МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра фундаментальної та прикладної математики

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА

на тему: **«ПОБУДОВА ОБМЕЖЕНИХ НА ВСІЙ ОСІ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ НЕОДНОРІДНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗА ДОПОМОГОЮ ПСЕВДООБЕРНЕНИХ МАТРИЦЬ»**

Виконала: студентка 2 курсу, групи 8.1111
спеціальності 111 математика
(шифр і назва спеціальності)
освітньої програми математика
(назва освітньої програми)
М.В. Третьяк
(ініціали та прізвище)

Керівник доцент кафедри фундаментальної математики, доцент, к.ф.-м.н. Панасенко Є.В.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Рецензент завідувач кафедри програмної інженерії ЗНУ, доцент, к.ф.-м.н. Лісняк А.О.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Запоріжжя

2022

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет математичний

Кафедра фундаментальної та прикладної математики

Рівень вищої освіти магістр

Спеціальність 111 математика
(шифр і назва)

Освітня програма математика

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри фундаментальної та прикладної математики, д.т.н., професор
________________ Гребенюк С.М.
(підпис)

« _____ » ___________ 2022 р.

З А В Д А Н Н Я

НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТЦІ

Третьяк Марині Віталіївні
(прізвище, ім'я та по батькові)

1. Тема роботи Побудова обмежених на всій осі розв'язків лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь за допомогою псевдообернених матриць

керівник роботи Панасенко Євген Валерійович, к.ф-м.н., доцент
(прізвище, ім'я та по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом ЗНУ від « 10 » 05 2022 року № 90-с

2. Строк подання студентом роботи 05.12.2022

3. Вихідні дані до роботи
   1. Постановка задачі.
   2. Перелік літератури.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)
   1. Постановка задачі
   2. Основні теоретичні відомості
   3. Задача

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень) Презентація

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання 05.05.2022

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Розробка плану роботи.	26.09.2022	
2.	Збір вихідних даних.	28.09.2022	
3.	Обробка методичних та теоретичних	31.09.2022	
	джерел		
4.	Розробка першого розділу	02.10.2022	
5.	Розробка другого та третього розділу	05.10.2022	
6.	Оформлення та нормоконтроль	27.11.2022	
	кваліфікаційної роботи.		
7.	Захист кваліфікаційної роботи.	14.12.2022	

Студент ______________ М.В. Третьяк
(підпис) (ініціали та прізвище)

Керівник роботи ______________ Є.В. Панасенко
(підпис) (ініціали та прізвище)

Нормоконтроль пройдено

Нормоконтролер ______________ О.Г. Спиця
(підпис) (ініціали та прізвище)

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Побудова обмежених на всій осі розв'язків лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь за допомогою псевдообернених матриць»: 50 с., 18 джерел.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ, ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНА ДИХОТОМІЯ, НОРМАЛЬНА ФУНДАМЕНТАЛЬНА МАТРИЦЯ, ОПЕРАТОР ГРІНА, ПРОЕКТОР, ПСЕВДООБЕРНЕНА МАТРИЦЯ.

Об'єкт дослідження – обмежені на всій осі розв'язки лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь.

Мета роботи: знаходження обмежених на всій осі розв'язків лінійних диференціальних рівнянь.

Метод дослідження: аналітичний.

У кваліфікаційній роботі приведені основні означення, теореми та леми для диференціальних рівнянь першого порядку. Розглянуто умови існування обмежених на всій осі розв'язків лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь. На основі цього матеріалу побудовано обмежені на всій осі розв'язки лінійного неоднорідного диференціального рівняння у скінченновимірному дійсному просторі, використовуючи нормальну фундаментальну матрицю, псевдообернену матрицю та оператор Гріна.

SUMMARY

Master’s Qualification Thesis «Construction bounded on the entire axis of the solutions of linear inhomogeneous differential equations using pseudoinverse matrices»: 50 pages, 18 references.

DIFFERENTIAL EQUATION, EXPONENTIAL DICHOTOMY, NORMAL FUNDAMENTAL MATRIX, GREEN’S OPERATOR, PROJECTOR, PSEUDOINVERSE MATRIX.

The object of the study is solutions of linear inhomogeneous differential equations bounded on the entire axis.

The aim of the study is finding solutions of Linear Differential Equations bounded on the entire axis.

The method of research is analytical.

The qualification paper presents the main definitions, theorems and lemmas for First-Order differential equations. The conditions for the existence of solutions of linear inhomogeneous differential equations bounded on the entire axis are considered. On the basis of this material, solutions of a linear inhomogeneous differential equation in a finite-dimensional real space bounded on the entire axis are constructed using a normal fundamental Matrix, a pseudoinverse Matrix, and the Green’s operator.

ЗМІСТ

ВСТУП

Диференціальні рівняння й методи дослідження їх розв'язків широко використовуються у різноманітних галузях і розділах сучасної науки й техніки. Теорія диференціальних рівнянь почала інтенсивно розвиватись відносно функцій зі значеннями в дійсному просторі, які узагальнюють такі об'єкти, як нескінченні системи звичайних диференціальних рівнянь, деякі класи диференціальних рівнянь з частинними похідними, диференціально-інтегральні рівняння.

За допомогою теорії диференціальних рівнянь можна описати різноманітні процеси, що відбуваються у суспільстві, а також природні процеси та явища. Диференціальні рівняння мають широке прикладне застосування в сучасній математиці. Щоб більш точно вивчити процеси та явища, які відбуваються в математиці, потрібно створити математичний апарат, який би міг забезпечити більш строгий та логічний метод аналізу протікання досліджуваних явищ та процесів.

В кваліфікаційній роботі розглядаються поняття звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, псевдообернених та фундаментальних матриць.

1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Багато фізичних законів мають вигляд диференціальних рівнянь. Інтегрування цих рівнянь – складна справа. Одні диференціальні рівняння вдається розв’язати в явному вигляді, тобто записати шукану функцію у вигляді формули. Для інших ще й досі не знайдено зручних формул. У цих випадках знаходять наближені розв’язки за допомогою ЕОМ. Диференціальні рівняння досить просто і повно описують виробничі процеси. Тому важливо не лише вміти їх розв’язувати, а й складати.

1.1 Загальні поняття та означення

Означення. Диференціальним рівнянням n – го порядку відносно функції $y = y(x)$ називається співвідношення, яке пов’язує незалежну змінну x, шукану функцію $y(x)$ та її похідні (або диференціали): [1, с. 5]

$$F\left(x, y, y', y'', y^{(n)}\right) = 0.$$

Означення. Порядком диференціального рівняння називається найвищий порядок похідної (або диференціала), що не входить в це рівняння.

Якщо невідома функція залежить тільки від однієї змінної, то диференціальне рівняння називається звичайним; якщо невідома функція залежить від кількох змінних і диференціальне рівняння містить її частинні похідні за цими змінними, то воно називається рівнянням у частинних похідних. Надалі будемо розглядати лише звичайні диференціальні рівняння. [1, с. 5]

Означення. Розв’язком диференціального рівняння першого порядку називається функція $y = \varphi(x)$, яка при підстановці в рівняння обертає його в тотожність. Розв’язок диференціального рівняння називається загальним, якщо він містить стільки довільних сталих, яким є порядок рівняння, і при будь-яких значеннях сталих задовольняє це рівняння. [2]

Означення. Процес знаходження розв’язку диференціального рівняння називається інтегруванням рівняння. [1, с. 6]

Означення. Диференціальним рівнянням 1 – го порядку відносно функції $y = y(x)$ називається вираз вигляду

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1.1}$$

або

$$y' = f(x, y),$$

якщо він розв’язаний відносно похідної $y' = \frac{dy}{dx}$. [1, с. 6].

Існує ще одна форма запису диференціального рівняння 1 – го порядку, розв’язаного відносно похідної:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

де $P(x, y)dx$ та $Q(x, y)dy$ – задані функції. В цьому рівнянні змінні x та y – рівноправні, тобто будь-яку з них можна розглядати як функцію іншої.

Означення. Загальним розв’язком диференціального рівняння 1 – го порядку (1.1) називається функція $y = \varphi(x, \mathrm{C})$, яка при будь-якому значенні сталої С є розв’язком цього рівняння. Співвідношення $\Phi(x, y, C) = 0$, яке містить розв’язок в неявному вигляді, називається загальним інтегралом рівняння (1.1). [1, с. 5]

Означення. Частинним розв’язком диференціального рівняння 1 – го порядку називається будь-яка функція $y = \varphi(x, \mathrm{C}_0)$, отримана із загального розв'язку при певному значенні довільної сталої $\mathrm{C} = \mathrm{C}_0$. Відповідно, співвідношення $\Phi(x, y, C_0) = 0$, в цьому випадку, називається частинним інтегралом. [1, с. 7]

Означення. Графік розв'язку $y = \varphi(x)$ диференціального рівняння на площині Oxy називається інтегральною кривою. Загальному розв'язку (загальному інтегралу) відповідає сукупність (сімейство) інтегральних кривих. [1, с. 8]

Інколи серед всіх розв'язків диференціального рівняння потрібно знайти такий розв'язок, який задовольняє умову: $y = y_0$ при $x = x_0$, де x_0 і y_0 – задані числа. Така умова називається початковою умовою і позначається таким чином:

$$y(x_0) = y_0,$$

або

$$y|_{x=x_0} = y_0. \tag{1.2}$$

Геометрично це означає, що із сімейства інтегральних кривих, які визначаються загальним розв'язком (загальним інтегралом) рівняння, потрібно виділити інтегральну криву, яка проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0)$.

Означення. Задача знаходження частинного розв'язку $y = \varphi(x)$ диференціального рівняння, який задовольняє початкову умову (1.2) $\varphi(x_0) = y_0$, називається задачею Коші. [1, с. 9]

Умови, при яких рівняння (1.1) має розв'язок, дає наступна теорема.

Теорема Коші (існування та єдності розв'язку). Якщо в диференціальному рівнянні (1.1) функція $f(x, y)$ та її частинна похідна $\frac{\partial f}{\partial y}$ неперервні в точці $M_0(x_0; y_0)$ та її околі, то існує єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$ цього рівняння, який задовольняє початкову умову (1.2), тобто $\varphi(x_0) = y_0$ [1, с. 10]

Геометричний зміст цієї теореми полягає в тому, що при виконанні її умов існує єдина інтегральна крива диференціального рівняння, яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$.

Означення. Точки, у яких порушуються умови теореми Коші, називаються особливими точками. Через такі точки або взагалі не проходить жодна інтегральна крива, або проходить кілька інтегральних кривих. [1, с.10]

Означення. Розв'язок, у кожній точці якого порушується єдність розв'язку задачі Коші, називаються особливими. [1, с.11]

Особливий розв'язок не може бути отриманий із загального розв'язку при жодному значенні довільної сталої С. Особливі розв'язки можуть з'явитися серед розв'язків, загублених в результаті перетворень даного рівняння в процесі його інтегрування.

1.2 Диференціальні рівняння першого порядку. Рівняння з відокремлюваними змінними

Означення. Диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними називається рівняння 1-го порядку вигляду

$$y' = f(x) \cdot g(x) \tag{1.3}$$

або

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \tag{1.4}$$

якщо $P(x, y) = M_1(x)N_1(y)$ і $Q(x, y) = M_2(x)N_2(y)$. [2, с. 13]
Особливість цього рівняння у тому, що коефіцієнти при диференціалах розкладаються на множники, які залежать лише від однієї змінної.

Поділимо обидві частини рівняння (1.4) на добуток $N_1(y) \cdot M_2(x)$, виключаючи з розгляду точки, в яких $N_1(y) = 0$ та $M_2(x) = 0$:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0.$$

Одержали рівняння, у якого змінні відокремлені, тобто коефіцієнт при dx залежить тільки від x, а коефіцієнт при dy - тільки від y . Таке рівняння називається рівнянням з відокремленими змінними.

Почленно інтегруючи це рівняння, знайдемо загальний інтеграл рівняння (1.4):

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C.$$

Зауваження 1 При почленному діленні диференціального рівняння на $N_1(y) \cdot M_2(x)$ можуть бути загублені деякі розв'язки. Тому слід окремо розв'язати рівняння $N_1(y) = 0$ та $M_2(x) = 0$ і встановити ті розв'язки диференціального рівняння, які не можуть бути отримані із загального розв'язку, – особливі розв'язки. [11]

Зауваження 2 Рівняння (1.3) зводиться до рівняння з відокремленими змінними, якщо покласти $y' = \frac{dy}{dx}$. [11]

1.3 Однорідні диференціальні рівняння першого порядку та рівняння, що до них зводяться

Означення. Функція $f(x, y)$ називається однорідною функцією n–го виміру (n – натуральне число), якщо при будь-якому λ справедлива тотожність: [2, с. 15]

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y). \tag{1.5}$$

Наприклад, функція $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$ є однорідною функцією 2–го виміру, оскільки

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 - (\lambda x)(\lambda y) = \lambda^2(x + y - xy) = \lambda^2 f(x, y).$$

Покладаючи в (1.5) $\lambda = \frac{1}{x}$, отримаємо

$$f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x^n} f(x, y), \Rightarrow f(x, y) = x^n f\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

Тобто, однорідну функцією n–го виміру можна подати у вигляді

$$f(x, y) = x^n \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{1.6}$$

Означення. Диференціальне рівняння 1–го порядку вигляду

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \tag{1.7}$$

називається однорідним, якщо $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ є однорідними функціями однакового виміру. [1, с. 15]

Означення. Диференціальне рівняння вигляду

$$y' = f(x, y), \tag{1.8}$$

називається однорідним відносно своїх змінних (шуканої функції y і аргументу x), якщо $f\ (x, y)$ є однорідною функцією нульового виміру відносно y та x . [1, с. 16]

Однорідні рівняння (1.7) або (1.8), враховуючи (1.6), можуть бути перетворені до рівняння, права частина якого є функцією відношення $\frac{y}{x}$, тобто

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \qquad (1.9)$$

Однорідне рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними за допомогою підстановки $\frac{y}{x} = u$, де $u = u(x)$ - нова шукана функція. Тоді

$$y = ux \ \Rightarrow y' = u'x + u.$$

Підставляючи y та y' в рівняння (1.9), отримаємо

$$u'x + u = \varphi(u),$$

або

$$x\frac{du}{dx} = \varphi(u) - u,$$

звідки

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}, \varphi(u) \neq u.$$

Інтегруючи, знаходимо загальний розв’язок (інтеграл) відносно функції

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C.$$

Підставляючи після інтегрування замість u відношення $\frac{y}{x}$, отримаємо загальний розв'язок (інтеграл) даного однорідного рівняння.

Зауваження. При розв'язанні однорідних рівнянь не обов'язково зводити їх до вигляду (1.9). Можна зразу робити підстановку $y = ux$. [2]

1.4 Нормальна фундаментальна матриця

Теорема (Пеано). Якщо функція $f(x, y)$ неперервна в деякій області D площини Oxy, то існує неперервна разом зі своєю похідною функція $y = y(x)$, яка є розв'язком задачі Коші $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$, де $(x_0, y_0) \in D$. [5, с. 56]

Нехай $A(t)$ – $n \times n$ – вимірна матриця, елементи якої – неперервні на відрізку $[a, b]$ дійсні функції.

Означення. Задачею Коші для лінійної однорідної системи звичайних диференціальних рівнянь будемо називати задачу про знаходження розв'язку $z(\cdot) \in C^1[a, b]$ системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z, \tag{1.10}$$

які задовольняють умові Коші

$$z(a) = c, \qquad c \in \mathbb{R}^n . \tag{1.11}$$

Оскільки права частина системи (14) задовольняє умовам теореми Пікара, тому задача Коші (1.10), (1.11) має єдиний розв'язок для будь-якого $c \in \mathbb{R}^n$. [4]

Означення. Повну систему, яка складається з n – лінійно-незалежних розв’язків системи (1.10) називають фундаментальною, а $n \times n$ – вимірну матрицю $X(t)$, яка є розв’язком матричної задачі Коші

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(t)X(t), \qquad X(a) = I_n$$

називають нормальною фундаментальною матрицею. [4]

Згідно теореми Пікара для системи (1.10) нормальна фундаментальна матриця завжди існує і єдина. Таким чином, доведена наступна лема.

Лема. Задача Коші (1.10), (1.11) мають єдиний розв’язок

$$z(t,c) = X(t)c$$

для будь-якого вектора $c \in \mathbb{R}^n$ і матриці $A(t)$. [5]

Означення. Визначник $W(t)$ нормальної фундаментальної матриці $X(t)$ називають визначником Вронського:

$$W(t) \coloneqq \det X(t).$$

Теорема (Остроградського-Ліувілля). Для будь-якого $t \in [a,b]$ має місце наступна рівність

$$W(t) = W(a) \exp \int_a^t Sp\, A(\tau)\, d\tau. \qquad (1.12)$$

Згідно з правилом диференціювання визначника

$$\frac{dW(t)}{dt}=\sum_{j=1}^{n}\begin{vmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1k}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x'_{j1}(t) & \dots & x'_{jk}(t) & \dots & x'_{jn}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nk}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} \tag{1.13}$$

За означенням нормальної фундаментальної матриці $X(t)$ похідна кожної її елемента має вигляд

$$\frac{dx_{jk}(t)}{dt}=\sum_{s=1}^{n}a_{js}(t)x_{sk}(t).$$

Остання рівність дозволяє перетворити визначник (1.13):

$$\sum_{j=1}^{n}\begin{vmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1k}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{s=1}^{n}a_{js}(t)x_{s1}(t) & \dots & \sum_{s=1}^{n}a_{js}(t)x_{sk}(t) & \dots & \sum_{s=1}^{n}a_{js}(t)x_{sn}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nk}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}a_{js}(t)\begin{vmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1k}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{s1}(t) & \dots & x_{sk}(t) & \dots & x_{sn}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nk}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}a_{js}(t)\delta_{js}W(t)=W(t)\sum_{j=1}^{n}a_{jj}(t).$$

Таким чином, за означенням сліду $Sp\ A(t)$ матриці $A(t)$, маємо

$$\frac{dW(t)}{dt}=W(t)\ Sp\ A(t).$$

Розділяючи змінні

$$\frac{dW(t)}{W(t)} = Sp\,A(t)$$

і після інтеграції, маємо

$$W(t) = W(a)\exp\int_a^t Sp\,A(\tau)\,d\tau,$$

що і потрібно було довести.

Наслідок. Нормальна фундаментальна матриця системи (1.10) невироджена для будь-якого $t \in [a, b]$. [6]

Дійсно, за означенням нормальної фундаментальної матриці, вона невироджена хоча б в одній точці $t = a$, що в силу теореми Остроградського-Ліувілля і в силу дійсності сліду матриці $A(t)$ тягне невиродженість нормальної фундаментальної матриці системи для будь-якого $t \in [a, b]$.

2 ОБМЕЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Багато фізичних явищ і процесів у природі та техніці описуються за допомогою звичайних диференціальних рівнянь та їхніх систем. Класична теорія звичайних диференціальних рівнянь є потужним апаратом, необхідним для складання математичних моделей різних прикладних задач та їхнього розв'язування.

2.1 Постановка задачі

Розглянемо в дійсному просторі диференціальне рівняння вигляду (2.1)

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + f(t), \tag{2.1}$$

що має розв'язок $x(t)$ рівняння

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \big(A(s)x(s) + f(s)\big)\, ds\,, \tag{2.2}$$

який є неперервно диференційовний у кожній точці $t \in \mathbb{R}$ і задовольняє рівнянню (2.1) скрізь у $\mathbb{R}$. Тому обмежений розв'язок $x(t)$ рівняння (2.1) будемо шукати в дійному просторі $C^1(\mathbb{R})$ неперервно диференційованих на $\mathbb{R}$ функцій, обмежених разом зі своєю похідною. [5, c. 77]

Знайдемо умови існування обмежених на всій осі $\mathbb{R}$ розв'язків $x(t) \in C^1(\mathbb{R})$ рівняння (2.1) у припущенні, що відповідне йому однорідне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) \tag{2.3}$$

допускає експоненціальну дихотомію на пів осях.

Як відомо, рівняння (2.3) допускає експоненціальну дихотомію на інтервалі J, якщо існують проектор $P(P^2 = P)$ і константи $K \geq 1, \alpha > 0$ такі, що для будь-яких $t, s \in J$ справедливі оцінки

$$\|(t)PX^{-1}(s)\| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}, t \geq s$$
$$\|X(t)(E-P)X^{-1}(s)\| \leq Ke^{\alpha(t-s)}, s \geq t,$$

де $X(t) = X(t, 0)$ – фундаментальна матриця рівняння (2) така, що

$$\frac{d(t)}{dt} = A(t)X(t), X(0) = E - \text{одинична матриця.}$$

Тут і надалі J один з інтервалів:

$$J = \mathbb{R} = (-\infty; +\infty),$$
$$J = \mathbb{R}_+ = [0; +\infty),$$

або

$$J = \mathbb{R}_- = (-\infty; 0].$$

2.2 Основний результат

Розглянемо задачу про існування обмежених на $\mathbb{R}$ розв'язків диференціального рівняння (2.1) в припущенні, що однорідне рівняння (2.3) допускає експоненціальну дихотомію на пів осях $\mathbb{R}_+$ і $\mathbb{R}_-$ з проекторами P і Q

відповідно, тобто існують проектори $P(P^2 = P)$ і $Q(Q^2 = Q)$, константи $K_{1,2} \geq 1, \alpha_{1,2} > 0$ такі, що мають місце оцінки:

для всіх $t, s \in \mathbb{R}_+$

$$\|X(t)PX^{-1}(s)\| \leq K_1 e^{-\alpha_1(t-s)}, t \geq s,$$
$$\|X(t)(E-P)X^{-1}(s)\| \leq K_1 e^{\alpha_1(t-s)}, s \geq t,$$

для всіх $t, s \in R_-$

$$\|X(t)QX^{-1}(s)\| \leq K_2 e^{-\alpha_2(t-s)}, t \geq s,$$
$$\|X(t)(E-Q)X^{-1}(s)\| \leq K_2 e^{\alpha_2(t-s)}, s \geq t.$$

Теорема. Нехай однорідне рівняння (2.3) допускає експоненціальну дихотомію на пів осях $\mathbb{R}_+$ і $\mathbb{R}_-$ з проекторами P і Q відповідно. [4] Якщо оператор

$$D = P - (E - Q) : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

який діє з дійсного простору $\mathbb{R}$ в себе, є псевдо оберненим, то:

– для того, щоб існували обмежені на всій дійсній осі розв'язки рівняння (2.1), необхідно і достатньо, щоб оператор-функція $f(t) \in C(\mathbb{R})$ задовольняла умову

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(t)f(t)\,dt = 0; \qquad (2.4)$$

– за умови (2.4) обмежені на всій осі розв'язки системи (2.1) мають вигляд

$$x(t,c) = X(t)PP_{N(D)}c + (Gf)(t) \qquad \forall c \in \mathbb{R}, \qquad (2.5)$$

де

$$(G[f])(t) =$$

$$= X(t)\begin{cases} \int\limits_0^t PX^{-1}(s)f(s)\,ds - \int\limits_t^\infty (E-P)X^{-1}(s)f(s)\,ds + \\ +PD^+\left[\int_0^\infty (E-P)X^{-1}(s)f(s)ds + \int_{-\infty}^0 QX^{-1}(s)f(s)ds\right], t \geq 0, \\ \int\limits_0^t QX^{-1}(s)f(s)\,ds - \int\limits_t^\infty (E-Q)X^{-1}(s)f(s)\,ds + \\ +(E-Q)D^+\left[\int_0^\infty (E-P)X^{-1}(s)f(s)ds + \int_{-\infty}^0 QX^{-1}(s)f(s)ds\right], t \leq 0. \end{cases}$$

– узагальнений оператор Гріна задачі про обмежені на всій осі $\mathbb{R}$ розв'язки з наступними властивостями:

$$(G[f])(0+0) - (G[f])(0-0) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)f(t)\,dt,\ \ (LG[f](t) = f(t),\ \ t \in \mathbb{R},$$

де $H(t) = P_{N(D^*)}QX^{-1}(t) = P_{N(D^*)}(E-P)X^{-1}(t), D^+$ – псевдообернена матриця до матриці $D,\ P_{N(D)}$ і $P_{N(D^*)}$ – проектори, які проектують $\mathbb{R}$ на ядро $N(D)$ і коядро $N(D^*)$ оператора D відповідно.

2.3 Знаходження псевдообернених матриць

Г. Мур в 1920 році узагальнив поняття звернення для довільних прямокутних і в тому числі квадратних, но вироджених матриць, вводячи поняття псевдооберненої матриці. Незалежно від дослідження Мура, до цієї ж матриці прийшов Р. Пенроуз в 1955 році. Оригінальні формули для псевдообернених матриць і ортопроекторів були отримані А.Ф. Турбіним і В.І. Кублановською. При цьому А.Ф. Турбін запропонував оригінальний підхід до побудови псевдообернених матриць, які будуються на основі попередньо обчислених проекторів.

Означення. Матриця розміром $m \times n$ називається псевдоoберненою для $m \times n$ матриці Q, якщо виконуються рівності

$$\begin{aligned} QQ^{+}Q &= Q; \\ Q^{+}QQ^{+} &= Q^{+}; \\ (QQ^{+})^{*} &= QQ^{+}; \\ (Q^{+}Q)^{*} &= Q^{+}Q. \end{aligned} \qquad (2.6)$$

Означення. Нехай ранг матриці Q дорівнює n_1: $rank\ Q = n_1$. Скелетним розкладом матриці Q називається добуток

$$Q = R \cdot S \qquad (2.7)$$

де $m \times n_1$ – матриця R і $n_1 \times n$ – матриця S – повного рангу:

$$rank\ Q = rank\ R = rank\ S = n_1. [9]$$

Для знаходження псевдооберненої матриці потрібно застосовувати формулу

$$Q^{+} = S^{+}R^{+} = S^{*}(SS^{*})^{-1}(R^{*}R)^{-1}R^{*} \qquad (2.8)$$

де $Q = RS$ – скелетний розклад матриці Q. Псевдообернена матриця існує для будь якої матриці, окрім того вона єдина.

Для того, щоб отримати розклад (2.8), достатньо в якості стовпці матриці R взяти будь-які n_1 лінійно-незалежні стовпчики матриці Q або будь-які n_1 лінійно-незалежні стовпці, через які лінійно виражаються стовпці матриці Q.

Тоді довільний j – й стовпець матриці Q буде лінійною комбінацією стовпців матриці R.

Означення. Ортопроектором P_Q для $m \times n$ – матриці Q називається $n \times n$ – матриця, яка задовільняє наступним умовам:

$$QP_Q = 0,$$
$$[P_Q]^* = P_Q,$$
$$[P_Q]^2 = P_Q. [5]$$

Аналогічно вводиться $m \times m$ – матриця -ортопроектор P_{Q^*}:

$$Q^* P_{Q^*} = 0,$$
$$[P_{Q^*}]^* = P_{Q^*},$$
$$[P_{Q^*}]^2 = P_{Q^*}.$$

Ортопроектори P_Q і P_{Q^*} можна знайти, знаючи псевдообернену до Q матрицю Q^+:

$$P_{Q^*} = I_m - QQ^+,$$
$$P_Q = I_n - Q^+Q.$$

Означення. Нуль-простором $N(Q)$ $m \times n$ матриці Q називається множина векторів $c_n \in \mathbb{R}^n$, які мають властивість $Qc_n = 0$. [5]

Аналогічно вводиться нуль-простір $N(Q^*)$ матриці Q^*:

$$N(Q^*) = \{c_m \in \mathbb{R}^m : Q^*_{c_m} = 0\}.$$

Для знаходження векторів з нуль-простору матриць Q і Q^* можна використовувати ортопроектори. Дійсно, для будь-якого вектора $c_n \in \mathbb{R}^n$ вектор $P_Q c_n \in N(Q)$: таким чином, ортопроектор P_Q проектує евклідовий простір $\mathbb{R}^n$ в нуль-простір матриці Q:

$$P_Q : \mathbb{R}^n \to N(Q).$$

Аналогічно будь-який вектор $c_m \in \mathbb{R}^m$ ортопроектор P_{Q^*} проектує в нуль-простір матриці Q^* : $P_{Q^*} c_m \in N(Q^*)$, отже

$$P_{Q^*} : \mathbb{R}^m \to N(Q^*).$$

3 ЗАСТОСУВАННЯ АПАРАТУ ПСЕВДООБЕРНЕНИХ МАТРИЦЬ ДО ПОБУДОВИ ОБМЕЖЕНИХ НА ВСІЙ ОСІ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ НЕОДНОРІДНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Розглянемо диференціальне рівняння вигляду (2.1) з матрицями:

$$A = \begin{pmatrix} -\operatorname{th} t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{th} t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

$$f(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t \\ t^3 \\ t \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

Невідомою вектор-функцією є вектор-стовпчик $x(t)$:

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

Розглянемо однорідне диференціальне рівняння (3.1) і знайдемо нормальну фундаментальну матрицю. Розв'яжемо лінійне диференціальне рівняння першого порядку від першого елемента головної діагоналі матриці (3.1):

$$\frac{dx}{dt} = -\operatorname{th} t \cdot x. \tag{3.4}$$

Поділимо на x та помножимо на dt обидві частини рівняння. Отримаємо:

$$\frac{dx}{x} = -\operatorname{th} t\, dt.$$

Беремо під інтеграл обидві частини рівняння:

$$\int \frac{dx}{x} = \int -\operatorname{th} t\, dt,$$

$$\ln|x| = -\int \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t} dt,$$

$$\ln|x| = -\int \frac{d(\operatorname{ch} t)}{\operatorname{ch} t},$$

$$\ln|x| = -\ln|\operatorname{ch} t| + lnC_1,$$

$$\ln|x| = \ln\left|\frac{C_1}{\operatorname{ch} t}\right|,$$

$$x(t) = \frac{C_1}{\operatorname{ch} t}.$$

Розв'яжемо аналогічно лінійне диференціальне рівняння першого порядку від другого елемента головної діагоналі матриці (3.1):

$$\frac{dx}{dt} = \operatorname{th} t \cdot x, \tag{3.5}$$

$$\frac{dx}{x} = \operatorname{th} t\, dt,$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \operatorname{th} t\, dt,$$

$$\ln|x| = \int \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t} dt,$$

$$\ln|x| = \int \frac{d(\operatorname{ch} t)}{\operatorname{ch} t},$$

$$\ln|x| = \ln|\operatorname{ch} t| + lnC_1,$$

$$\ln|x| = \ln|\mathrm{C}_1 \cdot \operatorname{ch} t|,$$

$$x(t) = C_1 \cdot \operatorname{ch} t.$$

Розв'яжемо лінійне диференціальне рівняння першого порядку від третього елемента головної діагоналі матриці (3.1):

$$\frac{dx}{dt} = -1 \cdot x. \tag{3.6}$$

Поділимо на x та помножимо на dt обидві частини рівняння. Отримаємо:

$$\frac{dx}{x} = -1 \cdot dt.$$

Беремо під інтеграл обидві частини рівняння:

$$\int \frac{dx}{x} = -\int dt$$
$$\ln|x| = -t + C_1,$$
$$x(t) = e^{-t+C_1},$$
$$x(t) = C_1 \cdot e^{-t}.$$

Лінійне диференціальне рівняння першого порядку від четвертого елемента головної діагоналі матриці (3.1) має таку ж саму відповідь, що і відповідь лінійного диференціального рівняння від третього елемента головної діагоналі матриці (3.1).

Далі знайдемо матрицю $X(t)$, де на головній діагоналі будуть розташовані елементи з розв'язків диференціальних рівнянь (3.4 – 3.6), а всі інші елементи будуть нульовими. Тоді матриця буде виглядати так:

$$X(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\operatorname{ch} t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{ch} t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

Гіперболічні функції можна виразити за допомогою експоненціальної функції. Тоді:

$$X(t)=\begin{pmatrix}\frac{2}{e^t+e^{-t}} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{e^t+e^{-t}}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & e^{-t} & 0\\ 0 & 0 & 0 & e^{-t}\end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Знайдемо обернену матрицю до матриці (3.7). Скористаємося методом алгебраїчних доповнень. Обчислимо визначник матриці (3.7):

$$\det\big(X(t)\big)=\begin{vmatrix}\frac{2}{e^t+e^{-t}} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{e^t+e^{-t}}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & e^{-t} & 0\\ 0 & 0 & 0 & e^{-t}\end{vmatrix}=\frac{2}{e^t+e^{-t}}\cdot\begin{vmatrix}\frac{e^t+e^{-t}}{2} & 0 & 0\\ 0 & e^{-t} & 0\\ 0 & 0 & e^{-t}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{2}{e^t+e^{-t}}\cdot\frac{(e^t+e^{-t})\cdot e^{-2t}}{2}=e^{-2t}.$$

Обчислимо всі алгебраїчні доповнення матриці (3.7):

$$A_{11}=(-1)^2\cdot\begin{vmatrix}\frac{e^t+e^{-t}}{2} & 0 & 0\\ 0 & e^{-t} & 0\\ 0 & 0 & e^{-t}\end{vmatrix}=\frac{(e^t+e^{-t})\cdot e^{-2t}}{2},$$

$$A_{12}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & e^{-t} & 0\\ 0 & 0 & e^{-t}\end{vmatrix}=0,$$

$$A_{13}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}0 & \frac{e^t+e^{-t}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & e^{-t}\end{vmatrix}=0,$$

$$A_{14}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}0 & \frac{e^t+e^{-t}}{2} & 0\\ 0 & 0 & e^{-t}\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=0,$$

$$A_{21}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & e^{-t} & 0\\ 0 & 0 & e^{-t}\end{vmatrix}=0,$$

$$A_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} \frac{2}{e^t+e^{-t}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{vmatrix} = \frac{2\cdot e^{-2t}}{e^t+e^{-t}},$$

$$A_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} \frac{2}{e^t+e^{-t}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{24} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} \frac{2}{e^t+e^{-t}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{e^t+e^{-t}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} \frac{2}{e^t+e^{-t}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} \frac{2}{e^t+e^{-t}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e^t+e^{-t}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{vmatrix} = e^{-t},$$

$$A_{34} = (-1)^7 \cdot \begin{vmatrix} \frac{2}{e^t+e^{-t}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e^t+e^{-t}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{41} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{e^t+e^{-t}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{42} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} \frac{2}{e^t+e^{-t}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{43} = (-1)^7 \cdot \begin{vmatrix} \frac{2}{e^t+e^{-t}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e^t+e^{-t}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{44} = (-1)^8 \cdot \begin{vmatrix} \frac{2}{e^t+e^{-t}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e^t+e^{-t}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{vmatrix} = e^{-t}.$$

Запишемо союзну матрицю та транспонуємо її:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \frac{(e^t+e^{-t})\cdot e^{-2t}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\cdot e^{-2t}}{e^t+e^{-t}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

$$\widetilde{A^T} = \begin{pmatrix} \frac{(e^t+e^{-t})\cdot e^{-2t}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\cdot e^{-2t}}{e^t+e^{-t}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

Знайдемо обернену матрицю:

$$X^{-1}(t) = \frac{1}{e^{-2t}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{(e^t+e^{-t})\cdot e^{-2t}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\cdot e^{-2t}}{e^t+e^{-t}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^t+e^{-t}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{e^t+e^{-t}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

Однорідна система експоненціально-дихотомічна на пів осях $\mathbb{R}^+$ і $\mathbb{R}^-$ з проекторами

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

відповідно. Таким чином, оператор D можна знайти за формулою

$$D = P - (E - Q),$$

де

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (3.8)$$

Обчислимо псевдообернену матрицю до матриці D. Перед тим, як починати знаходити псевдообернену матрицю, необхідно спочатку перевірити умову її існування .Обчислимо визначник матриці D:

$$\det(D) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Так, як визначник дорівнює нулю, то можна зробити висновок, що існує псевдообернена матриця. Транспонуємо матрицю (3.8) та помножимо вихідну матрицю (3.8) на транспоновану:

$$D^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.9}$$

$$D \cdot D^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

Множимо матрицю I_4 на число ε та додаємо до результату добуток (3.9):

$$I_4 \cdot \varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix},$$

$$D \cdot D^T + I_4 \cdot \varepsilon =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\varepsilon \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

Знайдемо обернену матрицю до матриці (3.10). Обчислимо спочатку визначник матриці (3.10):

$$\det(D \cdot D^T + I_4 \cdot \varepsilon) = \begin{vmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\varepsilon \end{vmatrix} =$$

$$= \varepsilon \cdot \begin{vmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 1+\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1+\varepsilon \end{vmatrix} = \varepsilon^2 \cdot (1+\varepsilon)^2.$$

Обчислимо всі алгебраїчні доповнення матриці (3.10):

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 1+\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1+\varepsilon \end{vmatrix} = \varepsilon \cdot (1+\varepsilon)^2,$$

$$A_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1+\varepsilon \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\varepsilon \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{14} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1+\varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1+\varepsilon \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 1+\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1+\varepsilon \end{vmatrix} = \varepsilon \cdot (1+\varepsilon)^2,$$

$$A_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\varepsilon \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{24} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\varepsilon \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\varepsilon \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1+\varepsilon \end{vmatrix} = \varepsilon^2 \cdot (1+\varepsilon),$$

$$A_{34} = (-1)^7 \cdot \begin{vmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{41} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 1+\varepsilon & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{42} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\varepsilon & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{43} = (-1)^7 \cdot \begin{vmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{44} = (-1)^8 \cdot \begin{vmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1+\varepsilon \end{vmatrix} = \varepsilon^2 \cdot (1+\varepsilon).$$

Запишемо союзну матрицю та транспонуємо її:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \varepsilon \cdot (1+\varepsilon)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon \cdot (1+\varepsilon)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^2 \cdot (1+\varepsilon) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon^2 \cdot (1+\varepsilon) \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{A^T} = \begin{pmatrix} \varepsilon \cdot (1+\varepsilon)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon \cdot (1+\varepsilon)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^2 \cdot (1+\varepsilon) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon^2 \cdot (1+\varepsilon) \end{pmatrix}.$$

Знайдемо обернену матрицю:

$$(D \cdot D^T + I_4 \cdot \varepsilon)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2 \cdot (1+\varepsilon)^2} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon \cdot (1+\varepsilon)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon \cdot (1+\varepsilon)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^2 \cdot (1+\varepsilon) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon^2 \cdot (1+\varepsilon) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1+\varepsilon} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1+\varepsilon} \end{pmatrix}. \qquad (3.12)$$

Далі знайдемо добуток матриці (3.9) та матриці (3.12):

$$D^T \cdot (D \cdot D^T + I_4 \cdot \varepsilon)^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1+\varepsilon} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1+\varepsilon} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1+\varepsilon} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1+\varepsilon} \end{pmatrix}. \tag{3.13}$$

Знаходимо границю від (3.13):

$$\mathrm{D}^+ = \lim_{\varepsilon \to 0} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1+\varepsilon} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1+\varepsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо ортопроектори P_Q та P_{Q^*}:

$$P_Q = I_4 - D^+ \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_{Q^*} = I_4 - D \cdot D^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Знаходимо $H(t)$:

$$H(t)=P_{Q^*}\cdot Q\cdot X^{-1}(t)=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{e^t+e^{-t}}{2}&0&0&0\\0&\frac{2}{e^t+e^{-t}}&0&0\\0&0&e^t&0\\0&0&0&e^t\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{e^t+e^{-t}}{2}&0&0&0\\0&\frac{2}{e^t+e^{-t}}&0&0\\0&0&e^t&0\\0&0&0&e^t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&\frac{2}{e^t+e^{-t}}&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Знаходимо добуток (3.14) і (3.2):

$$H(t)\cdot f(t)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&\frac{2}{e^t+e^{-t}}&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}t^3\\t\\t^3\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\frac{2t}{e^t+e^{-t}}\\0\\0\end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Далі необхідно обчислити інтеграл, підінтегральною функцією якого буде матриця (3.15). Тобто обчислюємо інтеграл окремо від кожного елемента матриці (3.15):

$$\int_{-\infty}^{+\infty}0=0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2t}{e^t+e^{-t}}=0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}0=0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}0=0.$$

І тоді відповіддю буде:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{2t}{e^{t}+e^{-t}}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Наступним кроком обчислимо оператор Гріна. Він має два розв’язки – для $t \geq 0$ та для $t \leq 0$. Обчислимо для $t \geq 0$:

$$(G_1[f])(t) =$$

$$= X(t)\cdot\left(\int_0^t P\cdot X^{-1}(s)\cdot f(s)\,ds - \int_t^{\infty}(E-P)\cdot X^{-1}(s)\cdot f(s)\,ds + P\cdot D^{+}\times\cdot\right.$$

$$\left.\times\left[\int_0^{\infty}(E-P)\cdot X^{-1}(s)\cdot f(s)\,ds + \int_{-\infty}^{0} Q\cdot X^{-1}(s)\cdot f(s)\,ds\right]\right) =$$

$$=\begin{pmatrix}\dfrac{2}{e^{t}+e^{-t}} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{e^{t}+e^{-t}}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & e^{-t} & 0\\ 0 & 0 & 0 & e^{-t}\end{pmatrix}\times$$

$$\times\left(\int_0^t\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{e^{s}+e^{-s}}{2}&0&0&0\\0&\frac{2}{e^{s}+e^{-s}}&0&0\\0&0&e^{s}&0\\0&0&0&e^{s}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}s^3\\s\\s^3\\s\end{pmatrix}ds-\right.$$

$$-\int_t^{\infty}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{e^{s}+e^{-s}}{2}&0&0&0\\0&\frac{2}{e^{s}+e^{-s}}&0&0\\0&0&e^{s}&0\\0&0&0&e^{s}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}s^3\\s\\s^3\\s\end{pmatrix}ds+\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\left[\int_0^{\infty}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{e^{s}+e^{-s}}{2}&0&0&0\\0&\frac{2}{e^{s}+e^{-s}}&0&0\\0&0&e^{s}&0\\0&0&0&e^{s}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}s^3\\s\\s^3\\s\end{pmatrix}ds+\right.$$

$$+\int_{-\infty}^{0}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{e^s+e^{-s}}{2}&0&0&0\\0&\frac{2}{e^s+e^{-s}}&0&0\\0&0&e^s&0\\0&0&0&e^s\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}s^3\\s\\s^3\\s\end{pmatrix}ds\Bigg]\Bigg).$$

Обчислимо перший інтеграл:

$$\int_0^t\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{e^s+e^{-s}}{2}&0&0&0\\0&\frac{2}{e^s+e^{-s}}&0&0\\0&0&e^s&0\\0&0&0&e^s\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}s^3\\s\\s^3\\s\end{pmatrix}ds=$$

$$=\int_0^{-t}\begin{pmatrix}\frac{(e^s+e^{-s})\cdot s^3}{2}\\0\\s^3e^s\\se^s\end{pmatrix}ds=\begin{pmatrix}\frac{\left(12e^t+t^3e^{2t}-3t^2e^{2t}+6te^{2t}-6e^{2t}-t^3-3t^2-6t-6\right)e^{-t}}{2}\\0\\6-6e^t+6te^t-3t^2e^t+t^3e^t\\1-e^t+te^t\end{pmatrix}.$$

Обчислимо другий інтеграл:

$$\int_t^{\infty}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{e^s+e^{-s}}{2}&0&0&0\\0&\frac{2}{e^s+e^{-s}}&0&0\\0&0&e^s&0\\0&0&0&e^s\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}s^3\\s\\s^3\\s\end{pmatrix}ds=\int_t^{\infty}\begin{pmatrix}0\\\frac{2s}{e^s+e^{-s}}\\0\\0\end{pmatrix}ds=$$

$$=\begin{pmatrix}0\\it\ln(1+ie^t)-it\ln(1-ie^t)+idilog(1+ie^t)-idilog(1-ie^t)\\0\\0\end{pmatrix}.$$

де

$$dilog=\int_1^x\frac{\ln t}{1-t}dt\ .$$

Обчислимо третій інтеграл:

$$\int_0^\infty \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{e^s+e^{-s}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{e^s+e^{-s}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s^3 \\ s \\ s^3 \\ s \end{pmatrix} ds = \int_0^\infty \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2s}{e^s+e^{-s}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ds =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 2Catalan \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

де

$$Catalan = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)^2}.$$

Обчислимо четвертий інтеграл:

$$\int_{-\infty}^0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{e^s+e^{-s}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{e^s+e^{-s}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s^3 \\ s \\ s^3 \\ s \end{pmatrix} ds = \int_{-\infty}^0 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2s}{e^s+e^{-s}} \\ s^3 e^s \\ s e^s \end{pmatrix} ds =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -2Catalan \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Тоді:

$$(G_1[f])(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{e^t + e^{-t}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{e^t + e^{-t}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \times$$

$$\times\left(\begin{pmatrix}\dfrac{(12e^{t}+t^{3}e^{2t}-3t^{2}e^{2t}+6te^{2t}-6e^{2t}-t^{3}-3t^{2}-6t-6)e^{-t}}{2}\\ 0\\ 6-6e^{t}+6te^{t}-3t^{2}e^{t}+t^{3}e^{t}\\ 1-e^{t}+te^{t}\end{pmatrix}-\right.$$

$$-\begin{pmatrix}0\\ it\ln(1+ie^{t})-it\ln(1-ie^{t})+idilog(1+ie^{t})-idilog(1-ie^{t})\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+$$

$$\left.+\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}0\\ 2Catalan\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ -2Catalan\\ -6\\ -1\end{pmatrix}\right]\right)=$$

$$=\begin{pmatrix}\dfrac{2}{e^{t}+e^{-t}}&0&0&0\\ 0&\dfrac{e^{t}+e^{-t}}{2}&0&0\\ 0&0&e^{-t}&0\\ 0&0&0&e^{-t}\end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix}\dfrac{(12e^{t}+t^{3}e^{2t}-3t^{2}e^{2t}+6te^{2t}-6e^{2t}-t^{3}-3t^{2}-6t-6)e^{-t}}{2}\\ -it\ln(1+ie^{t})+it\ln(1-ie^{t})-idilog(1+ie^{t})+idilog(1-ie^{t})\\ 6-6e^{t}+6te^{t}-3t^{2}e^{t}+t^{3}e^{t}\\ 1-e^{t}+te^{t}\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix}0\\0\\-6\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{2}{e^{t}+e^{-t}}&0&0&0\\ 0&\dfrac{e^{t}+e^{-t}}{2}&0&0\\ 0&0&e^{-t}&0\\ 0&0&0&e^{-t}\end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix}\dfrac{(12e^{t}+t^{3}e^{2t}-3t^{2}e^{2t}+6te^{2t}-6e^{2t}-t^{3}-3t^{2}-6t-6)e^{-t}}{2}\\ -it\ln(1+ie^{t})+it\ln(1-ie^{t})-idilog(1+ie^{t})+idilog(1-ie^{t})\\ -6e^{t}+6te^{t}-3t^{2}e^{t}+t^{3}e^{t}\\ -e^{t}+te^{t}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\dfrac{(12e^{t}+t^{3}e^{2t}-3t^{2}e^{2t}+6te^{2t}-6e^{2t}-t^{3}-3t^{2}-6t-6)e^{-t}}{e^{t}+e^{-t}}\\ \left(-it\ln(1+ie^{t})+it\ln(1-ie^{t})-idilog(1+ie^{t})+idilog(1-ie^{t})\right)\cdot\dfrac{e^{t}+e^{-t}}{2}\\ (-6e^{t}+6te^{t}-3t^{2}e^{t}+t^{3}e^{t})\cdot e^{-t}\\ (-e^{t}+te^{t})\cdot e^{-t}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \dfrac{(12e^t+t^3e^{2t}-3t^2e^{2t}+6te^{2t}-6e^{2t}-t^3-3t^2-6t-6)e^{-t}}{e^t+e^{-t}} \\ -\dfrac{1}{2}i(e^t+e^{-t})(t\ln\big(i(-i+e^t)\big)-t\ln\big(-i(i+e^t)\big)+dilog(1+ie^t)-dilog(1-ie^t)) \\ -6+6t-3t^2+t^3 \\ -1+t \end{pmatrix}.$$

Обчислимо для $t \le 0$:

$$(G_2[f])(t) =$$

$$= X(t)\cdot\Big(\int_{-\infty}^{t} Q\cdot X^{-1}(s)\cdot f(s)\,ds - \int_{t}^{0}(E-Q)\cdot X^{-1}(s)\cdot f(s)\,ds + (E-Q)D^{+}\times\cdot$$

$$\times\Big[\int_{0}^{\infty}(E-P)\cdot X^{-1}(s)\cdot f(s)\,ds + \int_{-\infty}^{0} Q\cdot X^{-1}(s)\cdot f(s)\,ds\Big]\Big) =$$

$$=\begin{pmatrix} \dfrac{2}{e^t+e^{-t}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{e^t+e^{-t}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\times$$

$$\times\left(\int_{-\infty}^{t}\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \dfrac{e^s+e^{-s}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{2}{e^s+e^{-s}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^s \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} s^3\\ s\\ s^3\\ s \end{pmatrix}ds\,-\right.$$

$$-\int_{t}^{0}\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{e^s+e^{-s}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{e^s+e^{-s}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^s \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} s^3\\ s\\ s^3\\ s \end{pmatrix}ds+\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix}\cdot\left[\int_{0}^{\infty}\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \dfrac{e^s+e^{-s}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{2}{e^s+e^{-s}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^s \end{pmatrix}\times\right.$$

$$\times\begin{pmatrix} s^3 \\ s \\ s^3 \\ s \end{pmatrix} ds + \int_{-\infty}^{0}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{e^s+e^{-s}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{e^s+e^{-s}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^s \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} s^3 \\ s \\ s^3 \\ s \end{pmatrix} ds\Bigg]\Bigg).$$

Обчислимо перший інтеграл:

$$\int_{-\infty}^{t}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{e^s+e^{-s}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{e^s+e^{-s}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^s \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} s^3 \\ s \\ s^3 \\ s \end{pmatrix} ds = \int_{-\infty}^{t}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2s}{e^s+e^{-s}} \\ e^s s^3 \\ e^s s \end{pmatrix} ds =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -it\ln(1+ie^t) + it\ln(1-ie^t) - idilog(1+ie^t) + idilog(1-ie^t) \\ -6e^t + 6te^t - 3t^2e^t + t^3e^t \\ -e^t + te^t \end{pmatrix}.$$

Обчислимо другий інтеграл:

$$\int_{t}^{0}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{e^s+e^{-s}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{e^s+e^{-s}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^s \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} s^3 \\ s \\ s^3 \\ s \end{pmatrix} ds =$$

$$= \int_{t}^{0}\begin{pmatrix} \frac{s^3(e^s+e^{-s})}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} -\frac{12+t^3e^t-3t^2e^t+6te^t-6e^t-t^3e^{-t}-3t^2e^{-t}-6te^{-t}-6e^{-t}}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо третій інтеграл:

$$\int_0^{\infty}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{e^s+e^{-s}}{2}&0&0&0\\0&\frac{2}{e^s+e^{-s}}&0&0\\0&0&e^s&0\\0&0&0&e^s\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}s^3\\s\\s^3\\s\end{pmatrix}ds=$$

$$=\int_0^{\infty}\begin{pmatrix}0\\\dfrac{2s}{e^s+e^{-s}}\\0\\0\end{pmatrix}ds=\begin{pmatrix}0\\2Catalan\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Обчислимо четвертий інтеграл:

$$\int_{-\infty}^{0}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{e^s+e^{-s}}{2}&0&0&0\\0&\frac{2}{e^s+e^{-s}}&0&0\\0&0&e^s&0\\0&0&0&e^s\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}s^3\\s\\s^3\\s\end{pmatrix}ds=\int_{-\infty}^{0}\begin{pmatrix}0\\\frac{2s}{e^s+e^{-s}}\\e^s s^3\\e^s s\end{pmatrix}ds=$$

$$=\begin{pmatrix}0\\-2Catalan\\-6\\-1\end{pmatrix}.$$

Тоді:

$$(G_2[f])(t)=$$

$$=\begin{pmatrix}\dfrac{2}{e^t+e^{-t}}&0&0&0\\0&\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}&0&0\\0&0&e^{-t}&0\\0&0&0&e^{-t}\end{pmatrix}\times$$

$$\times\left(\begin{pmatrix}0\\-it\ln(1+ie^t)+it\ln(1-ie^t)-idilog(1+ie^t)+idilog(1-ie^t)\\-6e^t+6te^t-3t^2e^t+t^3e^t\\-e^t+te^t\end{pmatrix}-\right.$$

$$-\begin{pmatrix} -\frac{12+t^3e^t-3t^2e^t+6te^t-6e^t-t^3e^{-t}-3t^2e^{-t}-6te^{-t}-6e^{-t}}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 2Catalan \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2Catalan \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \Bigg) = \begin{pmatrix} \frac{2}{e^t+e^{-t}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e^t+e^{-t}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \left(\begin{pmatrix} \frac{12+t^3e^t-3t^2e^t+6te^t-6e^t-t^3e^{-t}-3t^2e^{-t}-6te^{-t}-6e^{-t}}{2} \\ -it\ln(1+ie^t)+it\ln(1-ie^t)-idilog(1+ie^t)+idilog(1-ie^t) \\ -6e^t+6te^t-3t^2e^t+t^3e^t \\ -e^t+te^t \end{pmatrix} + \right.$$

$$\left. + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{2}{e^t+e^{-t}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e^t+e^{-t}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \frac{12+t^3e^t-3t^2e^t+6te^t-6e^t-t^3e^{-t}-3t^2e^{-t}-6te^{-t}-6e^{-t}}{2} \\ -it\ln(1+ie^t)+it\ln(1-ie^t)-idilog(1+ie^t)+idilog(1-ie^t) \\ -6e^t+6te^t-3t^2e^t+t^3e^t \\ -e^t+te^t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{(12e^t+t^3e^{2t}-3t^2e^{2t}+6te^{2t}-6e^{2t}-t^3-3t^2-6t-6)e^{-t}}{2} \\ \left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right) \cdot \left(-it\ln(1+ie^t)+it\ln(1-ie^t)-idilog(1+ie^t)+idilog(1-ie^t)\right) \\ e^{-t}(-6e^t+6te^t-3t^2e^t+t^3e^t) \\ e^{-t}(-e^t+te^t) \end{pmatrix}.$$

Після того, як було знайдено оператор Гріна для $t \geq 0$ та $t \leq 0$, можна виписати обмежені на пів осях розв’язки:

$$x_1(t,c) = X(t) \cdot P \cdot P_Q \cdot c + (G_1[f])(t),$$

де

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix},$$

$$x(t,c) =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{e^t+e^{-t}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e^t+e^{-t}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \frac{(12e^t+t^3e^{2t}-3t^2e^{2t}+6te^{2t}-6e^{2t}-t^3-3t^2-6t-6)e^{-t}}{e^t+e^{-t}} \\ -\frac{1}{2}i(e^t+e^{-t})\left(t\ln\left(i(-i+e^t)\right) - t\ln\left(-i(i+e^t)\right) + dilog(1+ie^t) - dilog(1-ie^t)\right) \\ -6+6t-3t^2+t^3 \\ -1+t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2c_1}{e^t+e^{-t}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \frac{(12e^t+t^3e^{2t}-3t^2e^{2t}+6te^{2t}-6e^{2t}-t^3-3t^2-6t-6)e^{-t}}{e^t+e^{-t}} \\ -\frac{1}{2}i(e^t+e^{-t})\left(t\ln\left(i(-i+e^t)\right) - t\ln\left(-i(i+e^t)\right) + dilog(1+ie^t) - dilog(1-ie^t)\right) \\ -6+6t-3t^2+t^3 \\ -1+t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2c_1+12+t^3e^t-3t^2e^t+6te^t-6e^t-t^3e^{-t}-3t^2e^{-t}-6te^{-t}-6e^{-t}}{e^t+e^{-t}} \\ -\frac{1}{2}i(e^t+e^{-t})\left(t\ln\left(i(-i+e^t)\right) - t\ln\left(-i(i+e^t)\right) + dilog(1+ie^t) - dilog(1-ie^t)\right) \\ -6+6t-3t^2+t^3 \\ -1+t \end{pmatrix}.$$

$$x_1(t,c) = X(t) \cdot P \cdot P_Q \cdot c + (G_2[f])(t) =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{e^t+e^{-t}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e^t+e^{-t}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} \dfrac{(12e^{t}+t^{3}e^{2t}-3t^{2}e^{2t}+6te^{2t}-6e^{2t}-t^{3}-3t^{2}-6t-6)e^{-t}}{2} \\ \left(\dfrac{e^{t}+e^{-t}}{2}\right)\cdot\left(-it\ln(1+ie^{t})+it\ln(1-ie^{t})-idilog(1+ie^{t})+idilog(1-ie^{t})\right) \\ e^{-t}(-6e^{t}+6te^{t}-3t^{2}e^{t}+t^{3}e^{t}) \\ e^{-t}(-e^{t}+te^{t}) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{2c_1}{e^{t}+e^{-t}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix} \frac{(12e^{t}+t^{3}e^{2t}-3t^{2}e^{2t}+6te^{2t}-6e^{2t}-t^{3}-3t^{2}-6t-6)e^{-t}}{2} \\ \left(\frac{e^{t}+e^{-t}}{2}\right)\cdot\left(-it\ln(1+ie^{t})+it\ln(1-ie^{t})-idilog(1+ie^{t})+idilog(1-ie^{t})\right) \\ e^{-t}(-6e^{t}+6te^{t}-3t^{2}e^{t}+t^{3}e^{t}) \\ e^{-t}(-e^{t}+te^{t}) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \dfrac{2c_1+12+t^{3}e^{t}-3t^{2}e^{t}+6te^{t}-6e^{t}-t^{3}e^{-t}-3t^{2}e^{-t}-6te^{-t}-6e^{-t}}{e^{t}+e^{-t}} \\ -\dfrac{1}{2}i(e^{t}+e^{-t})\left(t\ln\left(i(-i+e^{t})\right)-t\ln\left(-i(i+e^{t})\right)+dilog(1+ie^{t})-dilog(1-ie^{t})\right) \\ -6+6t-3t^{2}+t^{3} \\ -1+t \end{pmatrix}.$$

ВИСНОВКИ

У кваліфікаційній роботі розглянуто задачу на побудову обмежених на всій осі розв’язків лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь. Задача була розв’язана з використанням псевдообернених матриць.

Для розв’язання задачі необхідно було використати теоретичний матеріал про диференціальні рівняння, псевдообернену матрицю та нормальну фундаментальну матрицю. Теоретичний матеріал було наведено в першому та другому розділі кваліфікаційної роботи. Ці розділи містять основні поняття, теореми та формули, які використовувалися під час розв’язання задачі.

Під час розв’язання задачі було зроблено:

- побудовано нормальну фундаментальну матрицю;
- обчислена псевдообернена матриця;
- знайдено ортопроектори;
- знайдено оператор Гріна;
- побудовано обмежені на всій осі розв’язки лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Копась І. М. Диференціальні рівняння : навч. посіб. для студ. спеціальності 131 «Прикладна механіка». Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. 126 с.

2. Гой Т. П., Махней О. В. Диференціальні рівняння : навчальний посібник. Івано-Франківськ : Сімик, 2012. 352 с.

3. Бурим В. М., Кривошея С. А., Перестюк М. О. Диференціальні та інтегральні рівняння. Київ : Либідь, 2004. 408 с.

4. Кривошея С. А., Перестюк М. О., Самойленко А. М. Диференціальні рівняння у задачах. Київ : Либідь, 2003. 504 с.

5. Парасюк І. О., Перестюк М. О., Самойленко А. М. Диференціальні рівняння. Київ : Либідь, 2003. 600 с.

6. Лейфура В. М., Самусенко П. Ф., Шкіль М. І. Диференціальні рівняння. Київ : Техніка, 2003. 368 с.

7. Васильченко Г. С., Герасимчук В. С., Кравцов В. І. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах. Невизначений, визначений та невласні інтеграли. Звичайні диференціальні рівняння. Прикладні задачі : навчальний посібник. Київ, 2010. 470 с.

8. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика : навчальний посібник. Київ : Ігнатекс, 2011. 648 с.

9. Дрінь І. І., Івасишен С. Д., Лавренчук В. П., Настасієв П. П. Диференціальні рівняння: методи та застосування : навчальний посібник. Чернівці : Чернівецький національний університет, 2010. 288 с.

10. Бойчук А. А. Ограниченные решения линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве : статья. Бойчук А. А. доктор ф. -м. наук : Київ, 2006. 14 с.

11. Бурим В. М., Кривошея С. А., Перестюк М. О. Диференціальні та інтегральні рівняння. Київ : Либідь, 2004. 408 с.

12. Гальченко Д. О. Реалізація компетентнісного підходу в навчанні диференціальних рівнянь студентів математичних спеціальностей : стаття. Гальченко Д. О. канд. пед. наук : Черкаси, 2015. 20 с.

13. Моторіна В. Г., Прокопенко А. І., Пуди А. Ю., Стогній Н. П. Диференціальні рівняння : навчально-методичний посібник для студ. природ.-мат. спец. Харків : ХНПУ ім. Г. С. Сковороди, 2012. 210 с.

14. Першина Ю. І., Потаніна Т. В. Операційне числення : навчальний посібник. Харків : НТУ, 2012. 72 с.

15. Гой Т. П., Копач М. І., Федак І. В. Наближені методи розв’язування диференціальних рівнянь : навчальний посібник для студентів напрямів підготовки «математика» та «прикладна математика». Івано-Франківськ : видавничо-дизайнерський відділ Центру інформаційних технологій Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника, 2010. 152 с.

16. Гой Т. П., Махней О. В. Практикум з диференціальних рівнянь. Диференціальні рівняння першого порядку : навчальний посібник. Івано-Франківськ : Голіней, 2017. 116 с.

17. Мельниченко О. П., Шевченко Р. Л. Елементи вищої алгебри : навчально-методичний посібник для самостійного вивчення за кредитно-модульною технологією навчання для студентів економічного факультету. Біла Церква, 2010. 40 с.

18. Зражевська В. Ф., Карнаухова Т. В., Могильова В. В. Диференціальні рівняння та системи. Методичні вказівки та варіанти завдань для типового розрахунку з вищої математики. Київ : НТУУ, 2014. 80 с.