільки, що всі істотні залежності виражені в числах або символах, які отримують в кінці кінців числові оцінки $[10, 21]$. Слабоструктуровані – ті, які принципово містять як якісні так і кількісні елементи і ступінь невизначеності до моменту вирішення проблеми ще велика. Звичайно, історично застосування методів теорії прийняття рішень було орієнтоване на добре структуровані задачі. Для вирішення таких задач ефективно застосовувалися методи дослідження операцій $[4]$. Роль особи, яка приймає рішення в таких задачах зводиться до спільної роботи з системним аналітиком на етапі постановки задачі. Після того, як побудована адекватна модель і визначені кількісні зв'язки особа, яка приймає рішення, включається в процес прийняття рішення тільки на етапі аналізу отриманого рішення. У разі слабо структурованих задач особа, яка приймає рішення, бере безпосередню участь в процесі прийняття рішення на всіх його етапах.

Задачі прийняття рішень можна розділити на статичні і динамічні. До статичних відносяться задачі, що не потребують багаторазового рішення через короткі інтервали часу. До динамічних відносяться задачі прийняття рішень, що виникають досить часто. Отже, ітераційний характер процесу прийняття рішень можна вважати закономірним, що є підтвердженням необхідності створення і використання ефективних систем комп'ютерної підтримки [7, 16, 17].

Класифікувати задачі прийняття рішень можна за різними ознаками, що характеризує кількість і якість доступної інформації. У загальному випадку задачі прийняття рішень можна представити наступним набором інформації:

$$< T, A, K, X, F, G, D >,$$

де T – постановка задачі (наприклад, вибрати кращу альтернативу або впорядкувати весь набір; A – безліч допустимих альтернативних варіантів; K – безліч критеріїв вибору, X – безліч методів вимірювання переваг (наприклад, використання різних шкал); F – відображення безлічі допустимих альтернатив в безліч критеріальних оцінок (результати); G – система переваг експерта; D – вирішальне правило.

Розглянемо традиційні класифікації:

А. По виду відображення F. Відображення може мати детермінований характер, імовірнісний або невизначений вид, відповідно до якого задачі прийняття рішень можна розділити на задачі в умовах ризику і в умовах невизначеності.

Б. Потужність безлічі K. Безліч критеріїв вибору може містити один критерій або кілька. Відповідно до цього задачі прийняття рішень можна розділити на задачі зі скалярним критерієм і задачі з векторним критерієм (багатокритеріальне прийняття рішень).

В. Тип системи G. Уподобання можуть формуватися однією особою або колективом, в залежності від цього задачі прийняття рішень можна класифікувати на задачі індивідуального прийняття рішень і задачі колективного прийняття рішень.

Використовуючи в якості класифікаційної ознаки тип залежності результатів від альтернатив, отримаємо наступні класи задач прийняття рішень:

А. Задачі прийняття рішень в умовах визначеності (детерміновані задачі) – коли кожна альтернатива приводить до єдиного результату. Тут є функціональна залежність результатів від альтернатив.

Б. Задачі прийняття рішень в умовах стохастики, коли кожна альтернатива може привести до одного з декількох випадків, кожен з яких має певну ймовірність появи. У цьому випадку має місце стохастична залежність результатів від альтернатив.

Можливий ефект від застосування методів теорії прийняття рішень на деякому автоматизованому об’єкті залежить від двох основних чинників: ефекту від одноразового застосування математичних методів до деякої задачі прийняття рішень і від регулярності рішення даної задачі прийняття рішень на даному об’єкті.

По регулярності задачі прийняття рішення можуть бути умовно розділені на три класи:

А. Унікальні задачі. Це, найчастіше, слабо структуровані задачі, які не мають добре опрацьованих аналогів. До таких задач, як правило, відносяться задачі розробки великих цільових програм. Наприклад, програма висадки людини на Місяці, програма економічного розвитку регіону, програма ліквідації наслідків аварії на Чорнобильській АЕС. По регулярності це задачі, які вирішуються одноразово на даному об'єкті.

Б. Специфічні задачі. До даного класу будемо відносити слабо структуровані задачі, які найбільш часто зустрічаються, що мають аналоги, але які в кожній реалізації вимагають обліку проблемної ситуації.

Даний клас задач дуже широкий, до нього ставляться такі задачі, як визначення основних проектних рішень по автоматизації підприємства, розробка виробничої програми підприємства, розподіл ресурсів і т.п. Частота вирішення таких задач на одному об'єкті – кілька разів на рік (причому, проблемна ситуація кожен раз істотно видозмінюється).

В. Типові задачі. До цього класу належать як добре так і слабо структуровані задачі, які мають добре опрацьовані аналоги і значний досвід їх вирішення на конкретному об'єкті в подібних ситуаціях. Це такі задачі, як прийняття рішення оператором, диспетчеризація, діагностування і т.п. Частота рішення – кілька разів на день-місяць на одному об'єкті (причому можливості змін проблемної ситуації незначні і добре вивчені).

Застосування теорії прийняття рішень для задач цих класів по-різному. Якщо розроблена для деякої типової задачі прийняття рішень модель враховує можливість незначної зміни проблемної ситуації та адекватна, то ефект автоматизації цієї задачі очевидна. Дійсно, застосування теорії прийняття рішень для типових задач привело до відчутного і швидкого успіху: розроблені автоматизовані і експертні системи, в рамках яких ефективно вирішуються задачі вибору оптимального маршруту, розкрою матеріалу, діагностування і т.п. [19, 23, 25]

При розв'язанні унікальних задач акценти зміщуються в бік системного аналізу. Ефективність рішення визначається вдалою декомпозицією вихідної задачі на ряд задач, що мають аналоги в класах типових та специфічних задач.

Задачі прийняття рішень в умовах визначеності. До цього класу задач відносяться задачі, для вирішення яких є достатня і достовірна кількісна інформація. У цьому випадку застосовуються методи математичного програмування, суть яких полягає в знаходженні оптимальних рішень на базі математичної моделі реального об’єкта. Основні умови застосовності методів математичного програмування наступні:

а) задача добре формалізована, тобто є адекватна математична модель реального об’єкта;

б) існує деяка єдина цільова функція (критерій оптимізації), що дозволяє судити про якість розглянутих альтернативних варіантів;

в) є можливість кількісної оцінки значень цільової функції;

г) задача має певні ступені свободи (ресурси оптимізації), тобто деякі параметри функціонування системи, які можна довільно змінювати в деяких межах для поліпшення значень цільової функції.

Задачі в умовах ризику. В тих випадках, коли можливі результати можна описати за допомогою деякого імовірнісного розподілу, отримуємо задачі прийняття рішень в умовах ризику. Для побудови розподілу ймовірностей необхідно або мати в розпорядженні статистичні дані, або залучати знання експертів. Зазвичай для вирішення задач цього типу застосовуються методи теорії одновимірної або багатовимірної корисності. Ці задачі займають проміжне положення між завданнями прийняття рішень в умовах невизначеності і визначеності.

Задачі в умовах невизначеності. Ці задачі мають місце, коли інформація, необхідна для прийняття рішень, є неточною, неповною, некількісні, а формальні моделі досліджуваної системи занадто складні, або відсутні. У таких випадках для вирішення задачі зазвичай залучаються знання експертів. На відміну від підходу, прийнятого в експертних системах, для вирішення задач прийняття рішень знання експертів зазвичай виражені у вигляді деяких кількісних даних, званих уподобаннями[24,26,27].

Припустимо, що особа, яка приймає рішення, розглядає кілька можливих рішень: $i = 1, \ldots, m$. Ситуація, в якій діє особа, яка приймає рішення, є невизначеною. Відомо лише, що є в наявності якийсь із варіантів:

$j = 1, \ldots, n$. Якщо буде прийнято i-е рішення, а ситуація є j-я, то фірма, очолювана особою, яка приймає рішення, отримає дохід q_{ij}. Матриця $Q = (q_{ij})$ називається матрицею наслідків (можливих рішень). Яке ж рішення потрібно прийняти особі, яка приймає рішення? У цій ситуації повної невизначеності можуть бути висловлені лише деякі рекомендації попереднього характеру. Вони не обов'язково будуть прийняті особою, яка приймає рішення. Багато що буде залежати, наприклад, від її схильності до ризику. Але як оцінити ризик в даній схемі?

Припустимо, ми хочемо оцінити ризик, який несе i-е рішення. Нам невідома реальна ситуація. Але якби її знали, то вибрали б найкраще рішення, тобто яке приносить найбільший дохід. Якщо ситуація є j-я, то було б прийнято рішення, що дає дохід q_{ij}.

Значить, приймаючи i-е рішення ми ризикуємо одержати не q_j, а тільки q_{ij}, значить прийняття i-го рішення несе ризик недобрати $r_{ij} = q_i - q_{ij}$. Матриця $R = (r_{ij})$ називається матрицею ризиків.

Приклад 1.1 Нехай матриця наслідків є

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 58 & 4 \\ 2 & 34 & 12 \\ 8 & 53 & 10 \\ 1 & 42 & 8 \end{pmatrix}.$$

Складемо матрицю ризиків. Маємо $q_i = \max(q_{i1}) = 8$, $q_2 = 5$, $q_3 = 8$, $q_4 = 12$. Отже, матриця ризиків є

$$R = \begin{pmatrix} 3 & 30 & 8 \\ 6 & 24 & 0 \\ 0 & 05 & 2 \\ 7 & 16 & 4 \end{pmatrix}.$$

Не все випадкове можна «виміряти» ймовірністю. Невизначеність – більш широке поняття. Невизначеність того, якою цифрою вгору ляже гральний кубик відрізняється від невизначеності того, якою буде стан української економіки через 8 років. Коротко кажучи, унікальні одиничні випадкові явища пов'язані з невизначеністю, масові випадкові явища обов'язково допускають деякі закономірності імовірнісного характеру.

Ситуація повної невизначеності характеризується відсутністю якої б то ні було додаткової інформації. Існують правила-рекомендації щодо прийняття рішень.

Правило Вальда (правило крайнього песимізму). Розглядаючи i-е рішення будемо вважати, що насправді ситуація складається найгірша, тобто приносить найменший дохід a_i. Але тепер вже виберемо рішення i_0 з найбільшим a_{i0}. Отже, правило Вальда рекомендує прийняти рішення i_0, таке що

$$a_{i0} = \max_i a_i = \max_i \left(\min_j q_{ij} \right).$$

Так, у прикладі 1.1, маємо $a_1 = 2$, $a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 1$. З цих чисел максимальним є число 3. Значить, правило Вальда рекомендує прийняти третє рішення.

Правило Севіджа (правило мінімального ризику). При застосуванні цього правила аналізується матриця ризиків $R = (r_{ij})$. Розглядаючи i-е рішення будемо вважати, що насправді складається ситуація максимального ризику$b_i = \max[r_{ij}]$.Але тепер вже виберемо рішення i_0 з найменшим b_{i0}.

Отже, правило Севіджа рекомендує прийняти рішення i_0, таке що

$$b_{i0} = \min_i b_i = \min_i \left(\max_j r_{ij} \right).$$

У розглянутому прикладі маємо$b_1 = 8,\ b_2 = 6, b_3 = 5, b_4 = 7$.Мінімальним з цих чисел є число 5. Тобто правило Севіджа рекомендує прийняти третє рішення.

Правило Гурвіца (зважувальні песимістичний і оптимістичний підходи до ситуації). Приймається рішення i, на якому досягається максимум

$$\lambda \cdot \min_j q_{ij} + (1 - \lambda) \cdot \max_j q_{ij},$$

де $0 \leq \lambda \leq 1$.

Значення λ вибирається з суб'єктивних міркувань. Якщо λ наближається до 1, то правило Гурвіца наближається до правила Вальда, при наближенні λ до 0, правило Гурвіца наближається до правилу «рожевого оптимізму». У вищевказаному прикладі при $\lambda = 1/2$ правило Гурвіца рекомендує друге рішення.

Правило Лапласа Іноді в умовах повної невизначеності застосовують правило Лапласа, згідно з яким всі ймовірності p_j вважають рівними. Після цього можна вибрати будь-яке з наведених вище правил-рекомендацій прийняття рішень.

1.3 Невизначеність у задачах прийняття рішень

Більшість реальних інженерних задач, як правило, містить у тому чи іншому вигляді невизначеність. Однак, через концептуальні і методичні труднощі нині немає єдиного методологічного підходу до вирішення таких завдань. Проте, накопичено досить велика кількість методів формалізації постановки і прийняття рішень з урахуванням невизначеностей.

Прийнято розрізняти три типи невизначеностей [12]:

– невизначеність цілей;

– невизначеність наших знань про навколишнє оточення і діючих вце явище факторах (невизначеність природи);

– невизначеність дій активного або пасивного партнера або супротивника.

У наведеній вище класифікації тип невизначеностей розглядається з позицій того чи іншого елемента математичної моделі. Так, наприклад, невизначеність цілей відбивається при постановці завдання на виборі або окремих критеріїв, або всього вектору корисного ефекту. З іншого боку, два інші типи невизначеностей впливають, в основному, на складання цільової функції рівнянь обмежень і методу прийняття рішення.

Крім розглянутої вище класифікації невизначеностей треба враховувати їх тип (або «рід») з точки зору ставлення до випадковості. За цією ознакою можна розрізняти стохастичну (імовірнісну) невизначеність, коли невідомі фактори статистично стійкі і тому представляють собою звичайні об’єкти теорії ймовірності – випадкові величини (або випадкові функції, події і т.д.). При цьому повинні бути відомі або визначені при постановці задачі всі необхідні статистичні характеристики (закони розподілу і їх параметри).

Іншим крайнім випадком може бути невизначеність нестохастичного виду (за висловом Е. С. Вентцеля [6] – «погана невизначеність»), при якій ніяких припущень про стохастичну стійкість не існує. Нарешті, можна говорити про проміжний тип невизначеності, коли рішення приймається на підставі яких-небудь гіпотез про закони розподілу випадкових величин. При цьому особа, яка приймає рішення повинна мати на увазі небезпеку неспівпадання його результатів з реальними умовами. Ця небезпека розбіжності формалізується за допомогою коефіцієнтів ризику. У деяких випадках невизначеність знань є як би «неповною» і доповнюється деякими відомостями про діючі фактори, зокрема, знанням законів розподілу описуючих їх випадкових величин. Цей проміжний випадок відповідає ситуації ризику. Прийняття рішень в умовах ризику може бути засноване на одному з наступних критеріїв:

– критерій очікуваного значення;
– комбінації очікуваного значення і дисперсії;
– відомого граничного рівня;
– найбільш ймовірної події в майбутньому.

Розглянемо більш докладно застосування цих критеріїв.

Критерій очікуваного значення. Використання критерію очікуваного значення передбачає прийняття рішення, що обумовлює максимальний прибуток при наявних вихідних даних про вірогідність отриманого результату при тому чи іншому рішенні. По суті, критерій очікуваного значення є вибіркові середні значення випадкової величини. Природно, що достовірність одержуваного рішення при цьому буде залежати від обсягу вибірки. Так, якщо позначити

$$\text{КОЗ} - E(x_1, x_2, \dots x_n),$$

де $x_1, x_2, \dots x_n$ – прийняті рішення при їх кількості, що дорівнює n, то

$$E(x_i)(\rho)M(x_i),$$

де $M(x_i)$ – математичне очікування критерію.

Таким чином, критерій очікуваного значення може застосовуватися, коли однотипні рішення в подібних ситуаціях доводиться приймати велику кількість разів.

Критерій «очікуваного значення – дисперсія». Як зазначалося вище, критерій очікуваного значення має область застосування, обмежену значним числом однотипних рішень, що приймаються в аналогічних ситуаціях. Цей недолік можна усунути, якщо застосовувати комбінацію критерію очікуваного значення і вибіркової дисперсії $s2$.Можливим критерієм при цьому є мінімум виразу

$$E(Z,\sigma) = E(Z) \pm kU(Z), \tag{1.1}$$

де $E(Z,\sigma)$ – критерій «очікуваного значення – дисперсія»; k – постійний коефіцієнт; $U(Z) = m_Z/S$– вибірковий коефіцієнт варіації; m_Z– оцінка математичного очікування;S– оцінка середнього квадратичного очікування.

Знак «мінус» ставиться в разі оцінки прибутку, знак «плюс»– в разі витрат.

Із залежності (1.1) видно, що в даному випадку точність передбачення результату підвищується за рахунок урахування можливого розкиду значень $E(Z)$, тобто введеннясвоєрідної «страховки». При цьому ступінь обліку цієї страховки регулюється коефіцієнтом k, який як би управляє ступенем урахування можливих відхилень. Так,наприклад, якщо для особи, яка приймає рішення, має велике значення очікувані втрати прибутку, то $k >> 1$ і прицьому істотно збільшується роль відхилень від очікуваного значення прибутку$E(Z)$ зарахунок дисперсії.

Критерій граничного рівня. Цей критерій не має чітко вираженого математичного формулювання і заснований в значній мірі на інтуїції і досвіді особи, яка приймає рішення. При цьому особа, яка приймає рішення, на підставі суб’єктивних міркувань визначає найбільш прийнятний спосіб дій. Критерій граничного рівня зазвичай не використовується, коли немає повного уявлення про безліч можливих альтернатив. Облік ситуації ризику при цьому може проводитися за рахунок введення законів розподілів випадкових чинників для відомих альтернатив.

Критерій найбільш ймовірного результату. Цей критерій передбачає заміну випадкової ситуації детермінованою шляхом заміни випадкової величини прибутку (або витрат) єдиним значенням, що має найбільшу ймовірність реалізації. При цьому необхідно враховувати дві обставини, що ускладнюють застосування цього критерію:

– критерій не можна використовувати, якщо найбільша ймовірність події неприпустимо мала;

– застосування критерію неможливо, якщо кілька значень ймовірностей можливого результату рівні між собою.

Облік невизначених факторів, заданих законом розподілу. Випадок, коли невизначені фактори задані розподілом, відповідає ситуації ризику. Цей випадок може враховуватися двома шляхами. Перший – аналізом адаптивних можливостей, що дозволяють реагувати на конкретні результати; другий – методично, при зіставленні ефективності технічних рішень. Суть першого підходу полягає в тому, що закони розподілу окремих параметрів на етапі проектування можуть бути визначені з достатнім ступенем наближення на основі зіставлення з аналогами, з фізичних міркувань або на базі статистичних даних і даних прогнозів.

Методичний облік випадкових факторів, заданих розподілом, може бути виконаний двома прийомами: заміною випадкових параметрів їх математичними очікуваннями (зведенням стохастичною завдання до детермінованої) і «зважуванням» показника якості по ймовірності (цей прийом іноді називають «оптимізація в середньому»).

Перший прийом передбачає визначення математичного очікування випадкової величини $v–M(v)$ і визначення залежності $W(M(v))$, яка в подальшомуоптимізується по u. Однак зведення до детермінованої схеми може бутиздійснено в тих випадках, коли діапазон зміни параметра u невеликий або колизалежність $W(u)$ лінійна або близька до неї.

Другий прийом передбачає визначення W відповідно до залежностей відповідно для дискретних і безперервних величин:

$$W = \sum_{i=1} W(u_i)P(u_i),$$

$$W = \int W(u)f(u)du,$$

де $P(u_i)$ – ряд розподілів випадкової величини u_i; $f(u)$ – щільність розподілу випадкової величини u.

При описі дискретних випадкових величин найбільш часто використовують розподіл Пуассона, біномінальний. Для безперервних величин основними розподілами є нормальне, рівномірне і експоненціальне.

2 ЕКСПЕРТНІ МЕТОДИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

Інформація в поєднанні з почуттям перспективи, інтуїцією та досвідом допомагають фахівцям точніше вибирати найбільш важливі цілі і напрямки розвитку, знаходити найкращі варіанти вирішення складних науково-технічних і соціально-економічних завдань в умовах, коли немає інформації про рішення аналогічних проблем у минулому.

Експертні методи безупинно розвиваються і удосконалюються. Основні напрямки цього розвитку визначаються цілою низкою чинників, в числі яких можна вказати на прагнення підвищити ступінь використання математичних методів і електронно-обчислювальної техніки, розширити області застосування, а також знайти шляхи усунення недоліків, що виявляються. Незважаючи на практичне використання методу експертних оцінок та успіхи, досягнуті в розробці, є ряд проблем і завдань, що вимагають подальших методологічних досліджень і практичної перевірки.

2.1 Проблеми експертного оцінювання та види експерту

Частиною великої області теорії прийняття рішень є методи експертних оцінок, а саме експертне оцінювання – процедура отримання оцінки проблеми на основі думки експертів (фахівців) з метою подальшого прийняття рішення [11, 22].

У випадках новизни проблеми, її надзвичайної складності, неможливості математичної формалізації процесу вирішення, недостатності наявної інформації, доводиться звертатися до рекомендацій компетентних експертів, які прекрасно знають проблему, – до фахівців. *Експерт* – це особа, що володіє знаннями і здатна виказати аргументовану думку з явища, що вивчається. Їх рішення задачі, аргументація, формування кількісних оцінок, обробка останніх формальними методами дістали назву методу експертних оцінок.

Метод експертних оцінок – процес аналізу експертами і аргументування, формування кількісних оцінок, обробка оцінок формальними методами. *Експертиза* – процедура отримання оцінок від експертів. Якість одержуваних експертних оцінок значною мірою визначається підготовкою експертизи, а також вживаними методами оброблення інформації, одержуваної від експертів. Можна виокремити основні етапи підготовки і проведення експертизи:

– формулювання мети дослідження;
– вибір форми дослідження, визначення бюджету експертизи;
– підготовка інформаційних матеріалів, анкет, модераторів;
– підбір експертів;
– проведення експертизи;
– опрацювання експертних даних;
– підготовку звіту з результатами експертизи.

Перед початком експертного дослідження необхідно чітко визначити його проблему (мету) і сформулювати відповідне питання для експертів.

Класифікувати існуючі види експертних оцінок можна за ознаками:

– за формою участі експертів: очне – заочне. Очний метод дає змогу зосередити увагу експертів на розв’язуваної проблеми, що підвищує якість результату, однак заочний метод може бути дешевшим;

– за кількістю ітерацій (повторів процедури для підвищення точності): однокрокові, ітераційні;

– за задачами: генеруючі рішення – оцінюючі варіанти;

– за типом відповіді: ідейні – ранжуючі, що оцінюють об’єкт за відносною чи абсолютною (чисельною) шкалою;

– за способом обробки думок експертів: безпосередні – аналітичні;

– за кількістю залучених експертів: без обмеження – обмежені. (Зазвичай використовується 5-12 осіб експертів).

Далі, після визначення форми проведення експертизи, вибирають метод експертного опитування. Найвідоміші методи експертних оцінок: мозковий штурм, метод аналізу ієрархій та метод Дельфи. Кожному методу відповідають свої терміни проведення і потреба в експертах. Після вибору методу експертного оцінювання можна визначити витрати на процедуру, які охоплюють оплату експертів, оренду приміщення, придбання канцтоварів, оплату фахівця з проведення та аналізу результатів експертизи [12, 15, 22].

Для проведення процедури опитування необхідно підготувати інформаційні матеріали з описом проблеми, наявні статистичні дані, довідкові матеріали, бланки анкет, інвентар. Варто уникати наступних помилок: висловлювати ставлення керівництва до очікуваних результатів; згадувати розробників матеріалів; виділяти той чи інший варіант рішення; Дані мають бути нейтральними і різнобічними. Заздалегідь необхідно розробити анкет та бланки для експертів. Залежно від методу вони можуть бути з відкритими та закритими питаннями, відповідь може даватися у вигляді парного порівняння, рангового ряду, судження, у вигляді абсолютної оцінки або в балах.

У вирішенні задачі вибору експертів істотно значимими є:

– персональний підбір експертів;

– формування представницької групи експертів.

Критерії підбору експертів: компетентність (наявність знань і досвіду з розв’язуваної проблеми); антиконформізм (несхильність до впливу авторитетів); креативність (здатність вирішувати творчі завдання); колективізм (здатність працювати в колективі згідно із загальновизнаними етичними нормами поведінки); конструктивність мислення (здатність давати практично значущі рішення); самокритичність (здатність критично ставитися до власної компетенції та своїх суджень); наявність часу для роботи в експертних групах; зацікавленість – наявність бажання у вирішенні проблеми, що розглядається [6, 21, 28].

Саму процедуру проводить незалежний модератор, який контролює дотримання регламенту, роздає анкети та матеріали, але не висловлює свою думку.

При обробці результатів опитування, залежно від цілей експертного оцінювання і обраного методу вимірювання, виникають наступні основні завдання:

– побудова узагальненої оцінки об’єктів на основі індивідуальних оцінок експертів;

– побудова узагальненої оцінки на основі парного порівняння об’єктів кожним експертом;

– визначення відносних ваг об’єктів;

– визначення узгодженості думок експертів;

– визначення залежностей між результатами оцінювання різних експертів;

– оцінка надійності результатів обробки.

За результатами експертного оцінювання оформляється звіт. У ньому вказується: мета дослідження; склад експертів; отримана оцінка; аналіз результатів.

2.2 Загальні методи експертного оцінювання

Існує дві групи експертних оцінок:

а) індивідуальні оцінки – використання думки окремих, незалежних один від одного експертів;

б) колективні оцінки – використання колективної думки експертів.

Більшою точністю володіє спільна думка, у відмінності від індивідуальної думки кожного із спеціалістів. Для отримання кількісних оцінок якісних властивостей і характеристик застосовують цей метод.

Для кількісного аналізу суб’єктивних оцінок експертів існують спеціальні шкали вимірювання: бальна, рангова, попарних порівнянь, числова , вербально-числова шкали.

Метод асоціацій заснований на вивченні схожого за властивостями об’єкта з іншим об’єктом.

Метод бінарних (парних) порівнянь заснований на зіставленні експертом альтернативних варіантів, з яких обираються найкращі.

Метод векторів переваг засновано на аналізі експертом всього набору альтернативних варіантів і вибору найкращих.

Метод фокальних об’єктів – перенесення ознак випадково відібраних аналогів на досліджуваний об’єкт.

Індивідуальне експертне опитування – опитування у формі інтерв’ю або у вигляді аналізу експертних оцінок. Це означає бесіду замовника з експертом, в ході якої замовник отримує відповіді на питання, які значимі для досягнення програмних цілей. Аналіз експертних оцінок передбачає індивідуальне заповнення експертом розробленого замовником формуляра, за результатами якого проводиться всебічний аналіз проблемної ситуації і виявляються можливі шляхи її вирішення. Свої міркування фахівець виносить у вигляді окремого документа.

Метод середньої точки – формулюються два альтернативних варіанти вирішення, один з яких менш привабливий. Далі експерт підбирає третій альтернативний варіант, оцінка якого розташована між значень першої і другої альтернатив.

Метод нарад – метод прийняття рішення керівником шляхом проведення наради зі своїми підлеглими, в рамках якого кожний з підлеглих висловлює свою позицію з даного питання. Після чого керівник зважує виказані аргументи та ухвалює рішення.

Метод комісій – відкрита дискусія, у ході якої обговорюються проблеми, для вироблення єдиної думки фахівців. Колективна думка визначається за результатами відкритого чи таємного голосування.

Метод суду – експерти діляться на три групи: 1) противники альтернативи – намагаються виявити її негативні сторони; 2) прихильники альтернативи рішення – виступають в якості її захисту; 3) регулює хід експертизи і виносить остаточне рішення.

Метод сценаріїв – сукупність правил щодо письмового викладу пропозицій фахівців з вирішуваної проблеми. Сценарій – документ, що містить аналіз проблеми та пропозиції для її реалізації. Спочатку пропозиції пишуть експерти індивідуально, після чого вони узгоджуються і висловлюються у формі єдиного документа.

Метод мозкового штурму – спільне очне обговорення проблеми групою фахівців. Метод реалізується у два етапи. 1. Перший етап («конференція ідей») триває приблизно 1-1,5 години. У його ході експерти висувають різні ідеї, що стосуються трактування аналізованої ситуації чи прогнозу розвитку явища. Ідеї протоколюються, але не критикуються та не обговорюються. При цьому ідеї можуть бути самими різними, в т.ч. і «нісенітними». Головний принцип: чим більше, тим краще. 2. На другому етапі, ідеї оцінюються, обговорюються та з них вибираються найвірніші. Прийматися остаточний вердикт з проблеми може шляхом явного або неявного голосування. Процедури генерації та обговорення ідей можуть бути більшою чи меншою мірою формалізовані[19].

Метод Дельфи (дельфійський метод) розроблений в 1950-1960 рр. у США корпорацією RAND. Назва походить від дельфійського оракула (Древня Греція). Суть методу: за допомогою серії послідовних дій (опитувань) прийти до максимального консенсусу при визначенні правильного рішення. Аналіз проводиться в кілька етапів, а отриманні результати обробляються статистичними методами. Базовий принцип: деяка кількість незалежних експертів (не знають один про одного) краще оцінює і пророкує результат, ніж структурована група (колектив) особистостей. Це дає змогу: уникнути відкритих зіткнень, тобто виключає безпосередній контакт фахівців між собою і, отже, груповий вплив, що виникає при спільній роботі і складається в пристосуванні до думки більшості; проводити опитування екстериторіально, не збираючи експертів в одному місці (наприклад, за допомогою електронної пошти) [15].

Етапи дельфійського методу.

Попередній:

– підбір групи експертів.

Основний:

– постановка проблеми: експерти отримують питання і повинні розбити його на підпитання; організаційна група з підпитань відбирає найчастіші та створює загальний опитувальник;

– експерти отримують опитувальник для зауважень; на основі відповідей фахівців складається наступний опитувальник;

– покращений опитувальник знову отримується експертами, яким тепер треба дати свій варіант рішення, а також розглянути крайні точки зору, висловлені іншими експертами. Виявляються домінуючі судження експертів, зближуються їхні точки зору. З доводами тих, чиї судження сильно вибиваються із загального русла, ознайомлюють усіх експертів. Після цього всі експерти можуть змінювати думку, а процедура повторюється;

– усі попередні етапи повторюються, поки не буде досягнута узгодженість між експертами, або не буде встановлено відсутність єдиної думки з проблеми. Вивчення причин розбіжностей в оцінках експертів дає змогу виявити непомічені раніше аспекти проблеми й зафіксувати увагу на ймовірні наслідки розвитку аналізованої ситуації або проблеми. Відповідно до цього і виробляється остаточна оцінка та практичні рекомендації. Зазвичай проводиться три етапи та, якщо думки сильно різняться, етапів може бути більше.

Аналітичний:

– розроблення кінцевих рекомендацій після перевірка узгодженості думок експертів та аналіз отриманих висновків.

2.3 Методи експертного оцінювання для розв'язання задач прийняття рішень

2.3.1 Методи обробки експертної інформації

За характером постановки питань і формою відповідей можна виділити основні підходи до проведення експертних оцінок:

а) бальних оцінок;

б) абсолютних оцінок;

в) ранжування;

г) відносних оцінок;

д) попарних порівнянь.

Метод бальних оцінок передбачає використання бальної шкали, межі якої визначені та відомі експертам.

Якщо експерти мають однакову вагу (рівноправні), то використовують найпростішу групову оцінку (x_i), яка обчислюється як середньо-арифметична бальних оцінок експерта для кожного i-го об'єкта експертизи за формулою:

$$x_i^{ca} = \frac{1}{l}\sum_{j=1}^{l} x_{ij},$$

де x_{ij} – бальна оцінка i-го об'єкта j-м експертом, m – кількість об'єктів, l – кількість експертів.

Коли кожний фахівець має різну вагу (згідно з досвідом, компетентністю, ефективністю проведення експертиз тощо), тоді групова бальна оцінка об'єкта може бути обчислена як середньозважена:

$$x_i^{сз} = \sum_{j=1}^{l} q_j x_{ij}\,; \quad i = \overline{1,m}; \quad \sum_{j=1}^{l} q_j = 1,$$

де q_j $\left(x_{ij} = \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p} x_{ijk}\right)$ – вагові коефіцієнти компетентності експертів (визначені суб’єктивно).

За умови різної важливості частин (ознак) досліджуваного об’єкта й різної ваги експертів групова бальна оцінка об’єкта обчислюється за формулою:

$$x_i^{рв} = \frac{1}{l}\sum_{j=1}^{l} q_j x_{ij} = \frac{1}{lp}\sum_{j=1}^{l} q_j \sum_{k=1}^{p} \alpha_k x_{ijk}\,; \quad i = \overline{1,m},$$

де $x_{ij}^{рв} = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} \alpha_k x_{ijk} \left(\sum_{k=1}^{p} \alpha_k = 1\right)$, α_k – вагові коефіцієнти ознак (частин) об’єкта.

Величини q_j та α_k найзручніше визначати або задавати так, щоб їхні числові значення містилися в межах від 0 до 1.

Вагові коефіцієнти компетентності експертів q_jта частин (ознак) об’єкта α_k можна визначати за взаємним оцінюванням і диференціальним самооцінюванням.

При диференціальному самооцінюванні оцінку дають за двома групами критеріїв: за критеріями, які характеризують ознайомленість з об’єктами експертизи, та за критеріями, що характеризують ознайомленість експерта з основними джерелами інформації в досліджуваній галузі.

Метод взаємооцінювання – побудова матриці, елементами якої є числа – взаємні оцінки експертів (наприклад, це може бути кількість фахівців, які вважають i-го експерта компетентнішим, ніж j-го).

Основні переваги методу: можливість враховувати компетентність експертів; простота визначення групових оцінок об’єктів після проведення експертизи; можливість аналізу за допомогою як кількісних, так і якісних методів, що, безумовно, дає змогу порівняти результати.

Якщо висновки збігаються, то можна констатувати, що вони достовірні та базуються на матеріалі експертизи, а не на методах оброблення даних.

Недоліки методу пов'язані з труднощами отримання об'єктивних початкових оцінок x_{ij}, q_j, x_{ijk}. Та не треба забувати, що це дуже трудомістка робота.

Метод абсолютних оцінок – використання числової шкали оцінок, межі якої визначено технічними характеристиками об'єкта. Оцінка – фізична величина в певних одиницях вимірювання, тобто у наведених вище формулах використовують абсолютні оцінки замість бальних оцінок (x_{ij}).

Метод відносних оцінок передбачає отримання від експерта відносної оцінки якості об'єкта. Цей метод використовує числову або бальну шкалу відношень і може застосовуватись, наприклад, в оцінці відносної важливості критеріїв або коефіцієнтів відносної важливості цілей стратегії. При цьому для отримання групової оцінки об'єкта використовуються формули розрахунку середньоарифметичної та середньозваженої групових бальних оцінок. Сума відносних оцінок має дорівнювати 1.

Метод ранжування. Експерти оцінюють якість об'єктів за допомогою встановлення їхнього рангу (порядкового номера об'єкта, якщо всі об'єкти розташовують у порядку зростання їхньої якості). Чим меншу (більшу) суму рангів отримає об'єкт від усіх фахівців, тим нижча (вища) його якість.

Суворе ранжування. Задача полягає в зіставленні оцінюваної системі однієї перестановки. Визначимо експертизу Е4:

Ω– безліч всіх перестановок;

L– експертизи ізольовані;

Q– зворотний зв'язок відсутній.

Відображення φ визначається наступним чином. Результати опитування експертів зводяться в табл. 2.1. В i-му рядку стоять місця (ранги) дані i-м експертом.

В $(N+1)$-му рядку стоять суми рангів, отриманих об'єктами від експертів. Всі n об'єктів упорядковуються відповідно до величини r_s, яка визначається за формулою

$$r_s = \sum_{j=1}^{N} r_{sj}. \tag{2.1}$$

На перше місце ставиться об'єкт, у якого r_s мінімально і т.д.

Таблиця 2.1

Експерти	Об'єкти			
	1	2	…	n
1	r_{11}	r_{12}	…	r_{1n}
2	r_{21}	r_{22}	…	r_{2n}
…	…	…	…	…
N	r_{N1}	r_{N2}	…	r_{Nn}
Σ рангів	r_1	r_2	…	r_n

Ступінь узгодженості думок експертів визначається за допомогою коефіцієнту конкордації W. Зупинимося на цьому докладніше. Розглянемо два крайніх випадку. Перший випадок: кожен об'єкт отримав від всіх експертів однаковий ранг, який для j-го об'єкта дорівнює r_j/N, тобто ранжування всіх N експертів збігаються. Другий випадок: повна неузгодженість експертів. Будемо розуміти під неузгодженістю протилежність ранжувань, що надаються експертами. В силу (2.1) отримуємо

$$\sum_{i=1}^{N} r_s = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{N} r_{ij} = \sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{i=1}^{n} r_{ij} \right). \tag{2.2}$$

Сума рангів, які дають кожен експерт (тобто вираз у дужках в (2.2)), завжди дорівнює $n(n+1)/2$. Тому.

$$\sum_{i=1}^{N} r_i = Nn(n+1)/2.$$

За середній ранг приймають величину

$$r_{\text{ср}} = \sum_{i=1}^{n} r_i/n = N(n+1)/2, \tag{2.3}$$

а за ступінь узгодженості думок *Коефіцієнт конкордації* W.

Коефіцієнтом конкордації W для випадку строгого ранжування, тобто відсутності рівних рангів в ранжуванні кожного експерта, називається величина

$$W = \frac{12\sum_{i=1}^{n}[r_i - 0{,}5N(n+1)]^2}{N^2(n^3-n)}, \tag{2.4}$$

де n – число об'єктів, N – число експертів.

Статистичну значимість ранжування перевіряють наступним чином. Вибирають ймовірність помилки $P_{\text{п}}$. Припускають, що величина $N(n-1)W$ має χ^2-розподіл з $(n-1)$ ступенем свободи. За $P_{\text{п}}$за спеціальними таблицями знаходять табличне значення W_a. Якщо коефіцієнт W, отриманий при реалізації експертизи, більше або дорівнює W_a, то отримане ранжування вважають статистично значимим$[4{,}10{,}13{,}22,]$.

Приклад Нехай проводиться експертиза з оцінки впливу різних чинників на роботу адміністратора комп'ютерного класу. Наведено список з шести ознак, що впливають на процес. Десять експертів ранжували ознаки за важливістю. Результати їх роботи наведені в табл. 2.2. Розрахуємо коефіцієнт конкордації. Суми рангів відповідно до (2.1) дорівнюють: $r_1 = 52, r_2 = 46$, $r_3 = 19$, $r_4 = 28$, $r_5 = 17, r_6 = 48$. З (2.3) знаходимо $r_{i\text{ ср}} = 35$. Підставляючи знайдені значення в (2.4), отримаємо $W = 0{,}690$.

Таблиця 2.2

Ознаки	Експерти										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\sum r_{ij}$
Шум	6	1	6	6	6	6	4	5	6	6	52
Вентиляція	4	5	4	5	5	3	5	6	4	5	46
Кількість ПК	2	2	2	3	3	2	1	1	1	2	19
Випромінювання	1	4	3	2	2	4	3	3	3	3	28
Тип ПК	3	3	1	1	1	1	2	2	2		17
Тип ОС	5	6	5	4	4	5	6	4	5	4	48

Визначимо статистичну значущість ранжування. Нехай потрібно, щоб ймовірність похибки, тобто імовірність того, що отримане ранжування є випадковим, $P_{\text{п}} = 0{,}01$. Обчислимо величину $N(n-1)W = 10 \cdot 5 \cdot 0{,}69 =$ $= 34{,}5$. З таблиць розподілу χ^2 для числа ступенів свободи, рівного 5, знаходимо $\chi^2_{0{,}01}(5) = 15{,}086$, що відповідає табличному значенню величини $N(n-1)W_a$. Обчислене значення, рівне 34,5, більше табличного. Отже, отримане ранжування статистично значиме.

Нестроге ранжування. Задача полягає в зіставленні системі нестрогого ранжування (вектору з певними властивостями). При цьому деяким об’єктам приписуються рівні ранги, тобто вони можуть бути рівноцінними. Їм. Так, якщо два об’єкти ділять місця 4-5, то кожен з них отримує ранг 4, 5.

Експертиза Е5 для несуворого ранжування відрізняється від експертизи Е4 тільки безліччю Q. Коефіцієнт конкордації для несуворого ранжування визначається формулою

$$W = \frac{12\sum_{i=1}^{n}[r_i - 0{,}5N(n+1)]^2}{N^2(n^3-n) - N\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{k_i}\left(t_{ij}^3 - t_{ij}\right)}, \qquad (2.4)$$

де k_i– число груп рівних рангів, введених i-м експертом; t_{ij} – кількість дрібних рангів в j-й групі, введеної i-м експертом.

Вище передбачалося, що експерти мають рівну компетентність. Однак, якщо компетентність експертів різна і може бути оцінена деякими числом, то формули (2.1)-(2.5) потребують уточнення.

Нехай компетентність j-го експерта оцінюється позитивною величиноюα_j (вага експерта). Будемо вважати ці величини нормованими $\left(\sum_{j=1}^{N}\alpha_j = 1\right)$. Суму рангів r_i об'єктів будемо розраховувати за формулою $r_i = \sum_{j=1}^{N} r_{ij}\alpha_j$. Коефіцієнт конкордації з урахуванням компетентності, експертів визначають тією ж формулою (2.5). Перевірку статистичної значущості роблять так само, як і вище. Відзначимо, що перевіряють статистичну значущість того, що побудоване групове ранжування відображає колективну думку експертів, тобто перевіряють значущість збіжності їх думок.

Метод парних порівнянь для несуворого ранжування. Експериментально встановлено, що великих труднощів для експерта представляє побудова ранжування на основі одночасного обліку декількох різних ознак, за якими оцінюються об'єкти. У цих випадках експерти розв'язують задачу попарного порівняння.

Визначимо експертизу Е6 для вирішення задачі несуворого ранжування:

Ω – безліч всіх перестановок;

Ω_E – безліч всіх матриць$A = \left(a_{ij}\right)$, де

$$a_{ij} \in \{0,1\},\ \ a_{ij} + a_{ji} = 1\ \ (i \neq j),\ \ a_{ii} = 0\ \ \left(i = \overline{1,n}\right), \tag{2.6}$$

L – експерти ізольовані;

Q – зворотний зв'язок відсутній.

Відображення φ визначається наступним чином. Обчислюють матрицю

$$A = \left(a_{qt}\right) = \sum_{j=1}^{N} A^j,$$

де $A^j = \left(a_{qt}^j\right)$– оцінка j-го експерта.

Знаходять величини $a_s = \sum_{i=1}^{n} a_{is}\,(s = \overline{1,n})$. Об'єкти впорядковують відповідно до величин a_s. Об'єкт з мінімальним a_s отримує ранг 1 і т.д., по зростанню.

У методі парних порівнянь кожен з експертів проводить $C_n^2 = \frac{n!}{2(n-2)!}$ порівнянь, тобто порівнює кожен об'єкт з кожним. Результат порівнянь j-го експерта являє собою матрицю розміру $n \times n$, в якій $a_{ik}^j = 1$ тоді і тільки тоді, коли на думку j-го експерта i-й об'єкт краще k-го. Для будь-якої пари об'єктів $\langle p, q\rangle$ або pпереважнішеq, або навпаки. Це і виражено умовами (2.6); $a_{ii}^j = 0$ за визначенням.

Зіставимо бінарному відношенню граф. На рис. 2.1 наведено приклад графа відносин з матрицею

$$A^j = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Оскільки на відношення не накладена вимога ациклічності, то відповідний граф може мати цикли (наприклад, 2, 3, 5, 6, 2 на рис. 2.1).

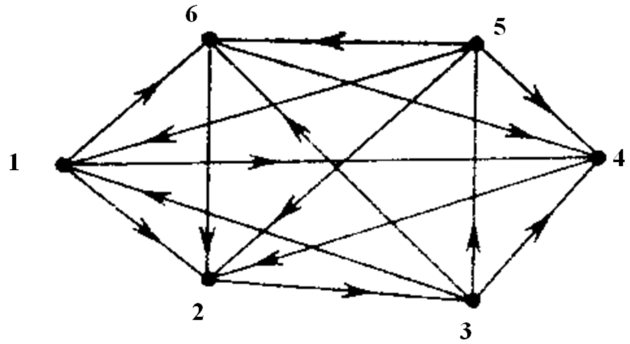

Рисунок 2.1

Кажуть, що перевага може бути *виражена рангами*, якщо всі об'єкти упорядковуються так, що $a_{ik} = 1$ тоді і тільки тоді, коли ранг i-го об'єкта більше рангу k-го.

Необхідною і достатньою умовою того, що переваги виражаються рангами, є ациклічності відносини переваги експерта. У розглянутому випадку наявність циклів еквівалентно наявності циклів довжини 3 в силу властивостей графа. Максимальне число циклів довжини 3 для парного n дорівнює $(n^3 - 4n)/24$; для непарного $(n^3 - n)/24$.

Коефіцієнтом сумісності думок експерта називається величина

$$\nu = \begin{cases} 1 - 24d/(n^3 - n), & \text{якщо } n \text{ непарно,} \\ 1 - 24d/(n^3 - 4n), & \text{якщо } n \text{ парно;} \end{cases}$$

тут d – число циклів довжини 3. Величину ν можна використовувати в якості оцінки компетентності експерта при експертизах типу Е6.

Рангова кореляція. Зазначимо на один із способів оцінки зв'язку між двома різними ранжуваннями. Нехай $\langle i_1, \ldots, i_n \rangle$, $\langle j_1, \ldots, j_n \rangle$ – два несуворих ранжування. Покладемо

$$a_{st} = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad i_s = i_t, \\ 1, & \text{якщо} \quad i_s < i_t, \\ -1, & \text{якщо} \quad i_s > i_t. \end{cases}$$

Аналогічно визначимо величини b_{st} для 2-го ранжування. Коефіцієнтом рангової кореляції Кендалла називається величина

$$\tau = \frac{2\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} a_{st} b_{st}}{n(n-1)}. \quad (2.7)$$

Розрахувавши коефіцієнт τ, оцінимо значимість виявленого зв'язку між ранжировками. Для цього позначимо чисельник (2.7) через S. Якщо зафіксувати одне ранжування (суворе) і розглядати всі $n!$ інших строгих ранжувань, можна знайти частоту всіх можливих значень S (і відповідних τ). При $n > 10$ розподіл S близький до нормального зі середньоквадратичним відхиленням $\sigma = \sqrt{n(n-1)(2n+5)/18}$. При $n \le 10$ розподіл S можна знайти в спеціальних таблицях (Кендалла).

У загальному випадку, якщо спостережувана величина S приймає значення S_0 таке, що випадкова поява величини S_0 або більшої малоймовірно, то гіпотеза про незалежності ранжувань відкидається. Якщо $P\{|S| \ge S_0\} < p_0$, то отриманий коефіцієнтτ вважається значущим. Величину p_0 задають як рівень значущості; порівнюють обчислене значення S з табличним для даного рівня значущості p_0.

Існує два методи:

– ***частинних попарних порівнянь,*** коли заповнюється тільки одна половина таблиці);

– ***повних попарних порівнянь*** – заповнюється вся таблиця.

Після заповнення таблиці методом частинних попарних порівнянь розраховується f_{ij} – частота переваги i-го об'єкта за оцінкою j-го експерта (кількість чисел (i) в таблиці j-го експерта).

Середня частота переваги f_i для i-го об'єкта за всіма експертами визначається за формулою:

$$f_i = \frac{1}{l}\sum_{j=1}^{l} f_{ij}, \quad i = \overline{1,m}.$$

Загальна кількість зіставлень N, виконаних кожним експертом методом частинних попарних порівнянь, обчислюється за формулою:

$$N = \frac{m(m-1)}{2}.$$

Оцінка якості (c_i) i-го об'єкта визначається так:

$$c_i = \frac{f_i}{N} = \frac{2f_i}{m(m-1)}; \quad i = \overline{1,m}, \quad \left(\sum_{i=1}^{m} c_i = 1\right).$$

№ об'єкта	1	2	3	…	m
1	×	№	№	№	№
2		×	№	№	№
3			×	№	№
…				×	№
m					×

Метод повних попарних порівнянь передбачає заповнення всієї таблиці. При цьому кожна пара об'єктів порівнюється два рази для того, щоб оцінити якість роботи фахівця, його точність і нейтралізувати можливу помилку. В ідеалі матриця має бути симетричною стосовно головної діагоналі.

Оцінка якості (c_i) i-го об’єкта:

$$c_i = \frac{f_i}{N} = \frac{f_i}{m(m-1)}; \quad i = \overline{1, m}, \quad \left(\sum_{i=1}^{m} c_i = 1\right).$$

Простота у формуванні початкових матриць, чітке математичне обґрунтування здійснюваних операцій, можливість переходу до іншого подання експертної інформації (ранжування, бальні оцінки тощо) – це переваги методу попарних порівнянь.

2.3.2 Методи голосування

Прийняття рішень в умовах конфлікту є однією з ключових проблем в сучасному суспільстві, тим більше, якщо мова йде про вибір кращої альтернативи шляхом голосування. Чи справедливий був вибір? Відображено чи думка більшості? Без застосування методів прикладної математики вирішення цієї проблеми неможливо [3, 9, 10].

В основі способу вибору потрібної персоналії на вищий пост лежить процедура голосування. Вважається, що колективна думка завжди краще індивідуального. Але все на так просто, як здається. Чи можна створити таку систему голосування, щоб вона була раціональною, вирішальною і демократичною одночасно? Спосіб голосування може бути позбавлений довільності, безвихідних ситуацій або 10 нерівноправності, але він не може уникнути всіх цих недоліків одночасно. Парадокс полягає в тому, що не існує універсального способу виявлення колективного переваги. Існує безліч досить розумних способів його виявлення. Як правило, вони призводять до абсолютно різних, а іноді і до прямо протилежних результатів. При цьому зовсім не мається на увазі грубе порушення закону або вміння експертів PR аргументовано переконувати людей в речах протилежних. Методика маніпулювання демократією передбачає (в тому числі) всього лише таким чином побудувати регламент проведення голосування, щоб отримати необхідний кінцевий результат. Тобто, спочатку потрібно прийняти потрібне правило голосування, а далі – справа математики.

Приклад Вибори до Ради органу громадського самоврядування. 300 осіб виборців повинні вибрати 30 чоловік до ради органу громадського самоврядування. На ці 30 місць претендують 180 кандидатів. Адміністрація підприємства визначила правило: обраним до Ради буде той, хто набрав більше половини від загального числа голосів. Виборці в бюлетені відзначають кращих (не обов'язково одного). Після проведення першого туру тільки 2 людини набрало більше половини голосів виборців. Після проведення другого туру було обрано ще 3 кандидати. Адміністрація прийшла до висновку, що таким чином далі голосувати не можна, так як цей процес затягнеться надовго. Обмежень на процедуру проведення виборів не було. Тому вирішили провести вибори «навпаки»: в бюлетені викреслювати тих, хто на думку виборця не гідний бути в Раді, а голоси «за» вважати кількість бюлетенів, де кандидат не викреслять. Третій тур провели саме таким чином. І виявилося, що необхідну кількість – 25 кандидатів – набрано! Вибори закінчилися. Виявляється, при такій великій кількості кандидатів у виборців тобто не 2 альтернативи («гідний», «негідний»), а 3: «гідний», «негідний» і «не знаю». І при правилі проведення третього туру відбулося об'єднання голосів «гідний» і голосів «не знаю». Тобто маніпуляція з голосами тих, хто утримався. Припустимо тепер, що серед цих кандидатів є новий співробітник, якого ніхто не знає, він тільки прийшов на підприємство і самовисунувся. Цей кандидат в третьому турі буде обраний одноголосно! Тобто він обраний лише за рахунок голосів «не знаю». Колективний вибір часто спотикається об поріг неможливості з'ясування прийнятного рішення. Це відбувається при певних співвідношеннях числа варіантів і величин груп виборців.

Відомий історичний приклад, виборів Папи Римського. Для того, щоб зайняти цей пост завжди було чимало бажаючих, але при відсутності суворої більшості і при відсутності стійких коаліцій жоден з кандидатів не міг набрати необхідні 2/3 голосів. Тоді до всесильних кардиналів застосували примусовий прийом: вхід в приміщення, де проходять вибори, замуровувався до тих пір, поки вони не виберуть главу церкви. І тільки після появи над ватиканській дахом димки, що свідчить про обрання Папи, кардиналів випускали на волю. Таким чином долається поріг «парадоксу голосування». Але за прикладами не обов'язково звертатися в середні століття.

Основні процедури голосування. Розглянемо питання прийняття рішень за допомогою поширених на практиці процедур голосування, а також деякі виникаючі при цьому проблеми. Голосування містить наступні елементи:

а) формується набір кандидатів (кандидатів на виборну посаду, технічних проектів, творів мистецтва, альтернативних законопроектів і т.п.) щодо яких має бути прийнято рішення;

б) кожен з учасників голосування (виборців) виробляє свою думку про цих кандидатів і відображає його у виборчому бюлетені відповідно до інструкції;

в) відповідно до деякої формальною процедурою за цією інформацією, що надійшла від виборців, визначається колективне рішення.

Різні процедури голосування розрізняються тим, який зміст вкладається в кожен з цих трьох пунктів. При становленні демократії елементи грамотності в теорії голосуванні, мабуть, потрібні всім свідомим членам суспільства. Будемо припускати, що кінцеве число виборців мають обрати одного кандидата з кінцевої безлічі кандидатів. Припустимо також, що індивідуальні думки виборців не допускають випадків байдужості. Правило голосування являє собою систематичне рішення, що спирається на індивідуальні думки виборців. Вибір кандидата відбувається на основі повідомлених виборцями переваг щодо кандидатів і тільки на основі цих переваг. Уподобання виборців будемо представляти у вигляді таблиці наступного виду:

Виборчі групи	I	II	…
Кількість виборців у групі	N_1	N_2	…
Порядок переваги кандидатів виборцями	a b c …	d c a …	… … … …

Порядок кандидатів у стовпці певної групи відповідає рейтингу у відповідній групі виборців. наприклад, в першій виборчої групі кандидат a краще кандидата b, а кандидат b, в свою чергу, краще кандидата c. Це можна записати як $a \succ b \succ c \succ$.... У другій виборчій групі порядок можна записати так: $d \succ c \succ a$.... Таку таблицю також називають «профілем голосування».

Якщо кандидатів двоє, то звичайне правило голосування більшістю голосів є найбільш справедливим. Розглянемо голосування з трьома і більше кандидатами. Найбільш популярним правилом голосування при кількості кандидатів більшому двох є правило відносної більшості.

Правило відносної більшості. Кожен виборець віддає свій голос за найбільш кращого для себе кандидата – залишає одне ім’я в бюлетені, інші викреслює. Обирається кандидат, який отримав найбільшу кількість голосів.

Приклад 1 Чотири кандидати a, b, c, d вибираються в чотирьох виборчих групах, де кількість виборців 3, 5, 7 і 6 відповідно:

I	**II**	**III**	**IV**
3	5	7	6
a	a	b	c
d	c	d	d
c	d	c	b
b	b	a	a

За правилом відносної більшості a набирає 8 голосів, b набирає 7 голосів, c набирає 6 голосів, d набирає 0 голосів. Отже, переможцем є кандидат a. Але наскільки хороший кандидат a? 13 виборців проти 8 вважають, що $b \succ a$, також 13 виборців проти 8 вважають, що $c \succ a$ і ще 13 виборців проти 8 вважають, що $d \succ a$. Тобто, для більшості виборців кандидат a є найгіршим з усіх кандидатів.

Приклад 2 У п'яти виборчих групах, з кількістю виборців відповідно 9, 7, 6, 2 і 4 вибирають одного з чотирьох кандидатів a, b, c, d:

I	II	III	IV	V
9	7	6	2	4
a	b	c	c	d
d	d	b	a	c
b	c	d	b	b
c	a	a	d	a

За правилом відносної більшості a набирає 9 голосів, b набирає 7 голосів, c набирає 8 голосів, d набирає 4 голоси. Отже, переможцем також є кандидат a. Проаналізуємо і тут ситуацію з переможцем. 17 виборців з 28 вважають, що $b \succ a$, 19 виборців вважають, що $c \succ a$ і ще 17 виборців вважають, що $d \succ a$. Крім того, 17 виборців поставили кандидата a на останнє місце, тобто абсолютна більшість вважає, що цей кандидат – найгірший.

Формально правило відносної більшості враховує волю більшості. Однак, це правило може суперечити думці більшості, тобто приводити до обрання кандидата, який при парному порівнянні програє будь-якому іншому кандидату.

Правило відносної більшості з вибуванням. У першому турі кожен виборець віддає свій голос найбільш кращого для себе кандидата (залишає одне ім'я в бюлетені, інших викреслює). Якщо кандидат набирає сувору більшість голосів, то він обирається. В іншому випадку в другому турі проводиться голосування за правилом більшості з двома кандидатами, які набрали найбільшу кількість голосів у першому турі.

Розглянемо результати виборів при даній обробці думки виборців, наведених в прикладі 1. У першому турі кандидат a набирає 8 голосів, b набирає 7 голосів, c набирає 6 голосів, d набирає 0 голосів. Максимальна кількість голосів у кандидата a, але ця кількість не є строгим більшістю $(8 < 11)$. Отже, проводиться другий тур. У другому турі порівнюються кандидатиa і b. 13 виборців проти 8 вважають, що $b \succ a$, отже, переможцем є кандидат b.

Здавалося б, все правильно і повністю відповідає процедурі голосування. Однак як справи з кандидатами c і d, які вибули в першому турі? 14 проти 7 вважають, що $c \succ b$, і рівно стільки ж виборців вважають, що $d \succ a$. Виходить що обидва кандидати, які вибули в першому турі, були в два рази краще переможця.

Розглянемо тепер результати виборів в прикладі 2 по процедурі відносної більшості з вибуванням. У першому турі кандидат a набирає 9 голосів, b набирає 7 голосів, c набирає8 голосів, d набирає 4 голоси. Максимальна кількість голосів укандидата a, але ця кількість не є строгою більшістю $(9 < 15)$. Отже, проводиться другий тур. У другому туріпорівнюються кандидати a і c. 19 виборців проти 9 вважають,що $c \succ a$, отже, переможцем є кандидат c. Тут теж все законно. Але в першому турі вибули кандидати b і d, при цьому 16 виборців з 28 вважають, що $b \succ c$, і 20 виборців з29 вважають, що $d \succ c$. Виходить, що і цей переможець далеко некращий.

Видно, що партії, які не користуються підтримкою більшості виборців, але висунули єдиного кандидата, можуть одержати перемогу на виборах за правилом відносної більшості, якщо партії, які мають підтримку більшості виборців, які не змогли домовитися і висунути єдиного кандидата (або якщо в числі їх кандидатів перебував «троянський кінь»). В той же час правило відносної більшості з вибуванням може зіграти об’єднуючу роль і привести до перемоги представника близьких за поглядами партій, які не змогли домовиться про висунення єдиного кандидата (в останньому прикладі кандидата c). Зауважимо, що дана система голосування широко використовувалася на виборах в Україні.

Голосування з послідовним виключенням. Спочатку встановлюється порядок порівняння кандидатів, потім за правилом більшості кандидати послідовно порівнюються попарно. Якщо кандидатів m, то маємо $m-1$ турів голосування. У першому турі порівнюються два перших кандидата з ланцюжка порівняння, переможець першого туру в другому турі порівнюється з третім кандидатом в ланцюжку і так далі. Переможець $(m-1)$-го туру є переможцем по даній процедурі. Це правило має ще одну назву – «олімпійська система».

Визначимо переможця голосування по даній схемі для прикладу 2. Нехай порядок порівняння буде таким: $a \to b \to c \to d$. У першому турі 17 з 28 виборців вважають $b \succ a$ і, отже, кандидат b виходить у другий тур. У другому турі 16 з 28 виборців вважають, що $b \succ c$, значить, b виходить в третій тур. В останньому турі 15 з 28 виборців вважають, що $b \succ d$ і, отже, обраним по даній системі голосування виявляється кандидат b.

Правила голосування Кондорсе і Борда. Як показують приклади, при одній і тій же думці виборців про кандидатів за допомогою різних систем голосування можуть бути обрані різні кандидати.

В античні часи, в основному, обговорювалися філософські, світоглядні питання, пов'язані з голосуванням. Перша спроба критичного аналізу процедур голосування була зроблена лише в кінці XVIII століття у Франції. У ці роки питання про те, як треба приймати колективні рішення (наприклад, на засіданнях Конвенту) набуло надзвичайної гостроти. Сумніви щодо принципу «вирішує більшість голосів» виникли не тільки у законодавців після того, як питання про страту Людовика XVI було прийнято Конвентом 11 грудня 1792 року більшістю одноголосно. У той час в складі Конвенту було 387 депутатів, відповідно думки «за» і «проти» страти розподілилися майже порівну. 21січня 1793 року страту привели у виконання. У Паризької Академії Наук почалася активна дискусія з питань організації демократичних виборів, включаючи обрання нових членів Академії. Саме два академіка Паризької АН того часу по праву вважаються основоположниками теорії голосування.

Теорія голосування як наука має дату народження – 16 червня 1770 р. У цей день Ж.-Ш. Борда на засіданні Паризької АН зробив доповідь «Про спосіб проведення виборів», в якому, обговорюючи обрання членів АН, критикує традиційний спосіб за більшістю голосів. Борда пропонує свою процедуру голосування, вважаючи, що від виборців треба отримувати більше інформації про їх відношенні до кандидатів, внесених до виборчого бюлетеня.

Правило Борда Кожен виборець повідомляє свої переваги, впорядковуючи m кандидатів від кращого до гіршого (байдужність забороняється). Кандидат не одержує балів за останнє місце, отримує один бал від кожного кандидата за передостаннє і так далі, отримує $m-1$ балів за перше місце. Перемагає кандидат із найбільшою сумою балів.

Незважаючи на те, що в Паризьку АН входили такі вчені, як Монж, Фур’є, Лавуазьє, Лаплас, Даламбер, Кондорсе, Лагранж і ін., доповідь Борда не притягнула увагу кого-небудь з учених (крім Кондорсе) і питання про процедуру проведення виборів в АН не піднімалося протягом 14 років. Кондорсе вирішив за допомогою математичних методів синтезувати в деякому сенсі «саму природну» процедуру голосування. Перші спроби приводили Кондорсе до процедури Борда. Дослідники відзначають складні, конкурентні взаємини між Борда і Кондорсе. Це, разом з розумінням дефектів процедури Борда, призвело Кондорсе до рішення не публікувати отримані результати. Подальші його дослідження привели до розробки нової процедури голосування, заснованої на принципі попарних порівнянь. 17 липня 1784 року на засіданні Паризької АН була представлена робота Кондорсе «Есе про застосування імовірнісного аналізу до прийняття рішень за більшістю голосів». У цій роботі Кондорсе вперше вводить уявлення про попарних порівняннях як основу теорії і методу побудови процедур голосування.

Процедура Кондорсе Для заданої таблиці результатів голосування (таблиці переваг) переможцем по Кондорсе називається кандидат, який перемагає будь-якого іншого кандидата при парному порівнянні за правилом більшості. Якщо парні порівняння утворюють цикл, то переможця по Кондорсе немає, і кажуть, що має місце так званий *парадокс Кондорсе*.

Політологи вважали парадокс Кондорсе рідкісним явищем. Однак, результати математичного моделювання голосування по методу Кондорсе, наведені в наступній таблиці, показують, що це не так.

Число кандидатів	Число виборців					
	3	5	7	9	11	∞
3	0,050	0,069	0,075	0,078	0,080	0,088
4	0,111	0,139	0,150	0,156	0,160	0,176
5	0,160	0,200	0,215	0,230	0,251	0,251
6	0,202	0,255	0,258	0,284	0,294	0,315
7	0,239	0,299	0,305	0,342	0,343	0,369

У таблиці вказані ймовірності реалізації парадоксу Кондорсе при відповідній кількості виборців і кандидатів.

На наступному засіданні АН 21 липня 1784 року Борда знову доповідає свою роботу. Незабаром АН прийняла запропоновану ним процедуру для обрання своїх членів. Процедура Борда застосовувалася АН для цих цілей до 1800 р., коли вона піддалася різкій критиці з боку нового академіка – Наполеона Бонопарта – він порахував її занадто складною. Паризька АН повернулася до старої системи виборів «за більшістю голосів». Система голосування Кондорсе використовувалася в Женеві протягом року при виборах в Національну асамблею. У 1794 р. була прийнята нова процедура голосування, запропонована депутатом Ліюльє, який детально проаналізував і піддав критиці процедуру Кондорсе. Однак, ця процедура також була скасована в 1798 р. після захоплення Женеви Наполеоном. Роботи Борда і Кондорсе вплинули на Конституцію США, яка розроблялася в той час.

Приклад 2 (продовження) Визначимо переможця по Борда для результатів переваг, що містяться в прикладі 2. У виборах бере участь $m = 4$ кандидати. Кандидат не одержуєбалів за 4-е місце, за 3-е місце отримує 1 бал, за 2-е місце – 2 бали, за 1-е місце – 3 бали. Отже,

Кандидат a отримує $\sum_a = 9 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 31$ очко

Кандидат b отримує $\sum_b = 7 \cdot 3 + 6 \cdot 2 + 15 \cdot 1 = 48$ очок

Кандидат c отримує $\sum_c = 8 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 7 \cdot 1 = 39$ очок

Кандидат d отримує $\sum_d = 4 \cdot 3 + 16 \cdot 2 + 6 \cdot 1 = 50$ очок

Таким чином, переможцем по Борда є кандидат d. Переможцем же по Кондорсе є кандидат b, який перемагає кандидата a з рахунком 17:11, кандидата c з рахунком 16:12, кандидата d з рахунком 15:13.

У XIX столітті йшов процес емпіричного пошуку нових процедур голосування, що не призвели до появи «абсолютно прийнятною» процедури голосування. В кінці XIX століття завдяки роботам італійського математика В. Парето була зрозуміла природність виникнення багатокритеріальної ситуації при оцінці якості процедур голосування. Розглянемо деякі з цих процедур голосування та аксіом.

Природним узагальненням процедури Борда є ***голосування з підрахунком очок***. При m кандидатах фіксуємо спадну послідовність чисел $s_0 \le s_1 \le \cdots \le s_{m-1}$, причому $s_0 < s_{m-1}$. Виборці впорядковують кандидатів, причому s_0 очок дається за останнє місце, s_1– за передостаннє і т.д. Обирається кандидат з максимальною сумою очок.

Дана процедура досить широко використовується на практиці. Покажемо, що результати голосування істотно залежать від вибору чисел s_i.

Так, за результатами переваг з прикладу 2за процедурою Борда (тобто $s_0 = 0$, $s_1 = 1$, $s_2 = 2$, $s_3 = 3$) перемагаєкандидат d; при$s_0 = 0$, $s_1 = 1$, $s_2 = 2$, $s_3 = 4$ перемагає кандидатb; при$s_0 = 0$, $s_1 = 0$, $s_2 = 1$, $s_3 = 4$ перемагає кандидат a.

Якщо $s_0 = s_1 = \cdots = s_{m-2} = 0$, $s_{m-1} = 1$, то дана процедура збігається з процедурою голосування за методом відносно] більшості.

Наведемо два найбільш природних узагальнення процедури Кондорсе.

Правило Копленда Порівняємо кандидата a з будь-яким іншим кандидатом x. Нарахуємо йому $K(a \succ x) = +1$, якщо для більшості $a \succ x$, $K(a \succ x) = -1$, якщо для більшості $x \succ a$ і $K(a \succ x) = 0$ при рівності воцінці кандидатів. Оцінкою Копленда для кандидатаa назвемосуму $K(a) = \sum_x K(a \succ x)$. Обирається кандидат з найвищою оцінкою Копленда.

Правило Сімпсона Розглянемо кандидата a і будь-якого іншого кандидата x. Позначимо через $S(a \succ x)$ число виборців, для яких $a \succ x$. Оцінкою Сімпсона для кандидата a назвемо мінімальне з числа $S(a \succ x)$: $S(a) = \sum_x S(a \succ x)$. Обирається кандидат з найвищою оцінкою Сімпсона.

Переможець за Кондорсе отримує найвищу оцінку Копленда$m - 1$, а також оцінку Сімпсона вище $\frac{n}{2}$.

З середини XX століття виник новий сплеск інтересу до проблем голосування. У 1973 році американський математик П. Фішберн поставив крапку у вирішенні питання про відмінність процедури Борда і процедури Кондорсе.

Теорема Фішберна Існують профілі голосування такі, що переможець по Кондорсе не може бути обраний ні при якому методі підрахунку очок.

Доведення Розглянемо профіль голосування в чотирьох групах:

Очки	**I**	**II**	**III**	**IV**
	3	6	4	4
s_2	c	a	b	b
s_1	a	b	a	c
s_0	b	c	c	a

Запишемо кількість балів, які набирає кожен з кандидатів:

Кандидат a отримує $\sum_a = 6 \cdot s_2 + 7 \cdot s_1 + 4 \cdot s_0$

Кандидат b отримує $\sum_b = 8 \cdot s_2 + 6 \cdot s_1 + 3 \cdot s_0$

Кандидат c отримує $\sum_c = 3 \cdot s_2 + 4 \cdot s_1 + 10 \cdot s_0$

Оцінимо різницю балів кандидата a і кандидата b: $\sum_b - \sum_a = 2s_2 - -s_1 - s_0 > 0$, так як $s_0 \leq s_1$, $s_1 \leq s_2$ і $s_0 < s_2$, тобто $(s_0 + s_1) < 2s_2$. Таким чином, отримуємо, що $b \succ a$ при будь-якому наборі s_0, s_1, s_2. Отже, процедури Кондорсе і Борда принципово різні.

2.3.3 Метод аналізу ієрархій

Метод аналізу ієрархій (МАІ), розроблений американським математиком Т. Сааті [5, 6, 22], є систематичною процедурою для ієрархічного представлення елементів, що визначають суть будь-якої проблеми. Сутність методу полягає в декомпозиції проблеми на більш прості складові частини і подальшому опрацюванню послідовності міркувань особи, що приймає рішення, за парними порівняннями. Як результат може бути виражений відносний ступінь залежності елементів в ієрархії. Ці взаємозалежності далі виражаються чисельно. Метод аналізу ієрархій включає процедури синтезу множини порівнянь, важливості критеріїв чи одержання пріоритетності і знаходження альтернативних рішень. Отримані в такий спосіб значення є оцінками в шкалі залежностей і відповідають так званим жорстким оцінкам [22].

Процес поетапного вагових коефіцієнтів чи встановлення пріоритетів – розв’язання будь-якої проблеми. Перший етап – виявлення найбільш важливих елементів задачі, другий – найкращий спосіб (критерій) перевірки залежності кінцевого результату від елементів. Наступним етапом має бути вироблення альтернативних рішень й оцінка їх якості.

Поки не буде впевненості, що процес охопив усі важливі характеристики, необхідні для уявлення структури вирішення задачі, він піддається перевірці та переосмисленню. Процес може бути проведений над послідовністю ієрархій: у цьому випадку результати, отримані в одній з них, використовуються в якості вхідних даних при вивченні наступної. Метод аналізу ієрархій дозволяє синтезувати процес вирішення такої багатоступінчастої задачі.

У найбільш елементарному вигляді ієрархія будується з вершини (мети чи цілей), через проміжні рівні (критерії, від яких залежать наступні рівні) до найнижчого рівня (котрий звичайно є переліком альтернатив – проектів).

Якщо кожний елемент заданого рівня функціонує як критерій для всіх елементів нижчого рівня, ієрархія вважається повною. У протилежному випадку ієрархія – неповна.

Закон ієрархічної безперервності потребує, щоб елементи нижнього рівня ієрархії були порівнянні попарно стосовно елементів наступного рівня і т.д. аж до вершини ієрархії.

Метою побудов є одержання пріоритетів чи вагових коефіцієнтів елементів на нижньому рівні, які щонайкраще відбивають відносний вплив на вершину ієрархії.

Після ієрархічного відображення проблеми виникають питання визначення пріоритетів чи вагових коефіцієнтів, тобто критеріїв, і оцінки кожної з альтернатив за критеріями. Опишемо коротко цю процедуру [22].

Нехай $O_1, O_2, O_3, \ldots O_n$ – множина з n елементів і $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots \omega_n$ – відповідно їхні реальні значення пріоритетності. Порівняємо пріоритетність кожногоелемента з пріоритетністю елемента множинистосовно загальної для них властивості або мети (табл. 2.3).

Таблиця 2.3 – Таблиця порівнянь елементів «O» за їхньою пріоритетністю щодо «Мети»

Мета	O_1	O_2	O_3	…	O_n
O_1	$\frac{\omega_1}{\omega_1}$	$\frac{\omega_1}{\omega_2}$	$\frac{\omega_1}{\omega_3}$	…	$\frac{\omega_1}{\omega_n}$
O_2	$\frac{\omega_2}{\omega_1}$	$\frac{\omega_2}{\omega_2}$	$\frac{\omega_2}{\omega_3}$	…	$\frac{\omega_2}{\omega_n}$
…	…	…	…	…	…
O_n	$\frac{\omega_n}{\omega_1}$	$\frac{\omega_n}{\omega_2}$	$\frac{\omega_n}{\omega_3}$	…	$\frac{\omega_n}{\omega_n}$

Тоді реально матриця порівнянь має вигляд:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{13} \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \dots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \dots & \alpha_{3n} \\ \dots & \dots & \dots\ \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Далі вирішується задача знаходження вектора $\omega = [\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots \omega_n]^T$.

Скорочено матриця попарних порівнянь O розміром $(n \times n)$ має вигляд:

$$O = \left\| \alpha_{ij} \right\|_{n,n},$$

причому $\alpha_{ii} = 1$, $\alpha_{ji} = \frac{1}{\alpha_{ij}}$, де$i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$.

На практиці елементи в матриці порівнянь визначаються експертами у відповідності до шкали відносної пріоритетності запропонованої Т. Сааті (табл. 2.4) [22].

Якщо проблема подана ієрархічно, то матриця складається для порівняння відносної пріоритетності критеріїв на другому рівні стосовно загальної мети на першому рівні. Подібні матриці повинні бути побудовані для парних порівнянь кожного елемента на третьому рівні стосовно критеріїв другого рівня. Матриця складається, якщо записати порівнюваний критерій (або мету) вгорі і перерахувати порівнювані елементи праворуч і вниз (табл. 2.3).

Таблиця 2.4 − Шкала відносної пріоритетності

Інтенсивність відносної важливості	Визначення	Пояснення
1	Елементи однаково пріоритетні	Рівний внесок двох елементів в досягнення мети
3	Незначна перевага одного над іншим	Є умови, що надають легку перевагу одного над іншим
5	Істотна перевага	Існують вагомі факти, що один істотно важливіший від іншого
7	Явна перевага одного над іншим	Є беззаперечні факти преваг одного над іншим
9	Дуже сильна перевага	Очевидність переваги одного над іншим не викликає сумнівів
2, 4, 6, 8	Проміжний результат рішення між двома сусідніми міркуваннями	Застосовується в компромісному випадку
Обернені розміри приведених вище чисел	Якщо при порівнянні одного елементу з іншим отримано одне з вище зазначених чисел (наприклад, 3), то при зворотному порівнянні елементів одержимо зворотне число (тобто 1/3)	

З групи матриць попарних порівнянь формується набір вагових коефіцієнтів чи локальних пріоритетів, що виражають відносний вплив множини елементів на елемент рівня, примикаючого згори. Знаходять відносну пріоритетність кожного окремого елемента через «розв’язання» матриць, кожна з яких має обернено симетричні значення. Зміст таких розрахунків полягає втому, що вони визначають спосіб числового значення порівняльної пріоритетності елементів у проблемній ситуації.

Знайти власне значення та власний вектор матриці O можливо використавши наближені методи, засновані на одному з таких алгоритмів.

Алгоритм 1

Крок 1 – додаємо елементи кожного рядка матриці, а результати підсумовування передаємо у вигляді матриці-стовпчика такої ж розмірності, що й у матриці.

Крок 2 – додаємо разом усі елементи одержаного вектор-стовпчика.

Крок 3 – ділимо кожний із елементів матриці-стовпчика на знайдену суму.

Алгоритм 2

Крок 1 – додаємо елементи кожного стовпчика початкової матриці та записуємо одержані результати у стовпчик.

Крок 2 – замінюємо кожен елемент стовпчика на зворотний йому.

Крок 3 – додаємо елементи стовпчика із зворотних величин.

Крок 4 – ділимо кожний із елементів зворотного стовпчика на одержану суму.

Алгоритм 3

Крок 1 – підсумовуємо елементи кожного стовпчика.

Крок 2 – ділимо елементи кожного стовпчика матриці O наодержані суми.

Крок 3 – додаємо елементи кожного рядка одержаної вище матриці.

Крок 4 – записуємо кожну суму у відповідний рядок вектор-стовпчика.

Крок 5 – ділимо кожний із елементів останнього стовпчика на порядок матриці.

Алгоритм 4

Крок 1 – перемножуємо елементи кожного рядка і записуємо одержані результати в стовпчик.

Крок 2 – знаходимо корінь n-го ступеня з кожного елементуодержаного стовпчика.

Крок 3 – додаємо елементи одержаного стовпчика.

Крок 4 – ділимо на одержану суму всі елементи стовпчика.

Важливим елементом даної моделі визначення коефіцієнтів пріоритетності порівнюваних елементів є знаходження індексу узгодженості (ІУ), який дає інформацію про порушення числової та транзитивної матриці порівнянь. Тому цей індекс можна розглядати як показник «близькості до узгодженості». Тобто похибки співвідношень:

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ij}\alpha_{jk}, \quad k = \overline{1, n}, \; i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Для цього, використовуючи відхилення максимального власного числа від розмірності матриці $\lambda_{\max}$, будуємо величину, звану індексом узгодженості

$$\text{ІУ} = (\lambda_{\max} - n)/(n - 1),$$

де n – число порівнюваних елементів. Потім порівнюємо її з відповідним індексом, отриманим для матриці, побудованої випадковим чином, і отримуємо відношення узгодженості $\text{ВУ} = \text{ІУ}/\text{ВУ}$.

Прийнятною є ВУ не більше 10%. В деяких випадках можна допустити 20%, але не більш. Інакше необхідно провести переоцінку відповідної матриці.

Подібні обчислення проводяться для всіх груп і рівнів в ієрархії.

Останнім кроком є обчислення загальної ваги варіанту вирішення шляхом послідовного зважування матриці-строки вагів рівня (варіантів рішень), що пролягає нижче, компонентами матриці-строки вагів вище розміщеного рівня (характеристик).

При участі в роботі над проектом декількох фахівців, якщо учасники не хочуть дебатів, можна використовувати геометричне середнє судження. Інакше можна одержати індивідуальні матриці-строки вагів і за відповідь взяти їх геометричне середнє.

Після перевірки ВУ необхідно приступити до синтезупріоритетів. Пріоритети синтезуються, починаючи з другого рівнядо низу. Локальні пріоритети перемножують на пріоритет відповідного елементу на вищестоящому рівні і підсумовують за кожним елементом відповідно до значень коефіцієнтів важливості чи пріоритетності кожного з елементів, на які він впливає у кожному рівні ієрархії.

Розглянемо стислий виклад етапів МАІ. Зауважимо, що окремим етапам в одних задачах можна приділяти більше уваги, чим в інших.

Формулювання задачі.

Побудова ієрархії від вершини, через проміжні критерії (від яких залежать наступні рівні), до нижнього рівня (котрий, як правило, є переліком альтернатив).

Побудова множини матриць парних порівнянь для кожного з нижніх рівнів – по одній матриці для кожного елемента верхнього рівня. Цей елемент називають цільовим стосовно елемента, що знаходиться на нижньому рівні, тому що елемент нижнього рівня впливає на розташований вище елемент. У повній простій ієрархії будь-який елемент впливає на кожний елемент верхнього рівня. Елементи будь-якого рівня порівнюються один з одним щодо їхнього впливу на верхній елемент. Таким чином, одержують квадратну матрицю порівнянь. Попарні порівняння проводяться в термінах домінування одного з елементів над іншим. Ці порівняння потім виражаються в цілих числах за шкалою Сааті [22].

На етапі 3 для одержання кожної матриці потрібно $n(n-1)/2$ суджень (при кожному попарному порівнянні автоматично приписуються обернені числові значення).

Після проведення всіх попарних порівнянь визначається індекс узгодженості (ІУ) і відношення узгодженості (ВУ).

Етапи 3, 4 і 5 проводяться для всіх рівнів і груп в ієрархії.

Потім використовують ієрархічний синтез для зважування власних векторів за коефіцієнтами важливості чи пріоритетності критеріїв і обчислюють суми за усіма відповідними зваженими компонентами власних векторів кожного рівня ієрархії, що лежить нижче.

Узгодженість усієї ієрархії знаходять, перемножуючи кожний індекс узгодженості ІУ на пріоритет чи коефіцієнт важливості відповідного критерію і сумуючи отримані числа. Результат потім розділяють на вираз такого ж типу, але із середньою випадковою узгодженістю, що відповідає розмірам кожної зваженої за пріоритетами матриці. Відзначимо, по-перше, що прийнятною є відносна узгодженість біля 10% або менше. У противному випадку якість суджень варто поліпшити, переглянувши спосіб, за яким задаються питання при проведенні парних порівнянь. Якщо це не допоможе, то задачу варто більш точно структурувати, тобто групувати аналогічні елементи під більш значущими критеріями. Потрібно повернутися до етапу 2, навіть коли перегляду вимагають тільки сумнівні частини ієрархії.

При проведенні оцінок варто брати до уваги всі порівнювані елементи, щоб порівняння були релевантними. Неважко переконатися в тому, що для проведення обґрунтованих чисельних порівнянь не варто порівнювати більше ніж 7–9 елементів. У такому випадку маленька похибка в кожному відносному коефіцієнті змінює її не дуже суттєво. Якщо працюють з більш широкими групами порівнюваних елементів, то необхідно скористатися додатковими рівнями (групами) ієрархічної декомпозиції. Елементи групуються (у якості першої оцінки) у групи додаткового порівняння приблизно до 7 елементів у кожному. Процедура повторюється поки всі елементи не будуть порівняні подібним чином.

3 ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДОЛОГІЇ ТЕОРІЇ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ ДО РОЗВ’ЯЗАННЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАДАЧ ЕКСПЕРТНИМИ МЕТОДАМИ. ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

Даний розділ присвячений розгляду прикладів практичного застосування методів теорії прийняття рішень до вирішення практичних проблем експертними методами.

З метою автоматизації процесу прийняття рішень у практичних задачах на основі розглянутих у розділі 2 експертних методів у роботі розроблено програмний продукт «Decision-MakingProgram», який дозволяє неупереджено, ефективно та швидко прийняти рішення, яке виключає або суттєво знижує будь-який ризик. Для створення зазначеного програмного продукту було використано мову програмування С++ та набір функцій WinApi, які працюють під управлінням операційної системи MS Windows, містяться в бібліотеці windows.h та по суті виступають «проміжною ланкою» між користувачем і ядром операційної системи. Код пропонованої програми представлено у Додатку А.

Ця програма працює за принципом, описаним у попередньому розділі, а саме обчислює вихідні дані за методами безпосереднього ранжування та попарних порівнянь та визначає результат (підсумкове ранжування), враховуючи судження всіх експертів та вимоги стосовно коефіцієнта конкордації (критерію узгодженості).

Наведемо короткі теоретичні відомості зазначених методів.

Експертні методи в теорії прийняття рішень застосовуються у випадках, коли для прийняття рішень неможливо використовувати кількісні методи.

Ранжування є поширеною процедурою отримання експертної інформації. Експертові пред’являється набір об’єктів (альтернатив, факторів), які підлягають оцінюванню, і пропонується впорядкувати їх за уподобаннями та приписати їм числа натурального ряду – ранги. Найкраща альтернатива отримує ранг, що дорівнює 1, наступна за нею альтернатива – ранг, що дорівнює 2 і т.д.

Задача побудови рангового ряду (1) або еквівалентне їй задача визначення рангів вирішується експертами і зводиться до організації експертного опитування і обробки результатів цього опитування, з тим щоб отримати шукані ранги і оцінити їх достовірність, тобто узгодженість експертів.

Розглянемо два методи експертного ранжирування:

– безпосереднього ранжирування (в даному методі експерти відразу привласнюють ранги факторам, що їм представлені для ранжирування);

– парних порівнянь (в даному методі використовується парне порівняння факторів, що спрощує задачу експерта, але потребує подальшого оброблення результатів для отримання ранжируваного ряду).

Метод безпосереднього ранжирування. Нехай N експертів ранжирують n факторів $x_1, \ldots, x_n$. Кожному фактору кожен експерт присвоює ранг – число від 1 до n. Так, і-му фактору (x_i) j-й експерт (E_j) присвоює ранг k_{ij}. В результаті виходить матриця суджень експертів розмірністю $N \times n$

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{array}$$
$$\begin{Vmatrix} k_{11} & k_{21} & \ldots & k_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k_{1N} & k_{2N} & \ldots & k_{nN} \end{Vmatrix}$$

При призначенні рангів експертами потрібно дотримуватися таких умов:

– сума рангів, призначених всім факторам кожним експертом, повинна бути однакова:

$$\sum_{i=1}^{n} k_{ij} = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \quad j = 1, \ldots, N;$$

– якщо експерт якісь q факторів вважає еквівалентними або однаковими за важливістю, то він надає їм один ранг, що дорівнює середньому з q цілих рангів, таких, які вийшли б за умови, що експерту вдалося їх проранжирувати.

Для остаточного визначення шуканих рангів слід обчислити середні ранги кожного фактора:

$$\bar{k}_j = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} k_{ij},$$

де на перше місце ставиться фактор з мінімальним середнім рангом

$$\bar{k}_l = \min_{i=1,\dots,n} \{\bar{k}_i\},$$

тобто фактор x_l, на друге місце – фактор, що має мінімальний з решти ранг тощо.

Отримані ранги дозволяють побудувати ранжируваних ряд факторів, який і буде відповідати усередненій оцінці колективу з N експертів.

Узгодженість суджень експертів визначається за допомогою коефіцієнта конкордації (критерію узгодженості) $0 \leq W \leq 1$:

$$\mathrm{W} = \frac{D(\bar{k})}{D_{max}} = \frac{12}{n(n^2-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{k} - \frac{n+1}{2}\right)^2,$$

$$D(\bar{k}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{k_\iota} - M(\bar{k})\right)^2, \quad M(\bar{k}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k_i = \frac{n+1}{2},$$

$$D_{max} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(i - \frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{n^2-1}{12}.$$

При $W = 0$ судження експертів повністю розходяться, а при $W = 1$ вони висловлюються одноголосно.

Метод парних порівнянь. Експерту пропонується проранжирувати фактори попарно, тобто кожній парі факторів x_i та x_l поставити у відповідність число

$$q_{il} = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad x_i \succ x_l, \\ 0, & \text{якщо} \quad x_i \sim x_l, \\ -1, & \text{якщо} \quad x_i \prec x_l. \end{cases}$$

При цьому $q_{il} = -q_{il}$.

Кожний j-й експерт своє судження представляє у вигляді матриці

$$Q^j = \left\| q_{il}^i \right\|, \qquad i, l = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, N.$$

Для усереднення суджень експертів побудуємо матрицю розмірністю $n \times n$

$$\bar{Q} = \|\bar{q}_{il}\|,$$

де

$$\bar{q}_{il} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} q_{il}^j.$$

Узгодженість суджень експертів $0 \leq W \leq 1$ визначається виразом

$$W = \frac{D(\bar{q})}{D_{max}} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,l=1}^{n} (\overline{q_{il}})^2,$$

де

$$D(\bar{q}) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,l=1}^{n} (\bar{q}_{il})^2 \,,$$

$$D_{max} = 1.$$

При $W = 1$ судження експертів повністю узгоджені, а при $W = 0$ вони суперечать один одному.

Існують ситуації, коли за повної узгодженості експерти можуть суперечити один одному. Виявлення подібних суперечень здійснюється на основі правила транзитивності:

для переваг: якщо $x_1 \succ x_2$ і $x_2 \succ x_3$, то $x_1 \succ x_3$;

для еквівалентності: якщо $x_1 \sim x_2$ і $x_2 \sim x_3$, то $x_1 \sim x_3$.

Для виявлення рангів ранжируваних факторів використовуються наступні правила обчислення рангів за матрицею $\bar{Q} = \|\bar{q}_{il}\|$:

Правило 3.1 Визначається середня перевага кожного фактору всім останнім:

$$\bar{q}_i = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} \bar{q}_{il}\,, \quad i = 1, \dots, n, \tag{3.1}$$

Таким чином будується ранжируваний ряд виду (3.1), де на перше місце ставиться фактор з максимальним середнім рангом

$$\bar{q}_v = \max_{i=1,\dots,n} \{\bar{q}_i\}.$$

На друге місце – фактор, який має максимальний серед тих, які залишилися середній ранг і т.д.

Правило 3.2 Кожна перевага q_{il} порівнюється з деяким обраним порогом $\delta\,(0 < \delta < 1)$. В результаті виходить наступне перетворення матриці середніх переваг $\bar{Q}$ в контрастну матрицю, елементами якої є:

$$\varphi_{il} = \varphi(q_{il}), \quad i \neq l = 1, \dots, n\,,$$

де:

$$\varphi(q) = \begin{cases} -1, & \text{якщо} \quad q \le -\delta, \\ 0, & \text{якщо} \quad |q| < \delta, \\ 1, & \text{якщо} \quad q \ge \delta. \end{cases}$$

За контрастною матрицею будується ранжируваний ряд. Після цього визначається значення оптимального порога δ на «порозі протиріч», тобто таке значення δ^*, невелике змінення якого призводить до протиріччя в ранжируваному ряду (правила транзитивності не виконуються). А ранжируваний ряд отриманий при значенні δ^* і є шуканим рядом.

Ознайомимося з інтерфейсом програми. Він дуже зручний, приємний в роботі та не потребує багато часу на освоєння. Інтерфейс можна умовно розбити на чотири «сторінки». Переміщатися між цими сторінками можна за допомогою кнопок «Назад», «Далее» та «Старт». На першій «сторінці» користувачу пропонують ввести кількість експертів та кількість об’єктів (факторів), які необхідно проранжувати. Друга «сторінка» використовуються для вводу матриці рангів. На третій сторінці вводяться порогові значення для формування контрастної матриці для методу попарних порівнянь. Також на третій сторінці є кнопка «По замовчуванню». Вона використовується для автоматичного вводу значень вказаного вище показнику. Остання сторінка призначена для виводу результатів роботи програми «Decision-MakingProgram».

Використовуючи програму «Decision-MakingProgram», розглянемо приклад та зробимо висновки за отриманими результатами.

Спочатку, для перевірки достовірності вихідних даних, протестуємо програму, на тестовому прикладі. Використаємо матрицю A розміром 4×4, вхідними даними будуть ранжувані ряди об’єктів, ряди рангів зі значеннями рангів від 1 до 4, котрі можна інтерпретувати як ступінь переваги одного об’єкту над іншим згідно експертному судженню.

На рисунках 3.1-3.4 наведено результати роботи програми, яка включає в себе ряди експертних суджень, вихідну матрицю рангів, середні ранги об’єктів та підсумковий ранжований ряд за двома методами.

Результати роботи програми за методом парних порівнянь.

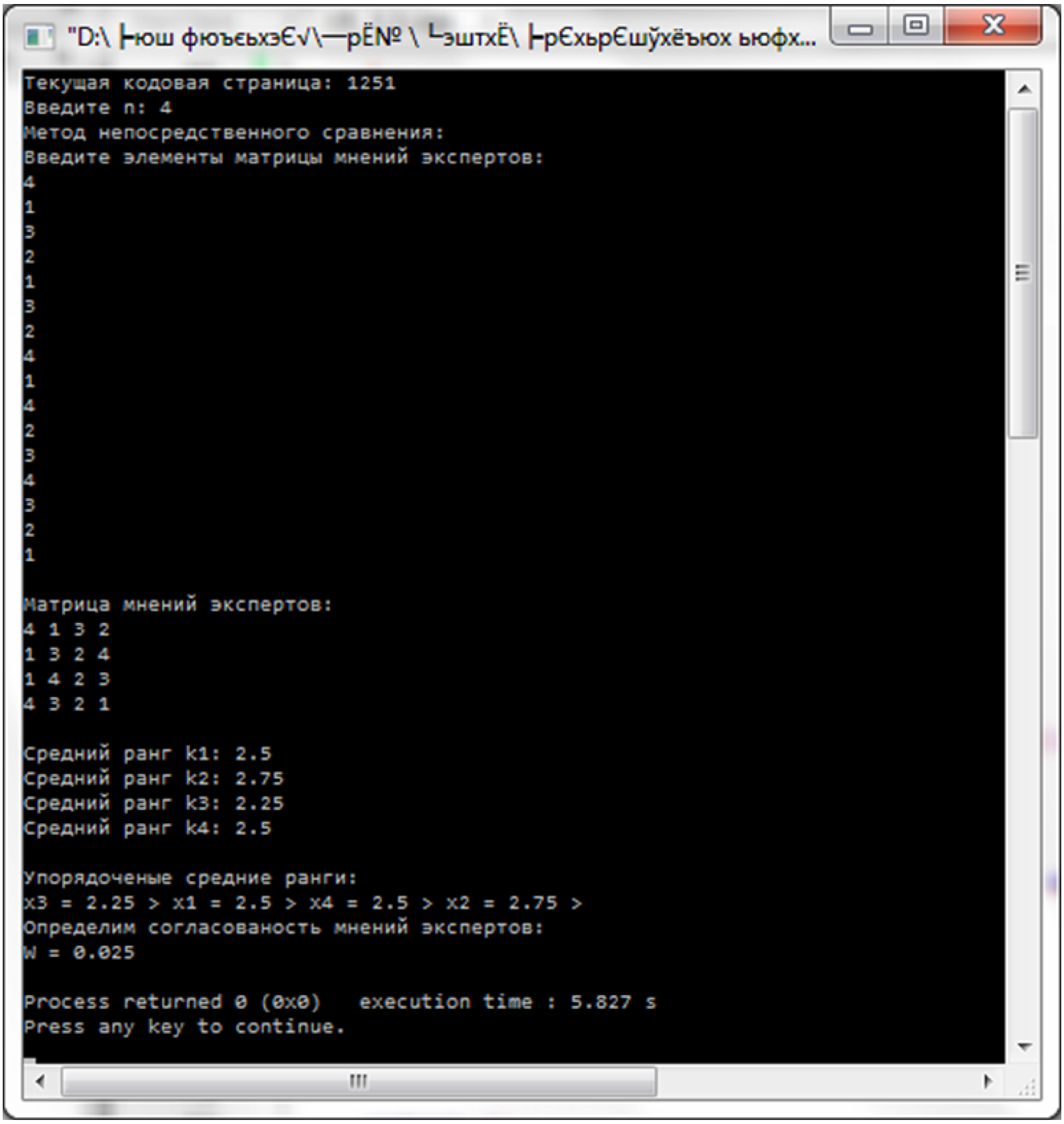

Рисунок 3.1 – Вихідна матриця та результати тестової задачі методом безпосереднього ранжування

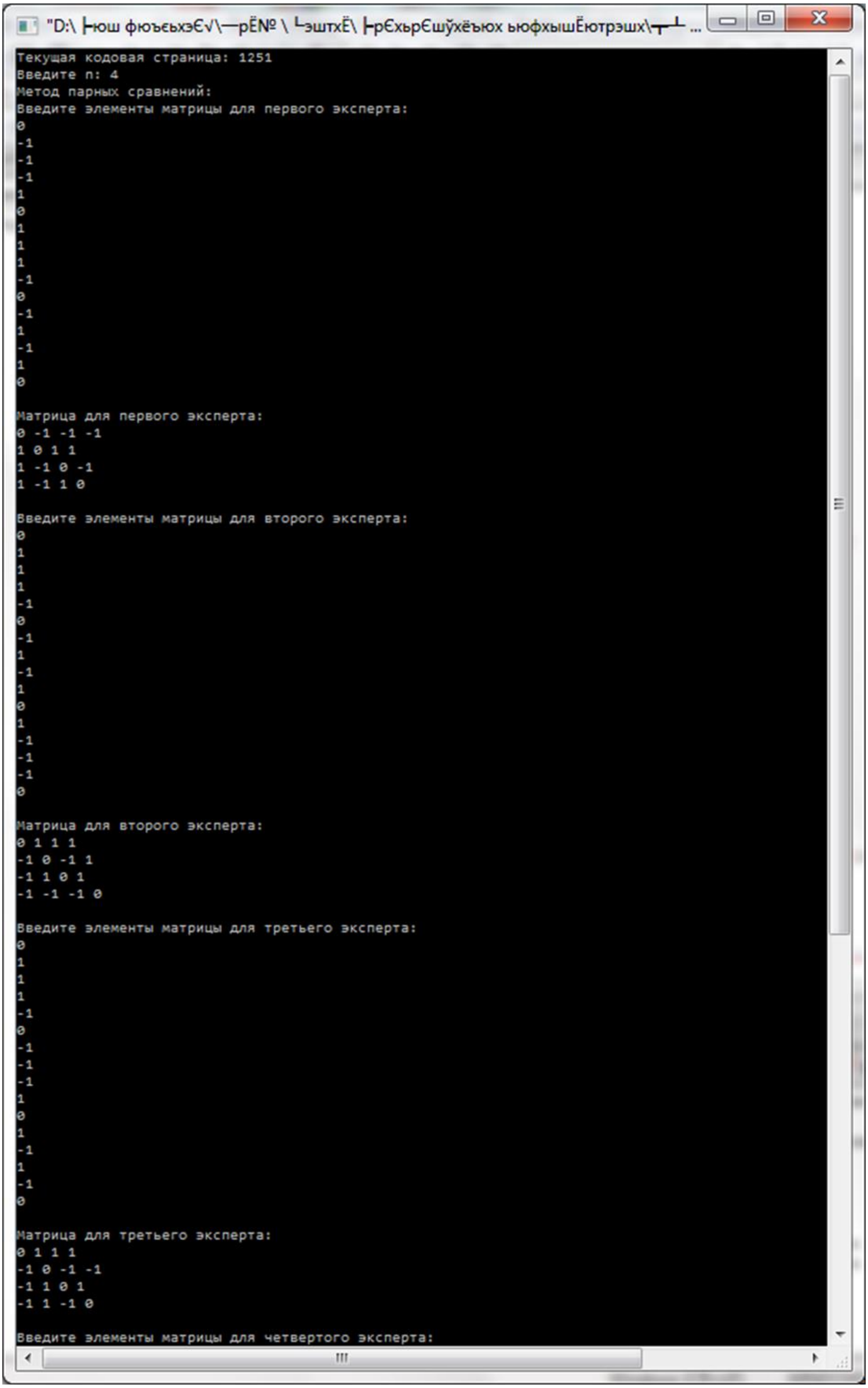

Рисунок 3.2 – Вихідні матриці та результати тестової задачі методом парних порівнянь для 3 експертів

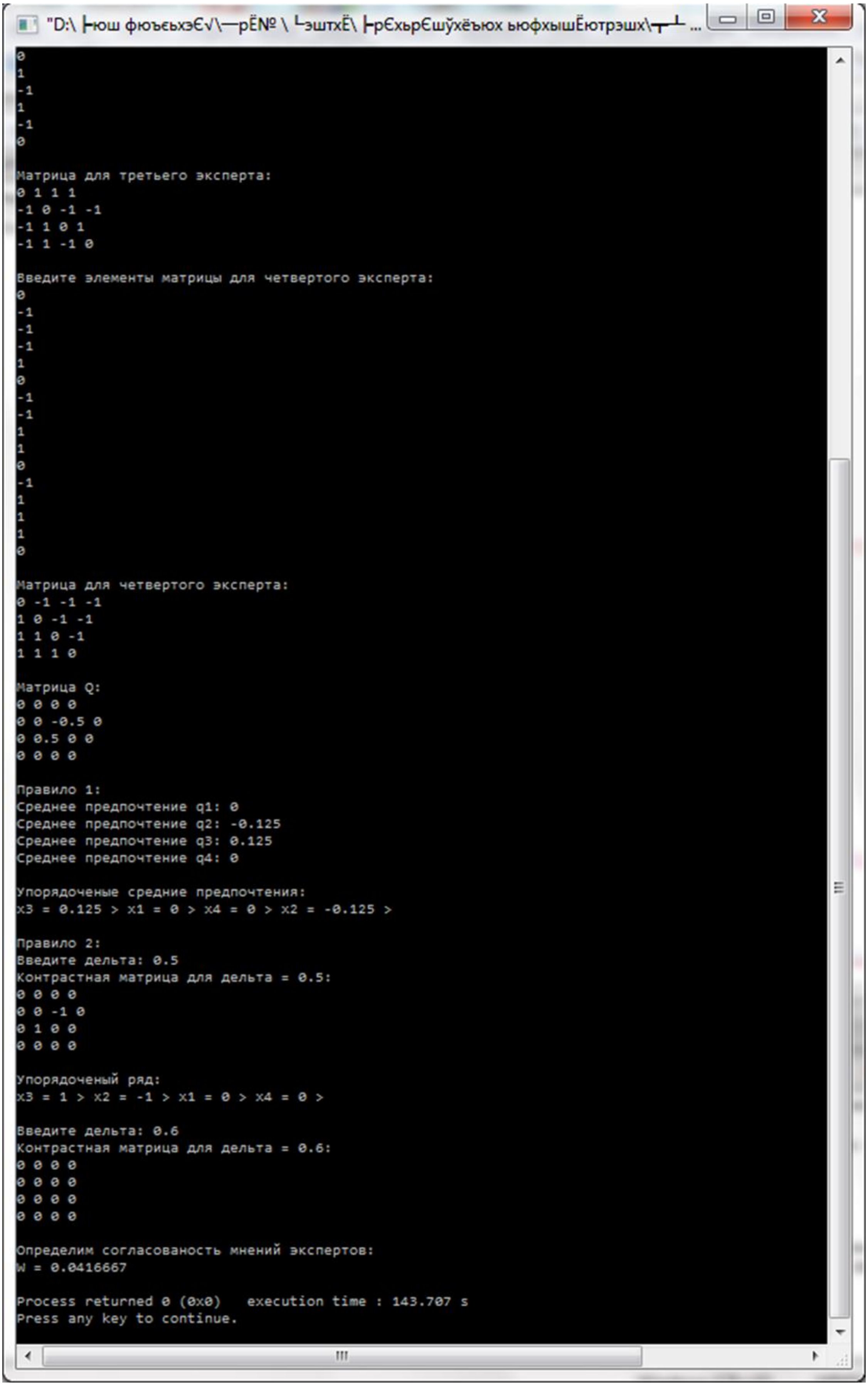

Рисунок 3.3 – Вихідна матриця та результати тестової задачі методом парних порівнянь за правилом 1

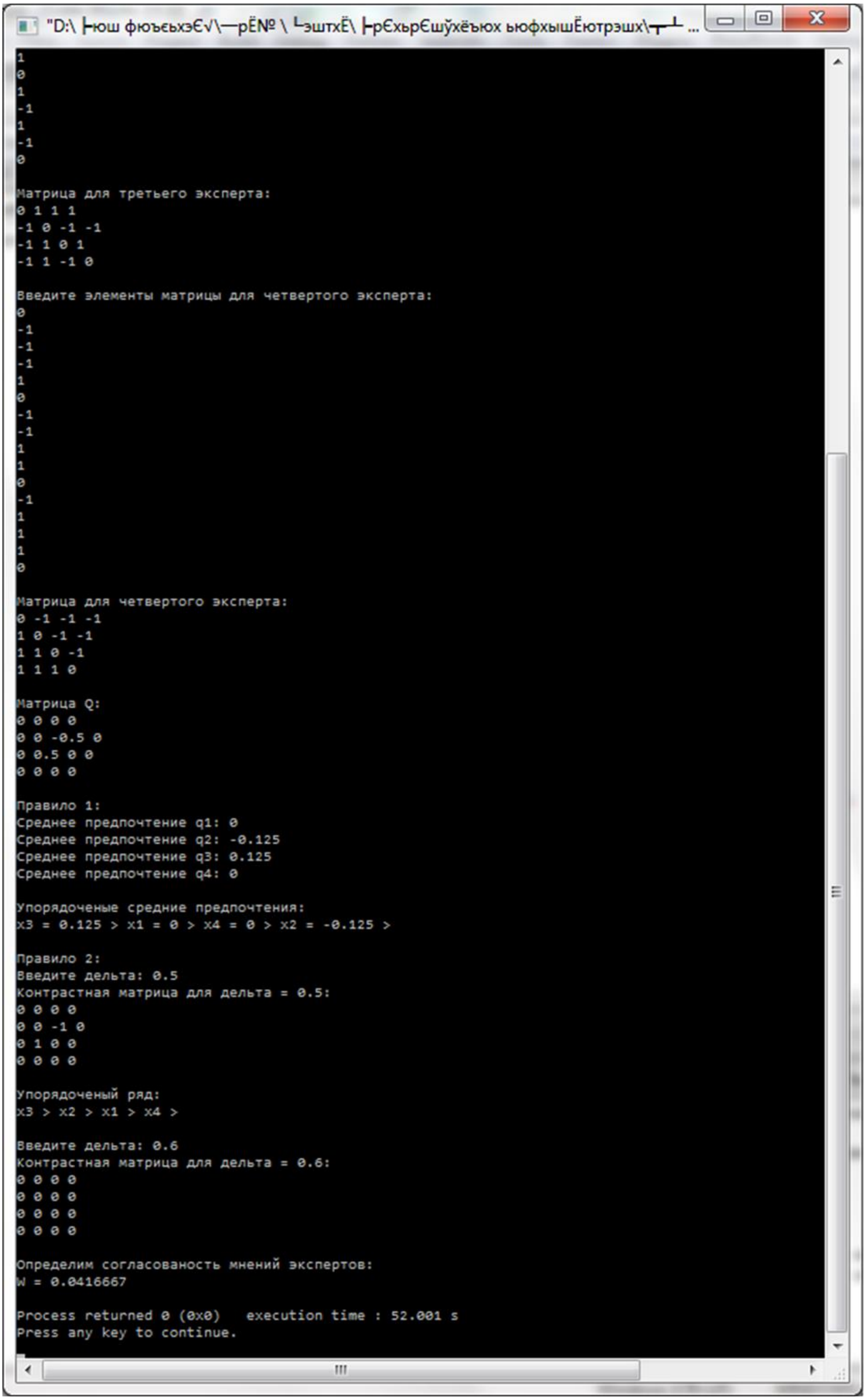

Рисунок 3.4 – Вихідна матриця та результати тестової задачі методом парних порівнянь за правилом 2

Дивлячись на результати роботи програми бачимо, що за отриманим рядом найбільш переважним об’єктом є третій об’єкт.

Розроблений програмний продукт без втрати загальності може бути застосований до ранжування будь-якої кількості об’єктів та експертів.

ВИСНОВКИ

Дана робота присвячена дослідженню методів системного аналізу та їх застосуванню до вирішення конфліктних ситуацій, що виникають при розгляді функціонування різноманітних технічних об’єктів. За результатами проведеного дослідження можна зробити висновок, що в сучасних умовах використання теорії системного аналізу для вирішення проблем різної фізичної природи є досить актуальним. Це зумовлено наступним. В умовах вибору при наявності невизначеності та ризику відносно майбутніх результатів прийняття рішень дуже часто нелегко прийняти рішення і обрати ту чи іншу стратегію. Використання системного підходу дає змогу за допомогою використання відповідних математичних методів прийняти обґрунтоване рішення про доцільність тієї чи іншої стратегії. За допомогою ж теорії ігор, зокрема теорії статистичних ігор, можна розв’язувати вказані задачі кількома методами і з них обирати найбільш ефективні, а також спрощувати вихідні матриці ігор.

В ході проведення дослідження було надано визначення теорії системного аналізу та висвітлено основне її завдання та значення в сфері пошуку оптимальних рішень. Так, у першому розділі викладено основні елементи процесу прийняття рішень, розкрито поняття невизначеності та наведено її види, подано кваліфікацію задач прийняття рішень та на основі їх аналізу відібрані тільки ті, що дозволяють приймати рішення в умовах неповної інформації та ризику, тобто виділено математичний апарат, що застосовується у задачах прийняття рішень в умовах невизначеності та ризику. У другому розділі для виділених у першому розділі задач прийняття рішень розглянуто класичні та похідні критерії прийняття рішень, які будуються на основі оціночних функцій та дозволяють отримувати оптимальні рішення. Крім того, в даній роботі було проілюстровано практичне застосування основних методів теорії статистичних ігор. Так, третій розділ кваліфікаційної роботи присвячено ознайомленню з практичним застосуванням методів теорії системного аналізу до вирішення проблем практики в умовах невизначеності та ризику. На основі розглянутих критеріїв прийняття рішень у цьому розділі також представлено розроблений програмний продукт «Decision-MakingProgram», за допомогою якого було проведено декілька обчислювальних експериментів з визначення оптимальних рішень та зроблено відповідні висновки за отриманими результатами по кожній з розглядуваних задач. Незважаючи на те, що програма має деякі обмеження стосовно розмірності матриці рішень (до 10×10 включно), розроблений програмний продукт дозволяє неупереджено, ефективно та швидко прийняти оптимальне рішення, яке виключає будь-який ризик. Тому цей продукт може буди корисним при прийнятті технічних, управлінських та інших рішень у сферах, де ризик при прийнятті рішення потрібно мінімізувати, а також може бути застосований у навчальному процесі при вивченні курсів, пов'язаних з теорією прийняття рішень.

Безумовно, що для прийняття обґрунтованих рішень необхідно спиратися на знання, досвід і інтуїцію фахівців. Застосування методів експертних оцінок використовується при вирішення складних, з браком повноти та достовірності інформації, завдань. Методи спрямовано на отримання інформації від фахівців, яка допоможе при прийнятті рішення. Тому теорія та практика експертних оцінок розвивається як самостійний напрямок.

Але, потрібно пам'ятати, що експертні оцінки можуть містити помилки. Як основну причину можна виділити – неповнота знань експертів, щодо проблеми, що розглядається. З цього робимо висновок, що відбір фахівців також має велике значення при використанні методів експертних оцінок.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Айзерман М. А., Алескеров Ф. Т. Задача Эрроу в теории группового выбора (анализ проблемы). *Автоматика и телемеханика*. 1983. № 9. С. 127–151.
2. Алескеров Ф. Т., Субочев А. Н. Об устойчевых решениях в ординальной задаче выбора. *Доклады Академии Наук*. 2009. Т. 426, №3. С. 318–320.
3. Балабанов И. Т. Риск-менеджмент. Москва : Финансы и статистика, 1996. 192 с.
4. Беляев Л. С. Решение сложных оптимизационных задач в условиях неопределенности. Новосибирск : Наука, 1978. 126 с.
5. Бурков В. Н., Новиков Д. А. Как управлять проектами. Москва : СИНТЕГ-ГЕО, 1997. 188 с.
6. Вентцель Е. С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. Москва : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. 208 с.
7. Вильямс Дж. Д. Совершенный стратег, или Букварь по теории стратегических игр. Москва : Советское Радио, 1960. 269 с.
8. Воробьёв Н. Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков. Москва : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. 272 с.
9. Гевко І. Б. Методи прийняття управлінських рішень : підручник. Київ : Кондор, 2009. 187 с.
10. Гуджоян О. Л. и др. Методы принятия управленческих решений : учебное пособие. Москва, 1997. 220 с.
11. Данелян Т. А. Формальные методы экспертных оценок. Статистка и экономика. 2015. № 1. С. 183–185.

12. Деордица Ю. С. Модели и методы принятия решений. Луганск : ВНУ, 2005.

13. Дмитриенко В. Д., Кравец В. А., Леонов С. Ю. Введение в теорию и методы принятия решений : учеб. пособие. Харьков : ХПИ, 2008. 141с.

14. Литвак Б. Г. Управленческие решения : учебник. Москва, 1998. 248 с.

15. Михайлова В. М. Применение метода «дельфи» как инструмента прогнозирования развития рынка. *Международный научно-исследовательский журнал*. 2019. № 3(81). С. 106–110.

16. Мушик Э., Мюллер П. Методы принятия технических решений. Москва : Мир, 1990. 208 с.

17. Мюллер Д. Общественный выбор. Москва : Изд. дом ГУ-ВШЭ, 2007. 994 с.

18. Науман Э. Принять решение, но как? Москва : Мир, 1987. 198 с.

19. Панфилова А. П. Мозговые штурмы в коллективном принятии решений. Москва : Академия 2005. 192 с.

20. Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Семина Е. А. Теория игр. Москва : Высшая школа. Книжный дом. «Университет», 1998. 304 с.

21. Розен В. В. Цель – оптимальность – решение (математические модели принятия оптимальных решений). Москва : Радио и связь, 1982. 168 с.

22. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий. Москва : Радио и связь, 1993.

23. Теория прогнозирования и принятия решений: учеб. пособие / Под ред. С. А. Саркисяна. Москва : Высшая школа, 1977. 352 с. URL : http://www.twirpx.com/file/595761/

24. Фатхутдинов Р. А. Разработка управленческого решения: учебное пособие. Москва, 1997. 272 с.

25. Фишберн П. Теория полезности для принятия решений. Москва : Наука, 1978. 352 с.

26. Чернов В. А. Анализ коммерческого риска. Москва : Финансы и статистика, 1996. 128 с.

27. Шапиро Д. И. Математические методы в проблеме принятия решения. Москва : НСК, 1974. 49 с.

28. Эддоус Р., Стенсфилд М. Методы принятия решений. Москва : Инфра, 2000.

ДОДАТОК А

Експертне ранжування об’єктів

Програмний продукт

Для *методу безпосереднього ранжування*:

```
#include <iostream>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
using namespace std;

int main(){
    system("chcp 1251");
    int n;
    float sum = 0, W;
    cout << "Введите n: ";      //ввод n
    cin >> n;
    int A[n][n];
    double k[n][n];
    double R[n];
    double K[n];

    cout << "Метод непосредственного сравнения:\n";

    cout << "Введите элементы матрицы мнений экспертов:\n";
//ввод матрицы A
    for (int i = 0; i < n; i++){
        for (int j = 0 ; j < n ; j++){
            cin >> A[i][j];
        }
    }
    cout << "\n";

    cout << "Матрица мнений экспертов:\n";            //вывод матрицы
A
    for (int i = 0; i < n; i++){
        for (int j = 0 ; j < n ; j++){
            cout << A[i][j] << " ";
        }
        cout << endl;
    }
    cout << "\n";
```

```
    for(int i = 0; i < n; i++){               //Находим средние ранги
каждого фактора
        R[i] = 0;
        K[i] = 0;
        for(int j = 0; j < n; j++){
            R[i] += A[j][i];
            K[i] = R[i]/n;
        }
        cout << "Средний ранг k" << i+1 << ": " << K[i] << "\n";
        }
    cout << "\n";

    for(int i = 0; i < n; i++){
        k[0][i] = i + 1;
        k[1][i] = K[i];
    }

    //блок сортировки методом пузырька

        for(int i = 0; i < n - 1; i++){
            for(int j = i + 1; j < n; j++){
                if(k[1][i] > k[1][j]){
                    double key = k[1][j];
                    double kei = k[0][j];
                    k[1][j] = k[1][i];
                    k[0][j] = k[0][i];
                    k[1][i] = key;
                    k[0][i] = kei;
            }
        }
    }

   cout << "Упорядоченые средние ранги:\n";
    for (int i = 0; i < n; i++){
        cout << "x" << k[0][i] << " = " << k[1][i] << " > ";
    }
    cout << "\n";

    cout << "Определим согласованость мнений экспертов:\n";
    for (int i = 0; i < n; i++){
         sum += (K[i] - 2.5)*(K[i] - 2.5);
    }
    W = (12.0/60.0) * sum;
    cout << "W = " << W << "\n";

    return 0;
```

```
}
```

Для <u>*методу парних порівнянь*</u>:

```
#include <iostream>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
using namespace std;

int main() {
    system("chcp 1251");
    int n;
    float sum = 0, W;
    double delta;
    cout << "Введите n: ";     //ввод n
    cin >> n;
    int E1[n][n]; int E2[n][n]; int E3[n][n]; int E4[n][n];
    double K[n][n];
    double Q[n][n];
    double D[n][n];
    double T[n][n];
    double s[n][n];
    double b[n][n];
    double P[n];
    double S[n];
    double B[n];

    cout << "Метод парных сравнений:\n";

    cout << "Введите элементы матрицы для первого эксперта:\n";
//ввод матрицы E1
    for (int i = 0; i < n; i++){
        for (int j = 0 ; j < n ; j++){
            cin >> E1[i][j];
        }
    }
    cout << "\n";

    cout << "Матрица для первого эксперта:\n";                 //вывод
матрицы E1
    for (int i = 0; i < n; i++){
        for (int j = 0 ; j < n ; j++){
            cout << E1[i][j] << " ";
        }
        cout << endl;
    }
    cout << "\n";
```

```
    cout << "Введите элементы матрицы для второго эксперта:\n";
//ввод матрицы E2
    for (int i = 0; i < n; i++){
        for (int j = 0 ; j < n ; j++){
            cin >> E2[i][j];
        }
    }
    cout << "\n";

    cout << "Матрица для второго эксперта:\n";                //вывод
матрицы E2
    for (int i = 0; i < n; i++){
        for (int j = 0 ; j < n ; j++){
            cout << E2[i][j] << " ";
        }
        cout << endl;
    }
    cout << "\n";

    cout << "Введите элементы матрицы для третьего эксперта:\n";
//ввод матрицы E3
    for (int i = 0; i < n; i++){
        for (int j = 0 ; j < n ; j++){
            cin >> E3[i][j];
        }
    }
    cout << "\n";

    cout << "Матрица для третьего эксперта:\n";               //вывод
матрицы E3
    for (int i = 0; i < n; i++){
        for (int j = 0 ; j < n ; j++){
            cout << E3[i][j] << " ";
        }
        cout << endl;
    }
    cout << "\n";

    cout << "Введите элементы матрицы для четвертого эксперта:\n";
//ввод матрицы E4
    for (int i = 0; i < n; i++){
        for (int j = 0 ; j < n ; j++){
            cin >> E4[i][j];
        }
    }
    cout << "\n";
```

```
    cout << "Матрица для четвертого эксперта:\n";              //вывод
матрицы E4
    for (int i = 0; i < n; i++){
        for (int j = 0 ; j < n ; j++){
            cout << E4[i][j] << " ";
        }
        cout << endl;
    }
    cout << "\n";

    cout << "Матрица Q:\n";       //матрица средних предпочтений
    for (int i = 0; i < n; i++){
        for(int j = 0; j < n; j++){
            K[i][j] = E1[i][j] + E2[i][j] + E3[i][j] + E4[i][j];
            Q[i][j] = K[i][j] / n;
            cout << Q[i][j] << " ";
        }
        cout << endl;
    }
    cout << "\n";

    cout << "Правило 1:\n";

    for(int i = 0; i < n; i++){                   //Находим среднее
предпочтение каждого фактора
        P[i] = 0;
        S[i] = 0;
        for(int j = 0; j < n; j++){
            P[i] += Q[i][j];
            S[i] = P[i]/n;
        }
        cout << "Среднее предпочтение q" << i+1 << ": " << S[i] <<
"\n";
        }
    cout << "\n";

    for(int i = 0; i < n; i++){
        s[0][i] = i + 1;
        s[1][i] = S[i];
    }

    //блок сортировки методом пузырька
        for(int i = 0; i < n - 1; i++){
            for(int j = i + 1; j < n; j++){
                if(s[1][j] > s[1][i]){
```

```
                    double key = s[1][j];
                    double keu = s[0][j];
                    s[1][j] = s[1][i];
                    s[0][j] = s[0][i];
                    s[1][i] = key;
                    s[0][i] = keu;
                }
            }
        }

        cout << "Упорядоченые средние предпочтения:\n";
        for (int i = 0; i < n; i++){
            cout << "x" << s[0][i] << " = " << s[1][i] << " > ";
        }
        cout << "\n\n";

        cout << "Правило 2:\n";

        cout << "Введите дельта: ";     //ввод дельта
        cin >> delta;

        for(int i = 0; i < n; i++){           //задаем условия
            for(int j = 0; j < n; j++){
                if (Q[i][j] >= delta){
                    D[i][j] = 1;
                } else if (Q[i][j] <= -delta){
                    D[i][j] = -1;
                } else if (abs(Q[i][j]) < delta){
                    D[i][j] = 0;
                } else {
                    D[i][j] = 7;
                }
            }
        }

        cout << "Контрастная матрица для дельта = " << delta <<":\n";
    //вывод контрастной матрицы
        for (int i = 0; i < n; i++){
            for (int j = 0 ; j < n ; j++){
                cout << D[i][j] << " ";
            }
            cout << endl;
        }
        cout << "\n";

         for(int i = 0; i < n; i++){
```

```
    B[i] = 0;
    for(int j = 0; j < n; j++){
        B[i] += D[i][j];
    }
 }

for(int i = 0; i < n; i++){
    b[0][i] = i + 1;
    b[1][i] = B[i];
}

//блок сортировки методом пузырька
    for(int i = 0; i < n; i++){
        for(int j = i + 1; j < n; j++){
            if(abs(b[1][j]) > abs(b[1][i])){
                double kei = b[1][j];
                double kea = b[0][j];
                b[1][j] = b[1][i];
                b[0][j] = b[0][i];
                b[1][i] = kei;
                b[0][i] = kea;
            }
        }
    }

cout << "Упорядоченый ряд:\n";
for (int i = 0; i < n; i++){
    cout << "x" << b[0][i] << " > ";
}
cout << "\n\n";

cout << "Введите дельта: ";     //ввод дельта
cin >> delta;

for(int i = 0; i < n; i++){
    for(int j = 0; j < n; j++){
        if(Q[i][j] >= delta){
            T[i][j] = 1;
        } else if (Q[i][j] <= -delta){
            T[i][j] = -1;
        } else if (abs(Q[i][j]) < delta){
            T[i][j] = 0;
        }  else {
            T[i][j] = 7;
        }
    }
```

```
    }

    cout << "Контрастная матрица для дельта = " << delta <<":\n";
//вывод контрастной матрицы
    for (int i = 0; i < n; i++){
        for (int j = 0 ; j < n ; j++){
            cout << T[i][j] << " ";
        }
        cout << endl;
    }
    cout << "\n";

    cout << "Определим согласованость мнений экспертов:\n";
    for (int i = 0; i < n; i++){
        for (int j = 0; j < n; j++){
                sum += Q[i][j] * Q[i][j];
            }
        }
    W = (1/12.0) * sum;
    cout << "W = " << W << "\n";

    return 0;
```