

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра фундаментальної та прикладної математики

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА

на тему: «ІТЕРАЦІЙНІ СХЕМИ РОЗВ'ЯЗАННЯ
ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ФРЕДГОЛЬМА ДРУГОГО РОДУ
КВАДРАТУРНИМ МЕТОДОМ»

Виконала: студентка 2 курсу, групи 8.1111

спеціальності 111 математика
(шифр і назва спеціальності)

освітньої програми математика
(назва освітньої програми)

Є. О. Кончинська

(ініціали та прізвище)

Керівник завідувач кафедри фундаментальної та прикладної
математики, професор, д.т.н. Гребенюк С.М.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Рецензент декан математичного факультету, професор, д.т.н.
Гоменюк С.І.
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Запоріжжя
2022

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет математичний

Кафедра фундаментальної та прикладної математики

Рівень вищої освіти магістр

Спеціальність 111 математика

(шифр і назва)

Освітня програма математика

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри
фундаментальної та прикладної
математики, професор, д.т.н.

Гребенюк С.М.

(підпис)

« _____ » _____ 2022 р.

ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТЦІ

Кончинській Єлизаветі Олександрівні

(прізвище, ім'я та по-батькові)

1. Тема роботи (проекту) Ітераційні схеми розв'язання інтегральних рівнянь
Фредгольма другого роду квадратурним методом

керівник роботи (проекту) Гребенюк Сергій Миколайович, доцент, д.т.н.
(прізвище, ім'я та по-батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затвердені наказом ЗНУ від « _____ » _____ 2022 року № _____

2. Строк подання студентом роботи _____

3. Вихідні дані до роботи 1. Постановка задачі.
2. Перелік літератури.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)

1. Основні поняття та властивості інтегральних рівнянь

2. Квадратурні методи розв'язання інтегральних рівнянь

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень) _____

Презентація

6. Консультанти розділів роботи

| Розділ | Прізвище, ініціали та посада консультанта | Підпис, дата | |
|--------|---|----------------|------------------|
| | | завдання видав | завдання прийняв |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

7. Дата видачі завдання _____

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

| № | Назва етапів кваліфікаційної роботи | Строк виконання етапів роботи | Примітка |
|----|---|-------------------------------|----------|
| 1. | Розробка плану роботи. | 02.05.2022-22.05.2022 | |
| 2. | Збір вихідних даних. | 22.05.2022-30.06.2022 | |
| 3. | Обробка методичних та теоретичних джерел. | 01.09.2022-25.09.2022 | |
| 4. | Розробка першого розділу. | 26.09.2022-16.10.2022 | |
| 5. | Розробка другого розділу. | 17.10.2022-20.11.2022 | |
| 6. | Оформлення та нормоконтроль кваліфікаційної роботи. | 21.11.2022-27.11.2022 | |
| 7. | Захист кваліфікаційної роботи. | 14.12.2022 | |

Студент _____
(підпис)Є. О. Кончинська
(ініціали та прізвище)Керівник роботи _____
(підпис)С. М. Гребенюк
(ініціали та прізвище)**Нормоконтроль пройдено**

Нормоконтролер _____

О. Г. Спиця

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра «Ітераційні схеми розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду квадратурним методом»: 69 с., 6 рис., 9 джерел.

ІНТЕГРАЛЬНЕ РІВНЯННЯ, ІТЕРАЦІЯ, КВАДРАТУРНІ ФОРМУЛИ, ПРАВИЛО РУНГЕ, РІВНЯННЯ ФРЕДГОЛЬМА, ФОРМУЛА ПРЯМОКУТНИКІВ, ФОРМУЛА СІМПСОНА, ФОРМУЛА ТРАПЕЦІЙ.

Об'єкт дослідження – квадратурний метод розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду.

Мета роботи: розробити ітераційні схеми розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду квадратурним методом.

Метод дослідження – аналітичний, чисельний, порівняльний.

У роботі наведено визначення та класифікацію інтегральних рівнянь. Докладніше розглянуто інтегральні рівняння Фредгольма і Вольтера. Описано основні методи їх розв'язання. Докладно викладено основні співвідношення для квадратурного методу розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду. Розглянуто квадратурні формули, які дозволяють розв'язувати такі інтегральні рівняння, а саме квадратурні формули Гауса, Сімпсона, трапецій, прямокутників та їх властивості, наведено принцип Рунге оцінки практичної похибки квадратурних формул. Розроблено ітераційну процедуру уточнення розв'язків інтегральних рівнянь на основі застосування принципу Рунге до обчислення інтегралів. Були наведені приклади розв'язання задач за допомогою розробленого підходу, проведено порівняння розв'язків для різних квадратурних формул.

SUMMARY

Master's Qualification Thesis: "Iterative schemes for solving Fredholm integral equations of the second kind by the quadrature method": 69 pages, 6 figures, 9 sources.

INTEGRAL EQUATION, ITERATION, QUADRATURE FORMULAS, RUNGE'S RULE, FREDHOLM EQUATION, FORMULA OF RECTANGLES, SIMPSON'S FORMULA, FORMULA OF TRAPEZOIDS.

Object of study – quadrature method for solving Fredholm integral equations of the second kind.

Purpose: to develop iterative schemes for solving Fredholm integral equations of the second kind by the quadrature method.

Research methods – analytical, numerical, comparative.

In the work the definition and classification of integral equations are given. The integral equations of Fredholm and Volterra are considered in more detail. The basic methods of their solution are described. The basic relations for the quadrature method of solving Fredholm's integral equations of the second kind are stated in detail. The quadrature formulas that allow solving such integral equations, namely the quadrature formulas of Gauss, Simpson, trapezoids, rectangles and their properties are considered, Runge's principle of estimating the practical error of quadrature formulas is given. An iterative procedure for refining solutions of integral equations based on the application of Runge's principle to the calculation of integrals was developed. Examples of solving problems using the developed approach were given, solutions for different quadrature formulas were compared.

ЗМІСТ

| | |
|--|----|
| Завдання на кваліфікаційну роботу..... | 2 |
| Реферат | 4 |
| Summary | 5 |
| Вступ..... | 7 |
| 1 Інтегральні рівняння та їх властивості..... | 9 |
| 1.1 Означення та класифікація інтегральних рівнянь | 9 |
| 1.2 Задачі, які приводять до інтегральних рівнянь..... | 13 |
| 1.3 Квадратурні формули розв'язання інтегральних рівнянь | 15 |
| 1.3.1 Метод простої ітерації (Адомьяна) | 16 |
| 1.3.2 Квадратурні формули інтерполяційного типу | 18 |
| 1.3.3 Елементарні формули трапецій, середніх прямокутників і Сімпсона | 22 |
| 1.3.4 Складені формули трапецій, середніх прямокутників і Сімпсона ... | 26 |
| 1.3.5 Побудова формул Ньютона-Котеса методом невизначених коефіцієнтів | 28 |
| 1.3.6 Квадратурні формули Гауса | 32 |
| 1.4 Правило Рунге практичної оцінки похибки квадратурних формул | 37 |
| 2 Застосування квадратурного методу при розв'язанні інтегральних рівнянь Фредгольма II роду | 43 |
| 2.1 Квадратурний метод для лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду з оцінкою похибки за правилом Рунге | 43 |
| 2.2 Приклади застосування квадратурних формул для розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду..... | 50 |
| Висновки..... | 68 |
| Перелік посилань | 69 |

ВСТУП

Інтегральні рівняння є одним із напрямів математики, що розвивається найшвидше. Якщо шукана функція входить у рівняння зі знаком інтеграла, рівняння називається інтегральним.

При вирішенні математичних, технічних і фізичних задач часто виникає необхідність обчислення певних інтегралів. Тільки в деяких випадках ми можемо отримати аналітичну формулу для обчислення вихідної інтегральної функції, тому найчастіше використовуються методи чисельного інтегрування.

Теорія інтегральних рівнянь, тобто рівняння невідомої функції під символом інтеграла, займає важливе місце в математичному аналізі і має важливе теоретичне і прикладне значення. Хоча окремі інтегральні рівняння зустрічалися в першій половині XIX століття, теорія їх систем була розроблена приблизно на межі XIX і XX століть. У працях італійського математика Вольтера, шведського математика Фреда Хольма, Д. Гільберта та інших математиків. Цей напрямок має давню історію, бере початок від Д. Бернуллі.

У даній кваліфікаційній роботі були розглянуті наступні ортогональні ітераційні схеми для чисельного інтегрування: простий ітераційний метод, квадратурні формули інтерполяційного типу, метод коефіцієнта невизначеності.

Актуальність теми кваліфікаційної роботи полягає в тому, що при розв'язуванні деяких математичних, фізичних чи технічних задач використовуються визначені інтеграли від функцій, вихідні функції яких не виражаються через елементарні функції. Крім того, у деяких задачах необхідно мати справу з визначеними інтегралами, де інтегральна функція сама по собі не є елементарною функцією. Це призводить до необхідності розробки наближених схем обчислення визначених інтегралів.

Об'єктом дослідження є загальна теорія системи інтегральних рівнянь, а предметом дослідження – розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма II роду за допомогою квадратурних формул.

Метою даної роботи є аналіз схеми розв'язування інтегральних рівнянь Фредгольма II роду при застосуванні найбільш поширених методів наближення визначеного інтеграла: методу прямокутників, трапецій та Сімпсона.

Виходячи з мети, визначені основні завдання дослідження, а саме:

- розгляд властивостей інтегральних рівнянь та схем чисельного інтегрування;
- застосування розглянутих схем чисельного інтегрування до розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма II роду.

Робота складається з двох основних розділів. Перший розділ містить теоретичні відомості стосовно властивостей інтегральних рівнянь першого та другого типів, які безпосередньо використовуються у подальших розділах, а також формулювання квадратурно-ітераційних методів розв'язання інтегральних рівнянь, які пов'язані із умовами існування розв'язків такого типу рівнянь. Другий розділ присвячено застосуванню схем чисельного інтегрування для знаходження розв'язків інтегральних рівнянь Фредгольма II роду квадратурним методом.

1 ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТА ЇХ ВЛАСТИВСТІ

1.1 Означення та класифікація інтегральних рівнянь

Інтегральним рівнянням називають рівняння, яке містить шукану функцію під знаком інтеграла.

Нехай $F(x)$ та $K(x, y)$ – відомі функції. Інтегральні рівняння мають вигляд

$$F(x) = \int_a^b K(x, y)f(y)dy \quad (1.1)$$

або

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, y)f(y)dy \quad (1.2)$$

де $\lambda \in (\mathbb{C} \vee \mathbb{R})$ – чисельний множник.

Функція $K(x, y)$ під інтегралом називається ядром інтегрального рівняння.

Розв'язком інтегрального рівняння називають функцію, яка перетворює це рівняння у тотожність.

Інтегральне рівняння є лінійним, якщо невідома функція входить під знак інтеграла лінійно. Обидва рівняння (1.1) та (1.2) є лінійними.

Яскравим прикладом перших відомих інтегральних рівнянь, пов'язаних з інтегральними перетвореннями, можна назвати рівняння, які визначають перетворення Фур'є

$$\Phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \varphi(t) dt, \quad t \in R,$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \Phi(\omega) d\omega.$$

Ядром цього рівняння є вираз $\frac{1}{2\pi} e^{-ixy}$.

Важливе місце у розв'язанні задач механіки займають парні інтегральні рівняння. У випадку однієї незалежної змінної такі рівняння можна представити і вигляді

$$a\varphi(t) - \int_{-\infty}^{\infty} K_1(t-s)\varphi(s)ds = f(t); \quad t > 0,$$

$$b\varphi(t) - \int_{-\infty}^{\infty} K_2(t-s)\varphi(s)ds = f(t); \quad t < 0,$$

де a і b – сталі.

Якщо розглядати одне з рівнянь, як інтегральне рівняння відносно невідомої функції, то інше рівняння дає розв'язок цього рівняння, як інтеграл від відомої функції (первісне перетворення).

Інтегральні рівняння поділяють на рівняння I роду та рівняння II роду.

Інтегральними рівняннями першого роду називають рівняння виду:

$$\int_a^b K(t,s)\varphi(s)ds = f(t).$$

Інтегральним рівнянням другого роду називають рівняння виду:

$$\varphi(t) - \lambda \int_a^b K(t,s)\varphi(s)ds = f(t).$$

Тут $K(t, s)$, $f(t)$ – задані функції, λ – заданий параметр рівняння, $\varphi(t)$ – шуканий розв’язок. Функції $K(t, s)$ та $f(t)$ називаються ядром і вільним членом інтегрального рівняння.

Одним з найважливіших класів таких рівнянь є лінійні інтегралі рівняння Фредгольма та рівняння Вольтера. Серед них виділяють рівняння Фредгольма першого роду

$$\int_a^b K(x, s)y(s)ds = f(x) \quad (1.3)$$

та рівняння Фредгольма другого роду

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, s)y(s)ds + f(x) \quad (1.4)$$

де $y(x)$ – шукана функція, $K(x, s)$ – задана у квадраті

$$Q = \{(x, s): a \leq x \leq b, a \leq s \leq b\}$$

Функція, яку називають ядром рівняння, $f(x)$ – задана на проміжку $[a, b]$ функція, яку називають вільним членом рівняння, λ – параметр (дійсний або комплексний). При цьому числа a, b можуть бути й невласними, а проміжок інтегрування – нескінченними.

Якщо у рівняннях (1.3), (1.4) $f(x) \equiv 0$, то ці рівняння називають однорідними, інакше – неоднорідними.

Ще одним із важливих класів лінійних інтегральних рівнянь є лінійні інтегральні рівняння Вольтера:

$$\int_a^x K(x, s)y(s)ds = f(x), \quad a \leq x \leq b,$$

$$y(x) = \lambda \int_a^x K(x, s)y(s)ds + f(x), \quad a \leq x \leq b,$$

Першого та другого роду відповідно, ядра яких $K(x, s)$ неперервні у трикутнику $\Delta = \{(x, s): a \leq s \leq x \leq b\}$ або задовольняють умову

$$\iint_{\Delta} |K(x, s)|^2 dx ds < \infty.$$

Нелінійним інтегральним рівнянням називають інтегральне рівняння, в яке невідома функція входить лінійно. Нелінійні інтегральні рівняння дуже різноманітні, тому провести їх повну класифікацію практично неможливо, тому виділимо три найпоширеніші класи таких рівнянь:

$$\int_a^b K(x, s, y(s))ds = f(x), \quad y(x) = \lambda \int_a^b K(x, s, y(s))ds + f(x),$$

які називаються інтегральними рівняннями Урисуна першого та другого роду відповідно;

$$\int_a^b K(x, s)F(s, y(s))ds = f(x),$$

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, s)F(s, y(s))ds + f(x),$$

це інтегральні рівняння Гаммерштейна першого та другого роду відповідно;

$$\int_a^x K(x, s, y(s))ds = f(x), \quad a \leq x \leq b,$$

$$y(x) = \lambda \int_a^x K(x, s, y(s)) ds + f(x), \quad a \leq x \leq b,$$

називаються нелінійними інтегральними рівняннями Вольтера першого та другого роду відповідно.

1.2 Задачі, які приводять до інтегральних рівнянь

Однією з перших задач, яка привела до інтегральних рівнянь, була задача про пошук функції $f(x)$ за її перетворенням Фур'є

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} f(y) dy, \quad (1.7)$$

де $i = \sqrt{-1}$ – комплексна одиниця. Розв'язок $f(y)$ рівняння (1.7) у 1811 р. отримав французький математик Ж. Фур'є як:

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} F(x) dx. \quad (1.8)$$

Вважають, що формула (1.7) визначає розв'язок інтегрального рівняння (1.8) в якому $f(y)$ – задана, а $F(x)$ – шукана функція.

Також до інтегрального рівняння

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \quad (1.9)$$

зводиться задача Коші

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

де $f(x, y)$ – неперервна функція у деякому прямокутнику з центром (x_0, y_0) .

Інтегральне рівняння (1.9) є окремим випадком нелінійного інтегрального рівняння Вольтера другого роду.

У 1823 році, узагальнюючи задачу про таутохрону криву, сповзаючи по якій без тертя, тіло досягає найнижчої точки за один і той же час, незалежно від початкового положення, Абель отримав рішення

$$\int_0^x \frac{y(s)}{\sqrt{x-s}} ds = f(x).$$

Це рівняння є окремим випадком лінійного інтегрального рівняння Вольтера першого роду.

Задача Абеля стала першою задачею фізики, для розв'язання якої була необхідність розглядати інтегральні рівняння.

До інтегральних рівнянь приводять не лише задачі з механіки, а й проблеми в інших галузях науки. Наприклад, при вирішенні задачі з математичної екології про поширення епідемій приходять до інтегрального рівняння

$$y(x) = \left(P(x) - \int_{-\infty}^x A(x-s)y(s)ds \right) \int_{-\infty}^x a(x-s)y(s)ds,$$

яке є ще недостатньо дослідженим.

1.3 Квадратурні формули розв'язання інтегральних рівнянь

Чисельні методи розв'язування інтегральних рівнянь є найбільш загальними і найбільш придатними для комп'ютерних розрахунків. Їх побудова заснована на заміні інтеграла в інтегральному рівнянні скінченною сумою на основі будь-якої квадратурної формули, в результаті чого задача зводиться до алгебраїчної системи відносно дискретних значень (каркаса) шуканого рішення. Цей метод називається квадратурним методом або методом скінченної суми. Вони прості за ідеєю та реалізацією без будь-яких змін, їх також можна застосувати до нелінійних інтегральних рівнянь, майже на увазі, що в цьому випадку скінченновимірною системою порядку, до якої призведе дискретизація, також буде нелінійною.

Розглянемо інтегральні рівняння другого роду, оскільки існування та єдиність розв'язків для них довести легше, ніж існування та єдиність розв'язків рівнянь першого роду. Для наближеного розв'язування інтегральних рівнянь II роду використовується наближене відображення інтегралів у цих рівняннях, що дає змогу звести задачу до розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь. У результаті розв'язання такої системи можна отримати коефіцієнти розкладання наближеного розв'язку певної функціональної системи, або наближене значення функціонального розв'язку в певній множині точок. Першу групу методів традиційно називають обчислювально-аналітичними. Чисто обчислювальними методами називаються методи, які здатні отримати лише числові характеристики рішення без прив'язки до якоїсь додаткової функціональної системи. При застосуванні обчислювальних методів завжди слід пам'ятати про коректність поставленої задачі в зазначеному вище розумінні.

1.3.1 Метод простої ітерації (Адомяна)

Обчислювально-аналітичний метод, обґрунтування використання методу Дж. Адомяном надає рішення різноманітних інженерних задач на основі ряду рішень, виражених у вигляді розкладання функцій, кожен наступний елемент якого досягається шляхом попереднього застосування інтегрального оператора рівняння.

Пояснимо застосування цього методу на прикладі. Нехай у нас буде таке інтегральне рівняння Вольтера другого роду:

$$\varphi(t) = f(t) + \int_a^t K(t,s)\varphi(s)ds, \quad t \in [a, b].$$

Введемо позначення

$$\varphi_k(t) = f(t) + \int_a^t K(t,s)\varphi_{k-1}(s)ds, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\psi_0 = f(t), \psi_{k+1}(t) = \int_a^t K(t,s)\psi_k(s)ds.$$

Тоді, формально

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(t).$$

Цей ряд збіжний, якщо $f(t)$ є неперервною на $[a; b]$, а ядро $K(t, s)$ є неперервним у трикутнику $a \leq s \leq t \leq b$. Причому, якщо позначити

$$N = \max_{a \leq t \leq b} |f(t)|, \quad M = \max_{a \leq s \leq t \leq b} |K(t, s)|,$$

матимемо

$$|\psi_k(t)| \leq \frac{NM^k(a-b)^k}{k!}.$$

Наближенням розв'язком рівняння будемо вважати часткову суму ряду

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=0}^n \psi_k(t),$$

матимемо оцінку

$$|\varphi(t) - \varphi_n(t)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \psi_k(t) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{NM^k(a-b)^k}{k!}.$$

Отже, для вказаних обмежень метод простої ітерації буде збіжним. Швидкість збіжності залежить від властивостей ядра й правої частини рівняння.

Для спрощення обчислень інтеграл замінюють на наближену суму. Наприклад, якщо використовувати рівномірну сітку розбиття з кроком h , метод трапецій для наближення інтеграла, то, позначивши $K_{ij} = K(t_i, t_j)$, $\psi_{ki} = \psi_k(t_i)$, отримаємо

$$\begin{aligned} \psi_{k+1}(t_i) &= \int_0^{t_i} K(t_i, s)\psi_k(s)ds \approx \\ &\approx \frac{h}{2} [K_{i0}\psi_{k0} + 2(K_{i1}\psi_{k1} + K_{i2}\psi_{k2} + \dots + K_{i,i-1}\psi_{k,i-1}) + K_{ii}\psi_{ki}] = \\ &= \tilde{\psi}_{k+1,i}, \quad i = 0, 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (1.10)$$

За обчисленими значеннями $\tilde{\psi}_{k,i}$ наближені значення розв'язку в точках t_i визначатимуть так:

$$\varphi_{ni} = \sum_{k=0}^n \tilde{\psi}_{k,i}.$$

Як умову завершення ітераційного процесу застосовують умову:

$$\frac{\|\varphi_k - \varphi_{k-1}\|}{\|\varphi_k\|} \leq \varepsilon,$$

де $\|\varphi\| = \max_{a \leq t \leq b} |\varphi(t)|$.

Звичайно, застосувавши таке досить просте інженерне рішення, вивчення інтегральних рівнянь не обмежується інтегральним рівнянням Вольтера.

Лінійні інтеграли та інтегральні диференціальні рівняння можна розв'язувати за допомогою таких самих принципів. У кожному випадку, однак, умови збіжності для функціональних рядів, які використовуються для вирішення рівнянь, повинні бути встановлені та перевірені.

1.3.2 Квадратурні формули інтерполяційного типу

Якщо як апроксимуючу функцію використати інтерполяційний поліном Лагранжа $L_n(x)$. Потім можна замінити шуканий інтеграл на лінійну комбінацію значень інтегральної функції $f(x)$:

$$I = \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n c_i f(x_i) + R = \sum_{i=1}^n c_i f_i + R. \quad (1.11)$$

Виписане відношення називається квадратурною формулою (або скорочено квадратурою), де величина x_i називається вузлом, c_i – вагою, а R – похибкою (залишковим членом).

Таким чином, інтеграли наближено замінюються інтегральними сумами, де вузли та ваги не залежать від $f(x)$.

Розглянемо квадратуру (1.11) детальніше. Нехай вузли x_i утворюють рівномірну сітку з кроком h : $x_{i+1} = x_i + h$, $i = \overline{1, n}$. Якщо межі інтегрування a і b входять до складу сітки, то $h = \frac{b-a}{n-1}$ і

$$x_1 = a, x_i = x_1 + (i-1)h, x_n = b.$$

У цьому випадку формула (1.11) називається замкнутою формою і має не менше ніж два вузла. Початковий сегмент інтегрування ділиться на $n-1$ підсегментів довжиною h .

Якщо a і b не є частинами сітки, тоді $h = \frac{b-a}{n+1}$ та $x_i = a + ih$. Тоді формула (1.11) називається відкритою формулою і може мати один вузол. Кількість підвідрізків дорівнює $n+1$. Якщо одне з a або b включено в сітку, відповідні квадратури називають напіввідкритими (або напівзакритими).

Замінімо $f(x)$ на поліном Лагранжа $L_n(x)$, що інтерполює $f(x)$ у точках (x_i, f_i) на відрізку $[a; b]$:

$$f(x) = L_n(x) = \sum_{i=1}^n f_i l_i(x) + \frac{\omega_n(x)}{n!} f^{(n)}(\xi), \xi \in [a; b],$$

де $\omega_n(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n)$ та

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_1)(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}.$$

Функції $l_i(x)$ називають фундаментальними поліномами Лагранжа. Підставивши виписане наближене представлення $f(x)$ до (1.11), одержимо

$$I = \sum_{i=1}^n \left(\int_a^b l_i(x) dx \right) f_i + \int_a^b \frac{\omega_n(x)}{n!} f^{(n)}(\xi) dx = (b-a) \sum_{i=1}^n c_i f_i + R, \quad (1.12)$$

де

$$c_i = \frac{1}{b-a} \int_a^b l_i(x) dx, \quad R = \frac{1}{n!} \int_a^b \omega_n(x) f^{(n)}(\xi) dx.$$

Якщо сітка $\{x_i\}$ нерівномірна, то формулу (1.12) називають інтерполяційною квадратурною формулою. Якщо (в даному випадку) сітка однорідна, то формули типу (1.12) називаються квадратурними формулами Ньютона-Котеса, а ваги c_i – вагами Котеса. Легко побачити, що ваги, відповідні до вузлів, симетричних відносно середини відрізка, рівні. Крім того, $\sum_{i=1}^n c_i = 1$, оскільки формула (1.12) є точною для $f(x) \equiv 1$.

Кажуть, що квадратура (1.11) має алгебраїчний порядок точності p , якщо її залишковий член R дорівнює нулю для всіх алгебраїчних поліномів ступеня, меншого або рівного p .

Оскільки поліном Лагранжа L_n є алгебраїчним поліномом ступеня $n - 1$, побудувавши формули (1.12) алгебраїчного порядку точності не нижче $n - 1$. Однак, якщо n непарне, тобто коли середина відрізка $[a; b]$ є частиною сітки, то формула (1.12) також є точною для поліномів ступеня n .

Справді, при непарному n один з вузлів сітки збігається із серединою відрізка інтегрування $\bar{x} = (a + b)/2$, а інші вузли лежать симетрично відносно \bar{x} . Розглянемо поліном $q(x) = (x - \bar{x})^n$. Цей поліном є непарним відносно \bar{x} ; отже

$$\int_a^b q(x) = 0, \quad \sum_{i=1}^n c_i q_i = 0.$$

Звідси $R = 0$, тобто формула (1.12) точна для $q(x)$. Покажемо, що ця формула точна й для будь-якого полінома $p_n(x)$ степеня n :

$$p_n(x) = a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \dots + a_n x + a_{n+1}.$$

Для цього представимо $p_n(x)$ у вигляді

$$p_n(x) = a_1(x - \bar{x})^n + p_{n-1}(x) = a_1 q(x) + p_{n-1}(x)$$

і підставимо його до (1.12). Оскільки формула (1.12) за побудовою точна для $p_{n-1}(x)$ і точна для $q(x)$, то вона точна й для $p_n(x)$.

Основна похибка формули Ньютона-Котеса з n вузлами, за умови, що $f(x)$ достатньо гладка, порядок $O(h^{2[\frac{n-1}{2}]+3})$, де $[\cdot]$ – ціла частина. Порядок по h головного члена помилки називається порядком точності (збіжності) квадратурної формули.

Для формул закритої форми коефіцієнт Котеса c_i додатний для $1 \leq n \leq 8$, а для $n = 9$ та $n \geq 11$ від'ємне, що призводить до збільшення похибки, що міститься у $f(x)$.

Нехай помилка визначення функції $f(x)$ у кожному вузлі сітки оцінюється зверху за модулем деякого значення ε . Можемо отримати помилку у сумі $\sum c_i f_i$, можна оцінити за значенням $\varepsilon \sum |c_i|$.

Коефіцієнт збільшення похибки описується такими цифрами:

$$\begin{aligned} \sum |c_i| &\approx 1,45, \quad n = 9; & \sum |c_i| &\approx 3,1, \quad n = 11; \\ \sum |c_i| &\approx 8,3, \quad n = 15; & \sum |c_i| &\approx 560, \quad n = 20. \end{aligned}$$

Абсолютне значення c_i при великих n зростає дуже швидко. Зростання похибки стає неприйнятним і відповідна формула непридатна для розрахунку.

Для відкритих формул коефіцієнт Котеса додатний для $n = 1, 2, 4$ та для інших n серед них є й від'ємні.

1.3.3 Елементарні формули трапецій, середніх прямокутників і Сімпсона

Розглянемо перші три формули Ньютона-Котеса. Спочатку давайте апроксимуємо поліном Лагранжа $L_2(x)$ з вузлами $x_1 = a$ і $x_2 = b$. Це означає, що замість кривої $f(x)$ ми візьмемо поліном першого ступеня, що проходить через точки $(a; f(a))$ і $(b; f(b))$. Тепер шуканий інтеграл, рівний площі криволінійної фігури, замінимо на площу трапеції з основами $f(a)$ і $f(b)$ і висотою $h = b - a$:

$$I \approx T = h \frac{f(a) + f(b)}{2} = \frac{b - a}{2} (f(a) + f(b)). \quad (1.13)$$

Отримуємо квадратурну формулу для трапецій, яку також можна отримати з (1.12) при $n = 2$, сітка з формулами замкнутої форми. Зверніть увагу, що алгебраїчний порядок точності цієї формули дорівнює одиниці, оскільки середина відрізка $[a; b]$ не є частиною сітки.

Якщо один вузол квадратурної формули взяти в $[a; b]$, то $f(x)$ апроксимується поліномом Лагранжа $L_1(x)$, тобто поліномом нульового ступеня. За вузол беремо середину відрізка $\bar{x} = (a + b)/2$. Тоді ми отримаємо формулу середніх прямокутників

$$I \approx P = hf(\bar{x}). \quad (1.14)$$

Геометричний зміст цієї формули полягає в тому, що площа фігури кривої замінюється площею прямокутника з основою $h = b - a$ і висотою $f(\bar{x})$. Ту ж саму формулу можна отримати, використовуючи сітку формул відкритого типу з (1.12) для $n = 1$. Центр інтегрованого сегмента міститься у вузлі сітки, тому алгебраїчний ступінь формули для центрального прямокутника дорівнює 1.

Тепер ми маємо формули для залишкових членів $R^T = I - T$ і $R^P = I - P$. Потім розкладемо $f(x)$ до ряду Тейлора у точці $\bar{x} = (a + b)/2$. Тоді гладкість функції $f(x)$ буде:

$$f(x) = f(\bar{x}) + (x - \bar{x})f'(\bar{x}) + \frac{(x - \bar{x})^2}{2}f''(\bar{x}) + \frac{(x - \bar{x})^3}{6}f'''(\bar{x}) + \frac{(x - \bar{x})^4}{24}f^{IV}(\bar{x}) + \dots \quad (1.15)$$

Використовуємо цей розподіл, щоб отримати уявлення про залишковий член формули для середнього прямокутника:

$$I = hf(\bar{x}) + \frac{h^3}{24}f''(\bar{x}) + \frac{h^5}{1920}f^{IV}(\bar{x}) + \dots = P + R^P, \quad (1.16)$$

оскільки

$$\int_a^b (x - \bar{x})^j dx = \begin{cases} h, & j = 0; \\ 0, & j = 1; \\ \frac{h^3}{12}, & j = 2; \\ 0, & j = 3; \\ \frac{h^5}{80}, & j = 4. \end{cases}$$

Підставимо до (1.15) $x = a$ і $x = b$ і врахуємо, що $a - \bar{x} = -h/2$ і $b - \bar{x} = h/2$:

$$f(a) = f(\bar{x}) - \frac{h}{2}f'(\bar{x}) + \frac{h^2}{8}f''(\bar{x}) - \frac{h^3}{48}f'''(\bar{x}) + \frac{h^4}{384}f^{IV}(\bar{x}) + \dots;$$

$$f(b) = f(\bar{x}) + \frac{h}{2}f'(\bar{x}) + \frac{h^2}{8}f''(\bar{x}) + \frac{h^3}{48}f'''(\bar{x}) + \frac{h^4}{384}f^{IV}(\bar{x}) + \dots$$

Складемо ці два рівняння:

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} = f(\bar{x}) + \frac{h^2}{8}f''(\bar{x}) + \frac{h^4}{384}f^{IV}(\bar{x}) + \dots$$

Звідси маємо

$$hf(\bar{x}) = h \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{h^3}{8}f''(\bar{x}) - \frac{h^5}{384}f^{IV}(\bar{x}) + \dots$$

Підставимо цей вираз $hf(\bar{x})$ до (1.16):

$$I = h \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{h^3}{12}f''(\bar{x}) - \frac{h^5}{480}f^{IV}(\bar{x}) + \dots = T + R^T \quad (1.17)$$

Отже, головні члени похибки у формулах середніх прямокутників і трапецій рівні $\frac{h^3}{24}f''(\bar{x})$ і $-\frac{h^3}{12}f''(\bar{x})$ і мають протилежні знаки. Це означає, що точне значення інтеграла лежить у вилиці між ними.

Поєднуючи (1.10) і (1.17), можна записати (нагадаємо, що тут $h = b - a$):

$$I = P + \frac{h^3}{24}f''(\bar{x}) + \frac{h^5}{1920}f^{IV}(\bar{x}) + \dots,$$

$$I = T - \frac{h^3}{12} f''(\bar{x}) - \frac{h^5}{480} f^{IV}(\bar{x}) + \dots$$

Помножимо першу рівність на $2/3$, а другу на $1/3$ і складемо:

$$I = \frac{2}{3}P + \frac{1}{3}T - \frac{h^5}{2880} f^{IV}(\bar{x}) + \dots = S - \frac{h^5}{2880} f^{IV}(\bar{x}) + \dots$$

Бачимо, що нова формула S , яку називають формулою Сімпсона (або формулою парабол), має вигляд

$$S = \frac{2}{3}P + \frac{1}{3}T = \frac{h}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right), \quad h = b - a. \quad (1.18)$$

Головний член похибки цієї формули рівний $-\frac{h^5}{2880} f^{IV}(\bar{x})$.

Зверніть увагу на важливий факт. Уже з виведення цього рівняння бачимо, що залишковий член R^S має розподіл непарного степеня $h = b - a$ на рівномірній сітці. Отже, формула Сімпсона є точною для кубічних поліномів.

Оцінки коефіцієнтів і залишкових членів формули Сімпсона можна отримати з (1.12) при $n = 3$. З цієї конфігурації отримана формула має бути точною із поліномом 2-го порядку, але має підвищену точність через симетрію.

Перетворимо формулу Сімпсона (1.18) і розглянемо її як окремий випадок формули Ньютона-Котеса тривузлової рівномірної сітки з кроком $h = (b - a)/2$:

$$S = \frac{h}{3} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right).$$

1.3.4 Складені формули трапецій, середніх прямокутників і Сімпсона

У загальному випадку довжина відрізка $[a; b]$ не мала, тому решта доданків у рівнянні, що розглядається, можуть бути великими. Щоб підвищити точність об'єднаного сегмента введіть досить щільну сітку $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, що відповідає розбиттю початкового відрізка на $n - 1$ підвідрізків, які називається елементарним. Через $h_i = x_{i+1} - x_i$, $i = \overline{1, n-1}$, позначимо довжину кожного підвідрізка. Інтеграл I , який ми шукаємо, розбивається як сума інтегралів I_i кожного елементарного підвідрізка, обчислюючи формулами з попереднього підпункту.

Таким чином, одержують складені, або узагальнені, квадратурні формули. У нашому випадку це:

$$\begin{aligned}
 I &= \sum_{i=1}^{n-1} T_i + \sum_{i=1}^{n-1} R_i^T = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} h_i (f_i + f_{i+1}) \\
 &\quad - \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{n-1} h_i^3 f'' \left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right) - \frac{1}{480} \sum_{i=1}^{n-1} h_i^5 f^{IV} \left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right) + \dots;
 \end{aligned}$$

– складена формула трапецій

$$\begin{aligned}
 I &= \sum_{i=1}^{n-1} P_i + \sum_{i=1}^{n-1} R_i^P = \sum_{i=1}^{n-1} h_i f \left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right) + \\
 &\quad + \frac{1}{24} \sum_{i=1}^{n-1} h_i^3 f'' \left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right) + \frac{1}{1920} \sum_{i=1}^{n-1} h_i^5 f^{IV} \left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right) + \dots;
 \end{aligned}$$

– складена формула середніх прямокутників

$$\begin{aligned} I &= \sum_{i=1}^{n-1} S_i + \sum_{i=1}^{n-1} R_i^S = \\ &= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{n-1} h_i \left(f_i + 4f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + f_{i+1} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2880} \sum_{i=1}^{n-1} h_i^5 f^{IV}\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + \dots \end{aligned}$$

– складена формула Сімпсона.

На рівномірній сітці залишкові члени цих квадратурних формул можуть бути представлені у такий спосіб (відкидаємо члени, що містять вищі степені h):

$$\begin{aligned} R^T &\approx -\frac{h^2}{12} \sum_{i=1}^{n-1} h f''\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) \approx -\frac{h^2}{12} \int_a^b f''(x) dx; \\ R^P &\approx \frac{h^2}{24} \sum_{i=1}^{n-1} h f''\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) \approx \frac{h^2}{24} \int_a^b f''(x) dx; \\ R^S &\approx -\frac{h^4}{2880} \sum_{i=1}^{n-1} h f^{IV}\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) \approx -\frac{h^4}{2880} \int_a^b f^{IV}(x) dx. \end{aligned}$$

Наведені оцінки є асимптотичними. Тобто вони виконуються для $h \rightarrow 0$ і обчислюються точно до межі. Однак справедливість цих оцінок вимагає існування неперервних похідних від підінтегральної функції відповідного порядку. Мажорантні оцінки можна зробити, лише якщо ці похідні є кусково-неперервними:

$$|R^T| \leq \frac{(b-a)}{12} h^2 M_2, \quad |R^P| \leq \frac{(b-a)}{24} h^2 M_2, \quad |R^S| \leq \frac{(b-a)}{2880} h^4 M_4,$$

$$M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|, \quad M_4 = \max_{x \in [a,b]} |f^{IV}(x)|.$$

1.3.5 Побудова формул Ньютона-Котеса методом невизначених коефіцієнтів

Щоб підвищити точність інтегрування, ми можемо збільшити кількість точок n , для яких інтегральна функція апроксимується інтерполяційним поліномом Лагранжа. В цьому випадку коефіцієнти c_i , а залишковий член R визначаються з (1.12).

Більш наочно, будемо замкнуті рівняння для $n = 2$ і $n = 3$ і відкриту формулу для $n = 1$.

Розглянемо інший метод створення квадратурної формули, який називається методом невизначених коефіцієнтів. Розглядаються тільки формули закритого типу.

Нехай $n = 4$. Формула не є симетричною, оскільки середина відрізка не входить до складу сітки. Давайте створимо вираз форми:

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3) + c_4 f(x_4),$$

де

$$x_1 = a, \quad x_2 = a + \frac{b-a}{3}, \quad x_3 = a + 2\frac{b-a}{3}, \quad x_4 = b.$$

Підберемо коефіцієнти c_i так, щоб ця формула була точною для поліномів максимально можливого степеня. Виконаємо стандартні заміни для змінних для спрощення представлення:

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t, \quad -1 \leq t \leq 1, \quad a \leq x \leq b,$$

в результаті отримаємо

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f(x(t))dt = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 g(t)dt.$$

Тепер, з урахуванням виконаної заміни, початкова задача звелася до пошуку таких коефіцієнтів d_i , щоб квадратурна формула

$$\int_{-1}^1 g(t)dt \approx d_1g(-1) + d_2g(-1/3) + d_3g(1/3) + d_4g(1)$$

була точна для поліномів найвищого можливого степеня.

Похибка квадратури має вигляд

$$\int_{-1}^1 g(t)dt \approx d_1g(-1) + d_2g(-1/3) + d_3g(1/3) + d_4g(1)$$

Підставимо до цього виразу поліном $g(t) = \sum_{j=0}^n a_j R(t^j)$ степеня m :

$$R(g) = \sum_{j=0}^n a_j R(t^j).$$

Підбором d_i спробуємо досягти виконання рівностей

$$R(1) = 0, \quad R(t) = 0, \dots, R(t^m) = 0$$

Підставимо $g(t) \equiv 1, g(t) \equiv t, g(t) \equiv t^2, g(t) \equiv t^3$ у ці рівняння при максимально можливому значенні m . Отримаємо систему чотирьох лінійних рівнянь. Рішення якої дають наступні значення коефіцієнтів ортогональної формули:

$$d_1 = d_4 = \frac{1}{4}, \quad d_2 = d_3 = \frac{3}{4}.$$

Перевіркою переконуємося, що побудована квадратурна формула не буде точна для $g(t) \equiv t^4$. Враховуючи, що $c_i = d_i(b-a)/2$ і $b-a = 3h$, дістанемо шукану квадратурну формулу з уведеними вище вузлами x_i :

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{3}{8} h (f_1 + 3f_2 + 3f_3 + f_4) \quad (1.19)$$

Ця квадратура називається правилом (або формулою) 3/8. Тому що вона точно для кубічного многочлена, то її залишковий член має порядок $O(h^5)$, але розкладається в ряд Тейлора за послідовними степенями h . Для $n = 4$ у (1.12) дає той самий вираз. Похибка в (1.19) виражається як $-\frac{3h^5 f^{IV}(\xi)}{80}$, $\xi \in [a, b]$.

Складена формула для 3/8 може бути побудована розбиттям $[a; b]$ на елементарні підвідрізки з (1.19), застосованими до кожного. Ми побудуємо по іншому.

Встановимо кількість базових підвідрізків кратною 3, тобто рівною $3m$, $m \in N$. Отримана сітка має $n = 3m + 1$ вузлів і розмір її кроку $h = (b - a)/(n - 1) = (b - a)/3m$.

Візьмемо складений відрізок $[a + kh, a + (k + 3)h]$, $k = 0, 3, 6, \dots$ і застосуємо його до нього правило (1.19):

$$\int_{a+kh}^{a+(k+3)h} f(x)dx = \frac{3}{8}h(f_1 + 3f_2 + 3f_3 + f_4) + R_{k+1},$$

$$\text{де } R_{k+1} = -\frac{3h^5}{80}f^{IV}(\xi_{k+1}), \quad \xi_{k+1} \in [a + kh, a + (k + 3)h].$$

Якщо ці рівності розписати для всіх інших строєних підвідрізків і скласти їх почленно, то дістанемо складену формулу трьох восьмих:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{3h}{8} [(f_1 + f_n) + 2(f_4 + f_7 + \dots + f_{n-3}) + 3(f_2 + f_3 + f_5 + f_6 + \dots + f_{n-2} + f_{n-1})] + R,$$

де похибка R має вигляд:

$$R = -\frac{h^4}{80} (3h[f^{IV}(\xi_1) + \dots + f^{IV}(\xi_{m/3})]) \approx -\frac{h^4}{80} \int_a^b f^{IV}(x)dx.$$

Оцінка останньої має вигляд

$$|R| \leq \frac{(b-a)}{80} h^4 M_4, \quad M_4 = \max_{x \in [a,b]} |f^{IV}(x)|.$$

Нехай $n = 5$ і $h = (b - a)/4$. У цьому випадку квадратурна формула симетрична, тому що центр відрізка є частиною сітки. Її можна використовувати як для поліномів 5-го ступеня, так і для поліномів 4-го ступеня. Застосовуючи метод невизначених коефіцієнтів описаний вище, отримуємо таке рівняння (іноді його називають формулою Боді):

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{(b-a)}{2} \left(\frac{7}{45} f_1 + \frac{32}{45} f_2 + \frac{12}{45} f_3 + \frac{32}{45} f_4 + \frac{7}{45} f_5 \right) =$$

$$= h \left(\frac{14}{45} f_1 + \frac{64}{45} f_2 + \frac{24}{45} f_3 + \frac{64}{45} f_4 + \frac{14}{45} f_5 \right).$$

Головний член її похибки рівний

$$-\frac{8}{945} h^7 f^{IV}(\xi), \quad \xi \in [a, b],$$

а залишковий член розкладається за непарними степенями h , починаючи з h^7 .

1.3.6 Квадратурні формули Гауса

При побудові квадратурних формул Гауса важливу роль відіграють ортогональні поліноми Лежандра, які мають вигляд:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Випишемо вигляд поліномів $P_n(x)$ для $n = 0, 1, 2, 3$:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x).$$

Розглянемо інтеграл на стандартному відрізку $[-1, 1]$:

$$I = \int_{-1}^1 f(t) dt.$$

Поставимо задачу визначення вузлів t_1, t_2, \dots, t_n на $[-1, 1]$ і коефіцієнтів c_1, c_2, \dots, c_n так, щоб квадратурна формула

$$\int_{-1}^1 f(t) dt \approx \sum_{i=1}^n c_i f(t_i)$$

була точною для поліномів якомога вищого степеня.

Формула з такою властивістю називається квадратурою Гауса. Інша назва – квадратурна формула найвищої алгебраїчної точності.

У квадратурі Гауса є $2n$ вільних параметрів t_i і c_i , $i = \overline{1, n}$, а поліном ступеня $2n - 1$ визначається $2n$ коефіцієнтами, ці параметри можна вибрати так, щоб найвищий ступінь полінома в загальному випадку дорівнював $N = 2n - 1$.

Щоб ортогональна формула була точною для поліномів ступеня, меншого або рівного $2n - 1$, необхідно і достатньо бути точним для одночленів

$$f(t) \equiv 1, t, t^2, \dots, t^{2n-1}$$

Параметри t_i і c_i підбираються методом невизначених коефіцієнтів, таким самим як використовувався раніше для побудови формул Ньютона-Котеса. Отримаємо систему $2n$ рівнянь із $2n$ невідомими:

$$\sum_{i=1}^n c_i = 2,$$

$$\sum_{i=1}^n c_i t_i = 0,$$

...

(1.20)

$$\sum_{i=1}^n c_i t_i^{2n-2} = \frac{2}{n-1},$$

$$\sum_{i=1}^n c_i t_i^{2n-1} = 0.$$

Оскільки ця система є нелінійною, її важко вирішити навіть для малих значень n . Більше того, немає жодної гарантії, що її взагалі можна розв'язати, ані того, що рішення є дійсним і належить відрізку $[-1, 1]$.

Доведемо можливість розв'язування системи (1.20). Розглянемо сімейство многочленів виду

$$f_k(t) = t^k P_n(t), \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

де $P_n(t)$ – поліном Лежандра.

Оскільки ступінь полінома $f_k(t)$ не перевищує $2n-1$, якщо t_i і c_i задовольняють систему (1.20), має бути виконано рівності

$$\int_{-1}^1 t^k P_n(t) dt = \sum_{i=1}^n c_i t_i^k P_n(t_i), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Через властивість ортогональності поліномів Лежандра мають місце рівності

$$\int_{-1}^1 t^n P_n(t) dt = 0, \quad k < n.$$

Отже,

$$\sum_{i=1}^n c_i t_i^k P_n(t_i) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Ці рівності буде виконано за будь-яких наперед заданих c_i , якщо покласти

$$P_n(t_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

тобто, якщо вузли розбиття t_i є коренями поліномів Лежандра $P_n(t)$. Ці корені є дійсними, різними та розташовані щодо нуля на $(-1, 1)$.

Підстановка t_i в (1.20) дає коефіцієнти c_i з перших n лінійних рівнянь. При цьому вони однозначно визначені. Це означає, що відповідний лінійний визначник є детермінантом Вандермонду.

Слід показати, що побудована квадратурна формула є точною для всіх поліномів ступеня до $2n - 1$. Тобто будь-який поліном $Q_{2n-1}(t)$ ступеня $2n - 1$ виразимо у вигляді

$$Q_{2n-1}(t) = G_{n-1}(t)P_n(t) + F_{n-1}(t),$$

де G_{n-1} і F_{n-1} – поліноми ступеня $n - 1$.

Розкладання є точним для будь-якого многочлена ступеня, меншого або рівного $2n - 1$. Для обчислення інтеграла на будь-якому відрізку $[a; b]$ за допомогою квадратури Гауса замінимо змінну

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t,$$

у результаті якої отримаємо

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t\right) dt.$$

Останній інтеграл замінимо квадратурною формулою Гауса:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n c_i f(x_i),$$

де $x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t_i$, $i = \overline{1, n}$, а t_i – корені полінома Лежандра $P_n(t)$ на $[-1, 1]$.

Залишковий член формули Гауса з n вузлами має вигляд (з урахуванням формули Стірлінга)

$$R_n = \frac{(b-a)^{2n+1} (n!)^4 f^{(2n)}(\xi)}{[(2n)!]^3 (2n+1)} \approx \frac{b-a}{2,5\sqrt{n}} \left(\frac{b-a}{3n}\right)^{2n} f^{(2n)}(\xi), \quad \xi \in [a, b].$$

Зокрема,

$$R_2 \approx \frac{1}{135} \left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(4)}(\xi),$$

$$R_3 \approx \frac{1}{15750} \left(\frac{b-a}{2}\right)^7 f^{(6)}(\xi).$$

Крім того, $t_i = -t_{n-i+1}$ (через властивості коренів поліномів Лежандра) та $c_i = c_{n-i+1}$ (оскільки симетричні вузли мають рівні коефіцієнти).

Якщо відрізок інтегрування розбити, можна побудувати складену формулу Гауса. Розділити підвідрізки та застосовувати до кожного формулу Гауса. Розділіть підвідрізки та застосуйте до кожного формулу Гауса. Але на відміну від складених формул Ньютона-Котеса замкненого типу, яка може

зберігати обчислення, інтегральна функція на кожному кінці підвідрізка (за винятком кінця всього відрізка інтегрування), така можливість не існує для складеної формули Гауса.

1.4 Правило Рунге практичної оцінки похибки квадратурних формул

З попередніх міркувань видно, що чим вищий ступінь полінома Лагранжа $L_n(x)$, тим ближче до заданої інтегрованої функції, тим вища точність відповідної квадратурної функції. Це робиться для досить малих відрізків інтеграції. Крім того, ми не повинні забувати, що для наближень, як правило, $L_n(x)$ використовується для n не більше 4 або 5. Ось чому кусково-поліноміальна апроксимація не використовується відразу для всього відрізка

При апроксимації поліномами низького ступеня це призводить до побудови складеної ортогональності. При цьому можна використовувати два методи:

- або взяти досить густу рівномірну сітку і побудувати на ній складні формули;
- або розділити відрізок на підвідрізки, а потім застосувати базову квадратуру до кожного підвідрізка, приблизно підсумовуючи інтеграли, отримані за цими підвідрізками.

Розмір кроку сітки та довжину підрозділу слід вибирати, виходячи з вимоги, щоб значення інтеграла було розраховано із заданою точністю. Для оцінки точності, досягнутої при обчисленні інтеграла, доступні лише асимптотичні або прості оцінки залишкового члена квадратури, які важко або неможливо використовувати на практиці. Це все одно, що дати кроку інтеграції та довжині підвідрізка занадто мале значення.

Тому використовується інший практичний і простий у реалізації метод контролю, точність інтегрування на основі оцінки простого члена

квадратурної помилки згідно із законом Руна. Цей метод також називають подвійним рахунком або екстраполяцією згідно з Річардсоном.

Нехай на $[a; b]$ використовується рівномірна сітка $\{x_i\}$ з кроком h . Давайте обчислимо за цією сіткою комплексну квадратурну апроксимацію I_h , алгебраїчний порядок точності $p - 1$. Це означає, що рівність

$$I - I_h = ch^p + O(h^{p+1}) \quad (1.21)$$

виконується, якщо права частина є розкладом за модулем степенів h .

Тепер давайте створимо сітку з кроком $h/2$ і обчислимо $I_{h/2}$ за тією самою квадратурною формулою. Далі маємо,

$$I - I_{h/2} = \tilde{c} \left(\frac{h}{2}\right)^p + O\left(\left(\frac{h}{2}\right)^{p+1}\right). \quad (1.22)$$

h є достатньо малим, щоб ми припустили $c \approx \tilde{c}$. З цих двох рівнянь ми можемо виразити член головної похибки ch^p через I_h та $I_{h/2}$ з точністю до $O(h^{p+1})$:

$$I_{h/2} - I_h = ch^p - c \frac{h^p}{2^p} + O(h^{p+1}),$$

звідки

$$ch^p = \frac{I_{h/2} - I_h}{1 - 2^{-p}} + O(h^{p+1}). \quad (1.23)$$

Рівняння (1.23) називається першою формулою Рунге.

Це дозволяє сформулювати найпростіший алгоритм обчислення інтеграла із заданою точністю ε за обраною ортогональною формулою, якщо

$\delta = |ch^p| \leq \varepsilon$, інтеграл розраховується з певною точністю. Якщо $\delta > \varepsilon$, то крок h знову ділиться навпіл і виконана процедура повторюється.

Підставляємо (1.23) у (1.21). В результаті отримуємо нову квадратурну формулу $I_{h,h/2}$ з членом головної похибки порядку h^{p+1} замість h^p , тобто новоотриманий вираз має на порядок вищу точність, ніж вихідна формула I_h :

$$I = \underbrace{I_h + \frac{I_{h/2} - I_h}{1 - 2^{-p}}}_{I_{h,h/2}} + c_1 h^{p+1} + O(h^{p+2}).$$

Виписане представлення інтеграла називають другою формулою Рунге.

Так ми описали альтернативний метод побудови квадратурних формул, який дозволяє використовувати в поєднанні з методом коефіцієнта невизначеності та інтерполятором.

Оскільки можна очікувати, що наближення $I_{h/2}$ буде більш точним, ніж I_h , його слід вважати новим наближенням

$$I = \underbrace{h/2 + \frac{I_{h/2} - I_h}{2^p - 1}}_{I_{h,h/2}} + c_2 h^{p+1} + O(h^{p+2}). \quad (1.24)$$

яке виходить, якщо до (1.24) підставити оцінку

Повторюючи процес із половинним розміром кроку, отримуємо формулу з домінуючою помилкою порядку h^{p+2} тощо.

Таким чином, ми не тільки отримуємо спосіб контролювати точність під час обчислення інтеграла, що дозволяє вибрати відповідне значення кроку h , але також отримуємо простий метод побудови. Точніші квадратурні формули (без явного запису їх у вигляді сум квадратур коефіцієнт Котеса). В якості вихідної формули можна використовувати просту формулу з низькою точністю (наприклад, трапеція або середній прямокутник).

Вказує на те, що операції, які складають вираз $I_{h,h/2}$ (названий на честь Річардсона), є операціями екстраполяції. З цієї причини нам потрібно показати, що якщо $I_h = I_{h/2}$, то $I_{h,h/2}$ завжди лежить поза відрізком із межами I_h та $I_{h/2}$.

Справді, якщо $I_{h/2} > I_h$, то

$$I_{h,h/2} = I_{h/2} + \frac{I_{h/2} - I_h}{2^p - 1} > I_{h/2},$$

оскільки $p \geq 1$. Якщо $I_{h/2} < I_h$, то

$$I_{h,h/2} = I_{h/2} - \frac{I_{h/2} - I_h}{2^p - 1} < I_{h/2}.$$

Оскільки $I_{h/2} = I_h$, то $I_{h,h/2} = I_{h/2} = I_h$, немає покращення точності.

Найбільш ефективна екстраполяція Річардсона, тобто для застосування беремо симетричну формулу як початкову формулу I_h другого правила Рунге, залишок розкладається за парними степенями h . Потім при кожному другому застосуванні закону Рунге, ми отримуємо формулу з подвоєним порядком точності. Не один, як в асиметричному випадку. найбільш використовуваний, у деяких випадках формула трапеції Т використовується як вихідна формула. Як і вище, виконується наступне розкладання залишку (якщо підінтегральне вираз є має $2s + 2$ неперервних похідних на $[a; b]$):

$$I = T_h + c_1 h^2 + c_2 h^4 + c_3 h^6 + \dots + c_s h^{2s} + O(h^{2s+2}).$$

Після подальшого розгляду ми перевизначимо $T_h \equiv T_{h,0}$ і $T_{h/2} \equiv T_{h/2,0}$.

Потім, згідно з другим правилом Рунге, ми видаляємо перший член $c_1 \left(\frac{h}{2}\right)^2$

розкладання в ряд Тейлора залишкового члена $T_{h/2,0}$, щоб отримати новий вираз

$$T_{h/2,1} = T_{h/2,0} + \frac{T_{h/2,0} - T_{h,0}}{2^2 - 1},$$

у якої залишковий член розкладається також за парними степенями, але починаючи з h^4 :

$$I = T_{h/2,1} + b_2 h^4 + b_3 h^6 + \dots + b_s h^{2s} + O(h^{2s+2}).$$

Нова формула $T_{h/2,1}$ має порядок точності, який на 2 перевищує порядок точності формули трапецій, вона буде точною для кубічних поліномів.

Покажіть, що нова формула $T_{h/2,1}$ є формулою Сімпсона, записаною неявно, тобто без прямого запису коефіцієнтів Котеса.

Для простоти виведення припустимо, що $h = b - a$ і що правило трапеції складається з двох вузлів. Після того

$$\begin{aligned} T_{h,0} &= \frac{h}{2}(f_1 + f_2), \quad T_{h/2,0} = \frac{h}{4}(f_1 + 2f_{1/2} + f_2), \\ T_{h/2,1} &= \frac{h}{4}(f_1 + 2f_{1/2} + f_2) + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{4}(f_1 + 2f_{1/2} + f_2) - \frac{h}{2}(f_1 + f_2) \right) = \\ &= \frac{h}{6}(f_1 + 4f_{1/2} + f_2) = S. \end{aligned}$$

Отримуємо формулу Сімпсона, записану на сітці з трьох вузлів.

Тепер можемо застосувати правило (1.24) до формули Сімпсона $T_{h/2,1}$, використовуючи вже обчислений $T_{h/4,1}$:

$$T_{h/4,2} = T_{h/4,1} + \frac{T_{h/4,1} - T_{h/2,1}}{2^4 - 1}.$$

Тут у знаменнику двійка підноситься до четвертого степеня, оскільки при обчисленні $T_{h/4,2}$ ми виключили член $b_2 h^4$ у розкладі за степенями h залишкового члена формули $T_{h/2,1}$.

У результаті новий залишковий член формули $T_{h/4,2}$ розкладається на парні степені h , починаючи з h^6 :

$$I = T_{h/4,2} + a_3 h^6 + \dots + a_s h^{2s} + O(h^{2s+2}).$$

Тому алгебраїчна точність формули $T_{h/2,4}$ на два порядки вища, ніж у формули Сімпсона, яка дорівнює п'яти (тобто вона точна для поліномів 5 ступеня). Можна довести, що вона узгоджується з формулою Боде, написаною раніше, і може бути отримана методом коефіцієнта невизначеності сітки п'яти вузлів.

Якщо застосувати правило Рунге до формули Боде $T_{h/4,2}$, то отримуємо формулу, що складається з дев'яти вузлів із точністю сьомого порядку; у розкладі решти членів цієї формули, починаючи з восьмого ступеня, є також парні степені h .

З кожним застосуванням правила Рунге до отриманої формули будемо отримувати формули з точністю 9, 11 тощо.

Зауважимо, що, виходячи з формули, побудованої за (1.24) на основі формули Боде, якби ці формули були побудовані як формули Ньютона, порядок точності був би нижчим за формули Ньютона-Котеса, тобто формули як типи інтерполяції. Наприклад, формула Ньютона-Котеса для $n = 9$ має 9-ту точність замість 7-ої, як і формула, отримана з формули Боде для (1.24). Тому з цього моменту формулу Ньютона-Котеса не можна побудувати за другим правилом Рунге. Це різні вирази, які не є точними для поліномів найвищого степеня.

2 ЗАСТОСУВАННЯ КВАДРАТУРНОГО МЕТОДУ ПРИ РОЗВ'ЯЗАННІ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ФРЕДГОЛЬМА II РОДУ

2.1 Квадратурний метод для лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду з оцінкою похибки за правилом Рунге

Важливим класом методів наближеного розв'язування лінійних інтегральних рівнянь є апроксимаційні методи, в яких інтеграли замінюються скінченними сумами. Квадратурний метод – один із таких методів. На основі квадратурних формул

$$\int_a^b \psi(y) dy = \sum_{j=0}^n A_j \psi(y_j) + R(\psi),$$

де точки y_j , $j = 0, 1, \dots, n$, належать відрізку $[a, b]$, A_j – коефіцієнти, які не залежні від функції $\psi(y)$, $R(\psi)$ – похибка заміни інтеграла скінченною сумою.

Якщо у лінійному неоднорідному інтегральному рівнянні Фредгольма

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy + f(x) \quad (2.1)$$

зафіксувати $x = x_i$, $i = 0, 1, \dots, n$, де x_i – вузли квадратурної формули, то отримаємо початкове для квадратурного методу співвідношення

$$\varphi(x_i) = \lambda \int_a^b K(x_i, y) \varphi(y) dy + f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

з якого після заміни інтеграла скінченною сумою маємо систему рівнянь

$$\varphi(x_i) = \lambda \sum_{j=0}^n A_j K(x_i, x_j) \varphi(x_j) + f(x_i) + \lambda R_i, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

де $R_i = R(K(x_i, y)\varphi(y))$.

Відкидаючи малу величину λR_i , для відшукування наближених значень $\tilde{\varphi}(x_i)$ розв'язку $\varphi(x)$ у вузлах x_0, x_1, \dots, x_n отримуємо лінійну систему алгебраїчних рівнянь

$$\tilde{\varphi}(x_i) - \lambda \sum_{j=0}^n A_j K(x_i, x_j) \tilde{\varphi}(x_j) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (2.2)$$

Розв'язуючи систему (2.2), отримуємо дискретні значення $\tilde{\varphi}(x_0), \tilde{\varphi}(x_1), \dots, \tilde{\varphi}(x_n)$, шляхом інтерполяції можна знайти наближений аналітичний розв'язок інтегрального рівняння (2.1) на всьому відрізку $[a, b]$.

Зокрема, як апроксимуючу розв'язок функцію можна використовувати ламану, яка складається з відрізків, кінцями яких є сусідні дискретні значення $\tilde{\varphi}(x_i)$, і є лінійною на кожному з проміжків $[x_i, x_{i+1}]$.

Крім того, як аналітичний вираз для наближеного розв'язку інтегрального рівняння (2.1) часто вибирають функцію

$$\tilde{\varphi}^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=0}^n A_j K(x, x_j) \tilde{\varphi}(x_j)$$

яка також у вузлах x_0, x_1, \dots, x_n набуває значень $\tilde{\varphi}(x_0), \tilde{\varphi}(x_1), \dots, \tilde{\varphi}(x_n)$, відповідно, $\tilde{\varphi}^{(n)}(x)$ – це наближене значення шуканої функції, отримане при розбитті інтегралу на n відрізків.

Таким чином, можна виділити такі етапи алгоритму чисельного рішення рівняння:

- вибирається квадратурна формула;
- будується і вирішується система лінійних алгебраїчних рівнянь, за її розв'язком знаходиться наближене рішення вихідного інтегрального рівняння у вигляді функції $\tilde{\varphi}^{(n)}(x)$.

Розглянемо застосування формул лівих прямокутників, трапецій і Сімпсона для розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма II роду.

Нехай дано інтегральне рівняння Фредгольма II роду

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy = f(x) \quad (2.3)$$

де $K(x, y), f(x)$ – ядро рівняння й вільний член відповідно, λ – чисельний параметр, $\varphi(x)$ – шукана функція.

Інтеграл, що входить у цю рівність, можна за допомогою конкретної квадратурної формули приблизно замінити на деякий простий вираз, що не містить знаку інтеграла.

Для квадратурної формули лівих прямокутників матимемо:

$$I \approx h \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}), \quad (2.4)$$

де вузли $x_i \in [a, b]$, з кроком $h = \frac{b-a}{n}$.

Після застосування формули (2.4) до інтеграла в лівій частині рівняння (2.3) отримаємо рівність:

$$\tilde{\varphi}(x) - \lambda h \sum_{i=0}^{n-1} K(x, x_i)\tilde{\varphi}(x_i) = f(x) \quad (2.5)$$

де через $\tilde{\varphi}(x)$ позначений наближений розв'язок для шуканої функції $\varphi(x)$.

Тоді, припускаючи у рівнянні (2.5) $x = x_1, x_2, \dots, x_n$, послідовно приходимо до наступної системи лінійних алгебраїчних рівнянь щодо невідомих $\tilde{\varphi}(x_k), (k = \overline{0, n-1})$ – наближень шуканого значення функції $\varphi(x_i)$.

$$\tilde{\varphi}(x_k) - \lambda h \sum_{i=0}^{n-1} K(x_k, x_i) \tilde{\varphi}(x_i) = f(x_k), (k = \overline{0, n-1}) \quad (2.6)$$

В розгорнутому виді отримаємо:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 - \lambda h K(x_0, x_0)) \tilde{\varphi}(x_0) - \lambda h K(x_0, x_1) \tilde{\varphi}(x_1) - \dots - \lambda h K(x_0, x_{n-1}) \tilde{\varphi}(x_{n-1}) = f(x_0), \\ \lambda h K(x_1, x_0) \tilde{\varphi}(x_0) + (1 - \lambda h K(x_1, x_1)) \tilde{\varphi}(x_1) - \dots - \lambda h K(x_1, x_{n-1}) \tilde{\varphi}(x_{n-1}) = f(x_1), \\ \dots \\ \lambda h K(x_{n-1}, x_0) \tilde{\varphi}(x_0) - \lambda h K(x_{n-1}, x_1) \tilde{\varphi}(x_1) - \dots + (1 - \lambda h K(x_{n-1}, x_{n-1})) \tilde{\varphi}(x_{n-1}) = f(x_{n-1}). \end{array} \right.$$

Після розв'язання системи отримаємо і отримання невідомих $\tilde{\varphi}(x_k), (k = \overline{0, n-1})$ матимемо наближений розв'язок:

$$\tilde{\varphi}^{(n)} = f(x) + \lambda h \sum_{i=0}^{n-1} K(x, x_i) \tilde{\varphi}(x_i). \quad (2.7)$$

Зрозуміло, що чим менша похибка при заміні інтегралів сумами, тим точніший результат отримано при заміні інтегрального рівняння (2.3) на лінійну систему рівнянь (2.6).

Для квадратурної формули трапецій матимемо:

$$I \approx I^T = h \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right), \quad (2.8)$$

де крок $h = \frac{b-a}{n}$.

Після застосування формули (2.8) до інтеграла в лівій частині рівняння (2.3) отримаємо рівність:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(x) - \frac{\lambda h}{2} (K(x, x_0)\tilde{\varphi}(x_0) + K(x, x_n)\tilde{\varphi}(x_n)) - \lambda h \sum_{i=1}^{n-1} K(x, x_i)\tilde{\varphi}(x_i) = \\ = f(x) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Тоді, припускаючи у рівнянні (2.9) $x = x_1, x_2, \dots, x_n$, послідовно приходимо до такої системи лінійних алгебраїчних рівнянь щодо невідомих $\tilde{\varphi}(x_k)$, $(k = \overline{0, n})$ – наближень шуканого значення функції $\varphi(x_i)$.

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(x_k) - \frac{\lambda h}{2} (K(x_k, x_0)\tilde{\varphi}(x_0) + K(x_k, x_n)\tilde{\varphi}(x_n)) - \lambda h \sum_{i=1}^{n-1} K(x_k, x_i)\tilde{\varphi}(x_i) = \\ = f(x_k), (k = \overline{0, n}) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Заміняючи це рівняння на систему отримаємо:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(1 - \frac{\lambda h K(x_0, x_0)}{2}\right)\tilde{\varphi}(x_0) - \lambda h K(x_0, x_1)\tilde{\varphi}(x_1) - \dots - \lambda h K(x_0, x_{n-1})\tilde{\varphi}(x_{n-1}) - \frac{\lambda h K(x_0, x_n)\tilde{\varphi}(x_n)}{2} = f(x_0), \\ -\frac{\lambda h K(x_1, x_0)\tilde{\varphi}(x_0)}{2} + (1 - \lambda h K(x_1, x_1))\tilde{\varphi}(x_1) - \dots - \lambda h K(x_1, x_{n-1})\tilde{\varphi}(x_{n-1}) - \frac{\lambda h K(x_1, x_n)\tilde{\varphi}(x_n)}{2} = f(x_1), \\ \dots \\ -\frac{\lambda h K(x_{n-1}, x_0)\tilde{\varphi}(x_0)}{2} - \lambda h K(x_{n-1}, x_1)\tilde{\varphi}(x_1) - \dots + (1 - \lambda h K(x_{n-1}, x_{n-1}))\tilde{\varphi}(x_{n-1}) - \frac{\lambda h K(x_{n-1}, x_n)\tilde{\varphi}(x_n)}{2} = f(x_{n-1}), \\ -\frac{\lambda h K(x_n, x_0)\tilde{\varphi}(x_0)}{2} - \lambda h K(x_n, x_1)\tilde{\varphi}(x_1) - \dots - \lambda h K(x_n, x_{n-1})\tilde{\varphi}(x_{n-1}) + \left(1 - \frac{\lambda h K(x_n, x_n)}{2}\right)\tilde{\varphi}(x_n) = f(x_n) \end{array} \right.$$

Після розв'язання системи отримаємо і отримання невідомих $\tilde{\varphi}(x_k)$, $(k = \overline{0, n})$ матимемо наближений розв'язок:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}^{(n)} = f(x) + \frac{\lambda h}{2} (K(x, x_0)\tilde{\varphi}(x_0) + K(x, x_n)\tilde{\varphi}(x_n)) + \\ + \lambda h \sum_{i=1}^{n-1} K(x, x_i)\tilde{\varphi}(x_i). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Зрозуміло, що чим менша похибка при заміні інтегралів сумами, тим точніший результат отримано при заміні інтегрального рівняння (2.3) на лінійну систему рівнянь (2.10).

Для квадратурних формул Сімпсона матимемо:

$$I \approx I^C = \frac{h}{3}(y_0 + y_{2m} + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2})), \quad (2.12)$$

де крок $h = \frac{b-a}{2m}$, $n = 2m$.

Після застосування формули (2.12) до інтеграла в лівій частині рівняння (2.3) отримаємо рівність:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(x) - \frac{\lambda h}{3} \sum_{i=1}^m (K(x, x_{2i-2})\tilde{\varphi}(x_{2i-2}) + 4K(x, x_{2i-1})\tilde{\varphi}(x_{2i-1}) + \\ + K(x, x_{2i})\tilde{\varphi}(x_{2i})) = f(x) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Тоді, припускаючи у рівнянні (2.13) $x = x_1, x_2, \dots, x_n$, послідовно приходимо до такої системи лінійних алгебраїчних рівнянь щодо невідомих $\tilde{\varphi}(x_k)$, ($k = \overline{0, 2m}$) – наближень шуканого значення функції $\varphi(x_i)$.

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(x_k) - \frac{\lambda h}{3} \sum_{i=1}^m (K(x_k, x_{2i-2})\tilde{\varphi}(x_{2i-2}) + 4K(x_k, x_{2i-1})\tilde{\varphi}(x_{2i-1}) + \\ + K(x_k, x_{2i})\tilde{\varphi}(x_{2i})) = f(x_k), (k = \overline{0, 2m}) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Заміняючи це рівняння на систему отримаємо:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(1 - \frac{\lambda h K(x_0, x_0)}{3}\right) \tilde{\varphi}(x_0) - \frac{4\lambda h K(x_0, x_1) \tilde{\varphi}(x_1)}{3} - \dots - \frac{4\lambda h K(x_0, x_{2m-1}) \tilde{\varphi}(x_{2m-1})}{3} - \frac{\lambda h K(x_0, x_{2m}) \tilde{\varphi}(x_{2m})}{3} = f(x_0), \\ -\frac{\lambda h K(x_1, x_0) \tilde{\varphi}(x_0)}{3} + \left(1 - \frac{4\lambda h K(x_1, x_1)}{3}\right) \tilde{\varphi}(x_1) - \dots - \frac{4\lambda h K(x_1, x_{2m-1}) \tilde{\varphi}(x_{2m-1})}{3} - \frac{\lambda h K(x_1, x_{2m}) \tilde{\varphi}(x_{2m})}{3} = f(x_1), \\ \dots \\ -\frac{\lambda h K(x_{2m-1}, x_0) \tilde{\varphi}(x_0)}{3} - \frac{4\lambda h K(x_{2m-1}, x_1) \tilde{\varphi}(x_1)}{3} - \dots + \left(1 - \frac{4\lambda h K(x_{2m-1}, x_{2m-1})}{3}\right) \tilde{\varphi}(x_{2m-1}) - \frac{\lambda h K(x_{2m-1}, x_{2m}) \tilde{\varphi}(x_{2m})}{3} = f(x_{2m-1}), \\ -\frac{\lambda h K(x_{2m}, x_0) \tilde{\varphi}(x_0)}{3} - \frac{4\lambda h K(x_{2m}, x_1) \tilde{\varphi}(x_1)}{3} - \dots - \frac{4\lambda h K(x_{2m}, x_{2m-1}) \tilde{\varphi}(x_{2m-1})}{3} + \left(1 - \frac{\lambda h K(x_{2m}, x_{2m})}{3}\right) \tilde{\varphi}(x_{2m}) = f(x_{2m}) \end{array} \right.$$

Після розв'язання системи отримаємо і отримання невідомих $\tilde{\varphi}(x_k)$, ($k = \overline{0, n}$) матимемо наближений розв'язок:

$$\tilde{\varphi}^{(n)} = f(x) - \frac{\lambda h}{3} \sum_{i=1}^m (K(x, x_{2i-2}) \tilde{\varphi}(x_{2i-2}) + 4K(x, x_{2i-1}) \tilde{\varphi}(x_{2i-1}) + K(x, x_{2i}) \tilde{\varphi}(x_{2i})). \quad (2.15)$$

Зрозуміло, що чим менша похибка при заміні інтегралів сумами, тим точніший результат отримано при заміні інтегрального рівняння (2.3) на лінійну систему рівнянь (2.14).

Згідно з правилом Рунге оцінки похибки чисельного інтегрування наближено визначається за формулою:

$$I - I^p\left(\frac{h}{2}\right) \approx \frac{I^p\left(\frac{h}{2}\right) - I^p(h)}{2^p - 1}, \quad (2.16)$$

де $I^p(h)$ – чисельне значення інтегралу при кроці розбиття h , $I^p\left(\frac{h}{2}\right)$ – чисельне значення інтегралу при кроці розбиття $\frac{h}{2}$, p – порядок точності квадратурної формули відносно h .

Тому в ітераційному процесі поступово подвоюючи кількість відрізків розбиття, можемо контролювати похибку розв'язання інтегрального рівняння Фредгольма другого роду.

2.2 Приклади застосування квадратурних формул для розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду

Приклад 2.1 Розв'язати інтегральне рівняння Фредгольма II роду квадратурним методом

$$u(x) - \frac{1}{2} \int_0^1 xtu(t)dt = \frac{5}{6}x. \quad (2.17)$$

Розв'язання. Застосуємо розглянуті вище способи наближеного розв'язання інтегральних рівнянь для знаходження розв'язку даного рівняння.

Розглянемо квадратурні формули лівих прямокутників. Для $n = 2$, при чому $\lambda = \frac{1}{2}, a = 0, b = 1, K(x, y) = xy, h = \frac{b-a}{2} = \frac{1}{2}$; обраємо вузли $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}$. Обчисливши наступні значення $K(x, x_0) = 0, K(x, x_2) = \frac{1}{2}x$ та значення правих частин $f(x_0) = 0, f(x_1) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{12}$. Отримаємо систему (2.6) для даного випадку у вигляді:

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}(x_0) = 0, \\ \tilde{\varphi}(x_1) = 0,4166667, \end{cases}$$

Розв'язуючи дану систему маємо $\tilde{\varphi}(x_0) = 0, \tilde{\varphi}(x_1) = 0,444$, отримаємо наближений розв'язок, записаний у вигляді:

$$\varphi^{(2)}(x) = \frac{5}{6}x + \frac{5}{192}x \cdot 0,646966.$$

Розглянемо більш точне наближення для методу прямокутників. Для $n = 4$, при чому тут $\lambda = \frac{1}{2}, a = 0, b = 1, K(x, y) = xy, h = \frac{b-a}{4} = \frac{1}{4}$; далі обираємо вузли $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{3}{4}$, далі обчислюємо наступні

значення $K(x, x_0) = 0, K(x, x_1) = \frac{1}{4}x, K(x, x_2) = \frac{1}{2}x, K(x, x_3) = \frac{3}{4}x$ та
значення правих частин $f(x_0) = 0, f(x_1) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{24}, f(x_2) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{12},$
 $f(x_3) = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{8}$. Отримаємо систему (2.6) для даного випадку у вигляді:

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}(x_0) = 0, \\ 0,992188\tilde{\varphi}(x_1) - 0,015625\tilde{\varphi}(x_2) - 0,0234375\tilde{\varphi}(x_3) = 0,2083333, \\ -0,015625\tilde{\varphi}(x_1) + 0,96875\tilde{\varphi}(x_2) - 0,046875\tilde{\varphi}(x_3) = 0,416666667, \\ -0,0234375\tilde{\varphi}(x_1) - 0,046875\tilde{\varphi}(x_2) + 0,9296875\tilde{\varphi}(x_3) = 0,625 \end{cases}$$

Розв'язуючи дану систему маємо $\tilde{\varphi}(x_0) = 0, \tilde{\varphi}(x_1) = 0,234, \tilde{\varphi}(x_2) = 0,468, \tilde{\varphi}(x_3) = 0,702$ та отримаємо наближений розв'язок, записаний у вигляді:

$$\varphi^{(4)}(x) = \frac{5}{6}x + \frac{5}{384}x \sum_{i=0}^3 i\tilde{\varphi}(x_i).$$

Розглянемо більш точно наближення для методу прямокутників. Для $n = 8$, при чому тут $\lambda = \frac{1}{2}, a = 0, b = 1, K(x, y) = xy, h = \frac{b-a}{8} = \frac{1}{8}; n = 8$, далі обираємо вузли $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{8}, x_2 = \frac{1}{4}, x_3 = \frac{3}{8}, x_4 = \frac{1}{2}, x_5 = \frac{5}{8}, x_6 = \frac{3}{4}, x_7 = \frac{7}{8}$ та обчислюємо наступні значення $K(x, x_0) = 0, K(x, x_1) = \frac{1}{8}x, K(x, x_2) = \frac{1}{4}x, K(x, x_3) = \frac{3}{8}x, K(x, x_4) = \frac{1}{2}x, K(x, x_5) = \frac{5}{8}x, K(x, x_6) = \frac{3}{4}x, K(x, x_7) = \frac{7}{8}x$ та значення правих частин $f(x_0) = 0, f(x_1) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{48}, f(x_2) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{24}, f(x_3) = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{8} = \frac{5}{16}, f(x_4) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{12}, f(x_5) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{8} = \frac{25}{48}, f(x_6) = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{8}, f(x_7) = \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} = \frac{35}{48}$. Отримаємо систему (2.6) для даного випадку у вигляді:

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}(x_0) = 0, \\ 0.9990234\tilde{\varphi}(x_1) - 0.0019531\tilde{\varphi}(x_2) \dots - 0.0068359\tilde{\varphi}(x_7) = 0.1041667, \\ \dots \\ -0.0068359\tilde{\varphi}(x_1) - 0.0136719\tilde{\varphi}(x_2) \dots + 0.9521484\tilde{\varphi}(x_7) = 0.7291667. \end{cases}$$

Розв'язуючи дану систему маємо $\tilde{\varphi}(x_0) = 0, \tilde{\varphi}(x_1) = 0,120, \tilde{\varphi}(x_2) = 0,241, \tilde{\varphi}(x_3) = 0,362, \tilde{\varphi}(x_4) = 0,483, \tilde{\varphi}(x_5) = 0,603, \tilde{\varphi}(x_6) = 0,724, \tilde{\varphi}(x_7) = 0,845$ отримаємо наближений розв'язок, записаний у вигляді:

$$\varphi^{(8)}(x) = \frac{5}{6}x + \frac{5}{768}x \sum_{i=0}^7 i\tilde{\varphi}(x_i).$$

Далі побудуємо графіки для кожного з отриманих розв'язків і порівняємо. На рисунку 2.1 зображено графік аналітичного розв'язку $f(x)$ та наближених розв'язків для $n = 2$, маємо $p(x)$; для $n = 4$, маємо $h(x)$; для $n = 8$, маємо $g(x)$. На цьому рисунку легко побачити, що чим більше значення n , тим точнішим буде розв'язок рівняння.



Рисунок 2.1

Розглянемо квадратурні формули трапецій. Для $n = 3$, тут $\lambda = \frac{1}{2}$, $a = 0$, $b = 1$, $K(x, y) = xy$, $h = \frac{b-a}{3} = \frac{1}{3}$; далі обираємо вузли $x_0 = \frac{1}{6}$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{5}{6}$ та обчислюємо значення $K(x, x_0) = \frac{1}{6}x$, $K(x, x_1) = \frac{1}{2}x$, $K(x, x_2) = \frac{5}{6}x$ і знаходимо значення правих частин $f(x_0) = \frac{5}{36}$, $f(x_1) = \frac{5}{12}$, $f(x_2) = \frac{25}{36}$. Отримаємо систему (2.10) для даного випадку у вигляді:

$$\begin{cases} 0,9976851\tilde{\varphi}(x_0) - 0,0138888\tilde{\varphi}(x_1) - 0,0115740\tilde{\varphi}(x_2) = 0,13889, \\ -0,0069444\tilde{\varphi}(x_0) + 0,9791666\tilde{\varphi}(x_1) - 0,0347222\tilde{\varphi}(x_2) = 0,41667, \\ -0,0115740\tilde{\varphi}(x_0) - 0,0694444\tilde{\varphi}(x_1) + 0,942129\tilde{\varphi}(x_2) = 0,6944. \end{cases}$$

Розв'язуючи дану систему маємо $\tilde{\varphi}(x_0) = 0,154$, $\tilde{\varphi}(x_1) = 0,454$, $\tilde{\varphi}(x_2) = 0,772$ та отримаємо наближений розв'язок, записаний у вигляді

$$\tilde{\varphi}(x) = \frac{5}{6}x + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{6}x \cdot 0,154493 + \frac{5}{6}x \cdot 0,772465\right) + \frac{5}{36}x \cdot 0,45402$$

Розглянемо більш точне наближення для методу трапецій. Для $n = 5$, тут $\lambda = \frac{1}{2}$, $a = 0$, $b = 1$, $K(x, y) = xy$, $h = \frac{b-a}{5} = \frac{1}{5}$; далі обираємо вузли $x_0 = \frac{1}{10}$, $x_1 = \frac{3}{10}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{7}{10}$, $x_4 = \frac{9}{10}$ та обчислюємо значення $K(x, x_0) = \frac{1}{10}x$, $K(x, x_1) = \frac{3}{10}x$, $K(x, x_2) = \frac{1}{2}x$, $K(x, x_3) = \frac{7}{10}x$, $K(x, x_4) = \frac{9}{10}x$, потім знаходимо значення правих частин $f(x_0) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{12}$, $f(x_1) = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{4}$, $f(x_2) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{12}$, $f(x_3) = \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{10} = \frac{7}{12}$, $f(x_4) = \frac{5}{6} \cdot \frac{9}{10} = \frac{3}{4}$. Отримаємо систему (2.10) для даного випадку у вигляді:

$$\begin{cases} 0,994\tilde{\varphi}(x_0) - 0,0135\tilde{\varphi}(x_1) - 0,0165\tilde{\varphi}(x_2) - 0,0201\tilde{\varphi}(x_3) - 0,012\tilde{\varphi}(x_4) = 0,905, \\ -0,0166\tilde{\varphi}(x_0) + 0,980\tilde{\varphi}(x_1) - 0,049\tilde{\varphi}(x_2) - 0,0604\tilde{\varphi}(x_3) - 0,037\tilde{\varphi}(x_4) = 0,741, \\ -0,0276\tilde{\varphi}(x_0) - 0,067\tilde{\varphi}(x_1) + 0,959\tilde{\varphi}(x_2) - 0,101\tilde{\varphi}(x_3) - 0,061\tilde{\varphi}(x_4) = 0,607, \\ -0,039\tilde{\varphi}(x_0) - 0,094\tilde{\varphi}(x_1) - 0,115\tilde{\varphi}(x_2) + 0,929\tilde{\varphi}(x_3) - 0,086\tilde{\varphi}(x_4) = 0,497, \\ -0,0497\tilde{\varphi}(x_0) - 0,121\tilde{\varphi}(x_1) - 0,148\tilde{\varphi}(x_2) - 0,181\tilde{\varphi}(x_3) + 0,889\tilde{\varphi}(x_4) = 0,407. \end{cases}$$

Розв'язуючи дану систему маємо $\tilde{\varphi}(x_0) = 0,966, \tilde{\varphi}(x_1) = 0,906,$
 $\tilde{\varphi}(x_2) = 0,876, \tilde{\varphi}(x_3) = 0,864, \tilde{\varphi}(x_4) = 0,957$ та отримаємо наближений
розв'язок, записаний у вигляді:

$$\tilde{\varphi}(x) = \frac{5}{6}x + \frac{1}{20} \left(\frac{1}{10}x \cdot 0,094965 + \frac{9}{10}x \cdot 0,854681 \right) + \frac{1}{10}x \sum_{i=1}^3 (2i + 1)\tilde{\varphi}(x_i)$$

Розглянемо більш точне наближення для методу трапецій. Для $n = 9$,
тут $\lambda = \frac{1}{2}, a = 0, b = 1, K(x, y) = xy, h = \frac{b-a}{9} = \frac{1}{9}$; далі обираємо дев'ять
вузлів $x_0 = \frac{1}{18}, x_1 = \frac{1}{6}, x_2 = \frac{5}{18}, x_3 = \frac{7}{18}, x_4 = \frac{1}{2}, x_5 = \frac{11}{18}, x_6 = \frac{13}{18}, x_7 = \frac{5}{6}, x_8 =$
 $\frac{17}{18}$, далі обчислюємо значення $K(x, x_0) = \frac{1}{18}x, K(x, x_1) = \frac{1}{6}x, K(x, x_2) =$
 $\frac{5}{18}x, K(x, x_3) = \frac{7}{18}x, K(x, x_4) = \frac{1}{2}x, K(x, x_5) = \frac{11}{18}x, K(x, x_6) = \frac{13}{18}x, K(x, x_7) =$
 $\frac{5}{6}x, K(x, x_8) = \frac{17}{18}x$, потім знаходимо значення правих частин $f(x_0) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{18} =$
 $\frac{5}{108}, f(x_1) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36}, f(x_2) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{18} = \frac{25}{108}, f(x_3) = \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{18} = \frac{35}{108}, f(x_4) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} =$
 $\frac{5}{12}, f(x_5) = \frac{5}{6} \cdot \frac{11}{18} = \frac{55}{108}, f(x_6) = \frac{5}{6} \cdot \frac{13}{18} = \frac{65}{108}, f(x_7) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}, f(x_8) = \frac{5}{6} \cdot \frac{17}{18} =$
 $\frac{85}{108}$. Отримаємо систему (2.10) для даного випадку у вигляді:

$$\begin{cases} 0,999\tilde{\varphi}(x_0) - 0,0005\tilde{\varphi}(x_1) - \dots - 0,0026\tilde{\varphi}(x_7) - 0,0015\tilde{\varphi}(x_8) = 0,046, \\ -0,00026\tilde{\varphi}(x_0) + 0,999\tilde{\varphi}(x_1) - \dots - 0,0077\tilde{\varphi}(x_7) - 0,0044\tilde{\varphi}(x_8) = 0,139, \\ \dots \\ -0,0013\tilde{\varphi}(x_0) - 0,0077\tilde{\varphi}(x_1) - \dots + 0,981\tilde{\varphi}(x_7) - 0,022\tilde{\varphi}(x_8) = 0,694, \\ -0,0015\tilde{\varphi}(x_0) - 0,0087\tilde{\varphi}(x_1) - \dots - 0,044\tilde{\varphi}(x_7) + 0,975\tilde{\varphi}(x_8) = 0,787. \end{cases}$$

Розв'язуючи дану систему маємо $\tilde{\varphi}(x_0) = 0,054, \tilde{\varphi}(x_1) = 0,161,$
 $\tilde{\varphi}(x_2) = 0,269, \tilde{\varphi}(x_3) = 0,375, \tilde{\varphi}(x_4) = 0,481, \tilde{\varphi}(x_5) = 0,586, \tilde{\varphi}(x_6) = 0,690,$
 $\tilde{\varphi}(x_7) = 0,792, \tilde{\varphi}(x_8) = 0,915$ та отримаємо наближений розв'язок, записаний
у вигляді:

$$\tilde{\varphi}(x) = \frac{5}{6}x + \frac{1}{36} \left(\frac{1}{18}x \cdot 0,05382 + \frac{17}{18}x \cdot 0,914937 \right) + \frac{1}{18}x \sum_{i=1}^7 (2i+1)\tilde{\varphi}(x_i)$$

Далі побудуємо графіки для кожного з отриманих розв'язків і порівняємо. На рисунку 2.2 зображено графік аналітичного розв'язку $f(x)$ та наближених розв'язків для $n = 3$, маємо $p(x)$; для $n = 5$, маємо $h(x)$; для $n = 9$, маємо $g(x)$. На цьому рисунку легко побачити, що чим більше значення n , тим точнішим буде розв'язок рівняння.

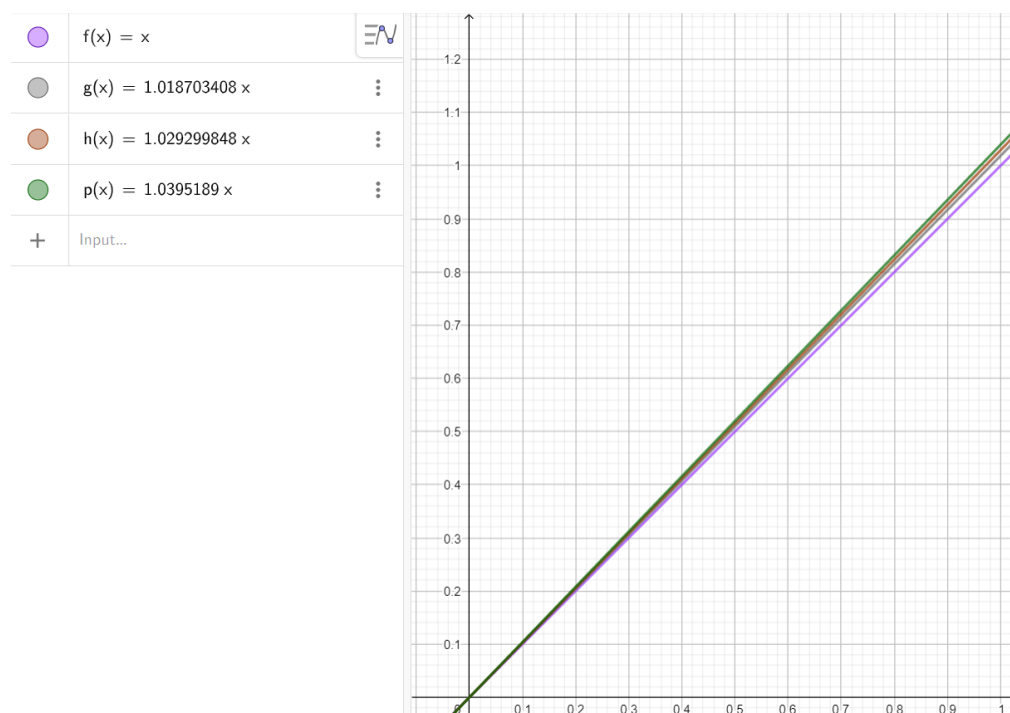


Рисунок 2.2

Розглянемо квадратурні формули Сімпсона. Для $m = 1$, тут $\lambda = \frac{1}{2}$, $a = 0$, $b = 1$, $K(x, y) = xy$, $h = \frac{b-a}{2} = \frac{1}{2}$; далі обираємо вузли $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$ та обчислюємо значення $K(x, x_0) = 0$, $K(x, x_1) = \frac{1}{2}x$, $K(x, x_2) = x$, далі знаходимо значення правих частин $f(x_0) = 0$, $f(x_1) = \frac{5}{12}$, $f(x_2) = \frac{5}{6}$.

Отримаємо систему (2.14) для даного випадку у вигляді:

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}(x_0) = 0, \\ 0.9166667\tilde{\varphi}(x_1) - 0.0416667\tilde{\varphi}(x_2) = 0.4166667, \\ -0.1666667\tilde{\varphi}(x_1) + 0.9166667\tilde{\varphi}(x_2) = 0.83333333. \end{cases}$$

Розв'язуючи дану систему маємо $\tilde{\varphi}(x_0) = 0$, $\tilde{\varphi}(x_1) = 0,5$, $\tilde{\varphi}(x_2) = 1$ та отримаємо наближений розв'язок, записаний у вигляді:

$$\varphi(x) = \frac{5}{6}x + \frac{1}{12}x \left(0 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 1 \right) = \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}x = x$$

Розглянемо більш точно наближення для квадратурних формул Сімпсона. Для $m = 2$, тут матимемо $\lambda = \frac{1}{2}$, $a = 0$, $b = 1$, $K(x, y) = xy$, $h = \frac{b-a}{4} = \frac{1}{4}$; далі обираємо вузли $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{3}{4}$, $x_4 = 1$ та обчислюємо значення $K(x, x_0) = 0$, $K(x, x_1) = \frac{1}{4}x$, $K(x, x_2) = \frac{1}{2}x$, $K(x, x_3) = \frac{3}{4}x$, $K(x, x_4) = x$, потім знаходимо значення правих частин $f(x_0) = 0$, $f(x_1) = \frac{5}{24}$, $f(x_2) = \frac{5}{12}$, $f(x_3) = \frac{5}{8}$, $f(x_4) = \frac{5}{6}$.

Отримаємо систему (2.14) для даного випадку у вигляді:

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}(x_0) = 0, \\ 0.989\tilde{\varphi}(x_1) - 0.0104\tilde{\varphi}(x_2) - 0.031\tilde{\varphi}(x_3) - 0.0104\tilde{\varphi}(x_4) = 0.208, \\ -0.0208\tilde{\varphi}(x_1) + 0.979\tilde{\varphi}(x_2) - 0.0625\tilde{\varphi}(x_3) - 0.0208\tilde{\varphi}(x_4) = 0.417, \\ -0.03125\tilde{\varphi}(x_1) - 0.03125\tilde{\varphi}(x_2) + 0.90625\tilde{\varphi}(x_3) - 0.03125\tilde{\varphi}(x_4) = 0.625, \\ -0.0417\tilde{\varphi}(x_1) - 0.0417\tilde{\varphi}(x_2) - 0.125\tilde{\varphi}(x_3) + 0.958\tilde{\varphi}(x_4) = 0.833. \end{cases}$$

Розв'язуючи дану систему маємо $\tilde{\varphi}(x_0) = 0$, $\tilde{\varphi}(x_1) = 0,25$, $\tilde{\varphi}(x_2) = 0,5$, $\tilde{\varphi}(x_3) = 0,75$, $\tilde{\varphi}(x_4) = 1$ та отримаємо наближений розв'язок, записаний у вигляді:

$$\tilde{\varphi}(x) = \frac{5}{6} + \frac{1}{24}x \sum_{i=1}^2 (K(x, x_{2i-2})\tilde{\varphi}(x_{2i-2}) + 4K(x, x_{2i-1})\tilde{\varphi}(x_{2i-1}) +$$

$$+K(x, x_{2i})\tilde{\varphi}(x_{2i}))$$

Розглянемо більш точне наближення для квадратурних формул Сімпсона. Для $m = 4$, тут маємо $\lambda = \frac{1}{2}$, $a = 0$, $b = 1$, $K(x, y) = xy$, $h = \frac{b-a}{8} = \frac{1}{8}$, далі обираємо дев'ять вузлів $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{8}$, $x_2 = \frac{1}{4}$, $x_3 = \frac{3}{8}$, $x_4 = \frac{1}{2}$, $x_5 = \frac{5}{8}$, $x_6 = \frac{3}{4}$, $x_7 = \frac{7}{8}$, $x_8 = 1$ та знаходимо значення $K(x, x_0) = 0$, $K(x, x_1) = \frac{1}{8}x$, $K(x, x_2) = \frac{1}{4}x$, $K(x, x_3) = \frac{3}{8}x$, $K(x, x_4) = \frac{1}{2}x$, $K(x, x_5) = \frac{5}{8}x$, $K(x, x_6) = \frac{3}{4}x$, $K(x, x_7) = \frac{7}{8}x$, $K(x, x_8) = x$, потім обчислюємо значення правих частин $f(x_0) = 0$, $f(x_1) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{48}$, $f(x_2) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{24}$, $f(x_3) = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{8} = \frac{5}{16}$, $f(x_4) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{12}$, $f(x_5) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{8} = \frac{25}{48}$, $f(x_6) = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{8}$, $f(x_7) = \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} = \frac{35}{48}$, $f(x_8) = \frac{5}{6}$.

Отримаємо систему (2.14) для даного випадку у вигляді:

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}(x_0) = 0, \\ 0.9987\tilde{\varphi}(x_1) - \dots - 0.0091\tilde{\varphi}(x_7) - 0.0026\tilde{\varphi}(x_8) = 0.104, \\ -0.009\tilde{\varphi}(x_1) - \dots + 0.936\tilde{\varphi}(x_7) - 0.018\tilde{\varphi}(x_8) = 0.729, \\ -0.01042\tilde{\varphi}(x_1) - \dots - 0.073\tilde{\varphi}(x_7) + 0.979\tilde{\varphi}(x_8) = 0.833. \end{cases}$$

Розв'язуючи дану систему маємо $\tilde{\varphi}(x_0) = 0$, $\tilde{\varphi}(x_1) = 0,125$, $\tilde{\varphi}(x_2) = 0,25$, $\tilde{\varphi}(x_3) = 0,375$, $\tilde{\varphi}(x_4) = 0,5$, $\tilde{\varphi}(x_5) = 0,625$, $\tilde{\varphi}(x_6) = 0,75$, $\tilde{\varphi}(x_7) = 0,875$, $\tilde{\varphi}(x_8) = 1$ та отримаємо наближений розв'язок, записаний у вигляді:

$$\varphi(x) = \frac{5}{6}x + \frac{1}{48}x \sum_{i=1}^4 (K(x, x_{2i-2})\tilde{\varphi}(x_{2i-2}) + 4K(x, x_{2i-1})\tilde{\varphi}(x_{2i-1}) + K(x, x_{2i})\tilde{\varphi}(x_{2i})).$$

Далі побудуємо графіки для кожного з отриманих розв'язків і порівняємо. На рисунку 2.3 зображено графік аналітичного розв'язку $f(x)$ та наближених розв'язків для $m = 1$, маємо $p(x)$; для $m = 2$, маємо $h(x)$; для

$m = 3$, маємо $g(x)$. На цьому рисунку легко побачити, що чим більше значення n , тим точнішим буде розв'язок рівняння.

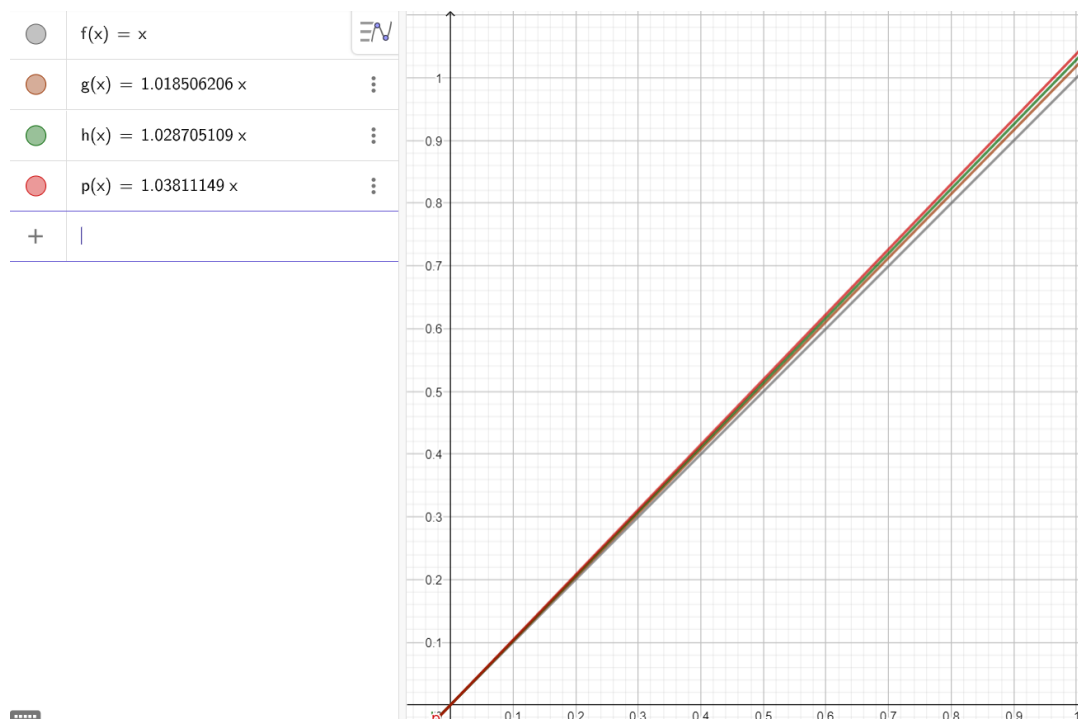


Рисунок 2.3

Приклад 2.2 Розв'язати інтегральне рівняння Фредгольма II роду квадратурним методом

$$\varphi(x) - \frac{1}{2} \int_0^1 x e^y \varphi(y) dy = e^{-x}. \quad (2.18)$$

Розв'язання. Розглянемо квадратурні формули лівих прямокутників.

У цьому інтегральному рівнянні $\lambda = \frac{1}{2}$, $a = 0$, $b = 1$, $K(x, y) = x e^y$. Для $n = 2$, $h = \frac{b-a}{2} = \frac{1}{2}$; далі обираємо вузли $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$ та знаходимо значення $K(x, x_0) = x e^0$, $K(x, x_1) = x e^{\frac{1}{2}}$, та значення правих частин $f(x_0) = e^0 = 1$, $f(x_1) = e^{-\frac{1}{2}}$.

Отримаємо систему (2.6) для даного випадку у вигляді:

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}(x_0) = 1, \\ -0,125\tilde{\varphi}(x_0) + 0,793909841\tilde{\varphi}(x_1) = 0,686. \end{cases}$$

Звідки $\tilde{\varphi}(x_0) = 1$, $\tilde{\varphi}(x_1) = 0,92$

Отримаємо наближений розв'язок, записаний у вигляді:

$$\tilde{\varphi}^{(2)} = e^{-x} + \frac{1}{4}x \sum_{i=0}^1 e^{\frac{i}{2}} \tilde{\varphi}(x_i).$$

Розглянемо більш точне наближення для $n = 4$, $h = \frac{b-a}{4} = \frac{1}{4}$; обираємо вузли $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{3}{4}$, далі шукаємо наступні значення $K(x, x_0) = xe^0$, $K(x, x_1) = xe^{\frac{1}{4}}$, $K(x, x_2) = xe^{\frac{1}{2}}$, $K(x, x_3) = xe^{\frac{3}{4}}$ та значення правих частин $f(x_0) = e^0 = 1$, $f(x_1) = e^{-\frac{1}{4}}$, $f(x_2) = e^{-\frac{1}{2}}$, $f(x_3) = e^{-\frac{3}{4}}$.

Отримаємо систему (2.6) для даного випадку у вигляді:

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}(x_0) = 1, \\ -0,0313\tilde{\varphi}(x_0) + 0,9599\tilde{\varphi}(x_1) - 0,052\tilde{\varphi}(x_2) - 0,066\tilde{\varphi}(x_3) - 0,085\tilde{\varphi}(x_4) = 0,778, \\ -0,0625\tilde{\varphi}(x_0) - 0,0803\tilde{\varphi}(x_1) + 0,897\tilde{\varphi}(x_2) - 0,132\tilde{\varphi}(x_3) - 0,170\tilde{\varphi}(x_4) = 1,587, \\ -0,094\tilde{\varphi}(x_0) - 0,1203\tilde{\varphi}(x_1) - 0,155\tilde{\varphi}(x_2) + 0,802\tilde{\varphi}(x_3) - 0,255\tilde{\varphi}(x_4) = 1,943, \\ -0,125\tilde{\varphi}(x_0) - 0,1605\tilde{\varphi}(x_1) - 0,206\tilde{\varphi}(x_2) + 0,265\tilde{\varphi}(x_3) - 0,660\tilde{\varphi}(x_4) = 2,330. \end{cases}$$

Звідки $\tilde{\varphi}(x_0) = 1$, $\tilde{\varphi}(x_1) = 0,969$, $\tilde{\varphi}(x_2) = 0,986$, $\tilde{\varphi}(x_3) = 1,042$.

Отримаємо наближений розв'язок, записаний у вигляді:

$$\tilde{\varphi}^{(4)}(x) = e^{-x} + \frac{1}{8}x \sum_{i=0}^3 e^{\frac{i}{4}} \tilde{\varphi}(x_i).$$

Враховуючи оцінку похибки за правилом Рунге (2.16) та той факт, що формула лівих прямокутників є формулою першого порядку точності ($p=1$), похибка розв'язання інтегрального рівняння запишеться так:

$$R = \frac{1}{8}x \left(1 + 0,969e^{\frac{1}{4}} + 0,986e^{\frac{1}{2}} + 1,042e^{\frac{3}{4}} - 2 - 1,84e^{\frac{1}{2}} \right) = 0,13x.$$

Розглянемо більш точне наближення для квадратурних формул лівих прямокутників. Для $n = 8$, тут $\lambda = \frac{1}{2}$, $a = 0$, $b = 1$, $K(x, y) = xe^y$, $h = \frac{b-a}{8} = \frac{1}{8}$, обираємо вісім вузлів $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{8}$, $x_2 = \frac{1}{4}$, $x_3 = \frac{3}{8}$, $x_4 = \frac{1}{2}$, $x_5 = \frac{5}{8}$, $x_6 = \frac{3}{4}$, $x_7 = \frac{7}{8}$ та обчислюємо наступні значення $K(x, x_0) = xe^0$, $K(x, x_1) = xe^{\frac{1}{8}}$, $K(x, x_2) = xe^{\frac{1}{4}}$, $K(x, x_3) = xe^{\frac{3}{8}}$, $K(x, x_4) = xe^{\frac{1}{2}}$, $K(x, x_5) = xe^{\frac{5}{8}}$, $K(x, x_6) = xe^{\frac{3}{4}}$, $K(x, x_7) = xe^{\frac{7}{8}}$, потім знаходимо значення правих частин $f(x_0) = e^0 = 1$, $f(x_1) = e^{-\frac{1}{8}}$, $f(x_2) = e^{-\frac{1}{4}}$, $f(x_3) = e^{-\frac{3}{8}}$, $f(x_4) = e^{-\frac{1}{2}}$, $f(x_5) = e^{-\frac{5}{8}}$, $f(x_6) = e^{-\frac{3}{4}}$, $f(x_7) = e^{-\frac{7}{8}}$.

Отримаємо систему (2.6) для даного випадку у вигляді:

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}(x_0) = 1, \\ -0,0078\tilde{\varphi}(x_0) + 0,991\tilde{\varphi}(x_1) - \dots - 0,0187\tilde{\varphi}(x_7) = 0,882, \\ \dots \\ -0,0546875\tilde{\varphi}(x_0) - 0,061969056\tilde{\varphi}(x_1) - \dots + 0,868811507\tilde{\varphi}(x_7) = 0,417. \end{cases}$$

Маємо $\tilde{\varphi}(x_0) = 1$, $\tilde{\varphi}(x_1) = 0,999$, $\tilde{\varphi}(x_2) = 0,994$, $\tilde{\varphi}(x_3) = 1,001$
 $\tilde{\varphi}(x_4) = 1,036$, $\tilde{\varphi}(x_5) = 1,072$, $\tilde{\varphi}(x_6) = 1,116$, $\tilde{\varphi}(x_7) = 1,169$

Розв'язуючи дану систему, отримаємо наближений розв'язок, записаний у вигляді:

$$\tilde{\varphi}^{(8)}(x) = e^{-x} + \frac{1}{16}x \sum_{i=0}^7 e^{\frac{i}{8}}\tilde{\varphi}(x_i).$$

Аналітичний розв'язок $\varphi(x) = x + e^{-x}$.

Далі побудуємо графіки для кожного з отриманих розв'язків і порівняємо. На рисунку 2.4 зображено графік аналітичного розв'язку $f(x)$ та наближених розв'язків для $n = 2$, маємо $p(x)$; для $n = 4$, маємо $h(x)$; для $n = 8$, маємо $g(x)$. На цьому рисунку легко побачити, що чим більше значення n , тим точнішим буде розв'язок рівняння.

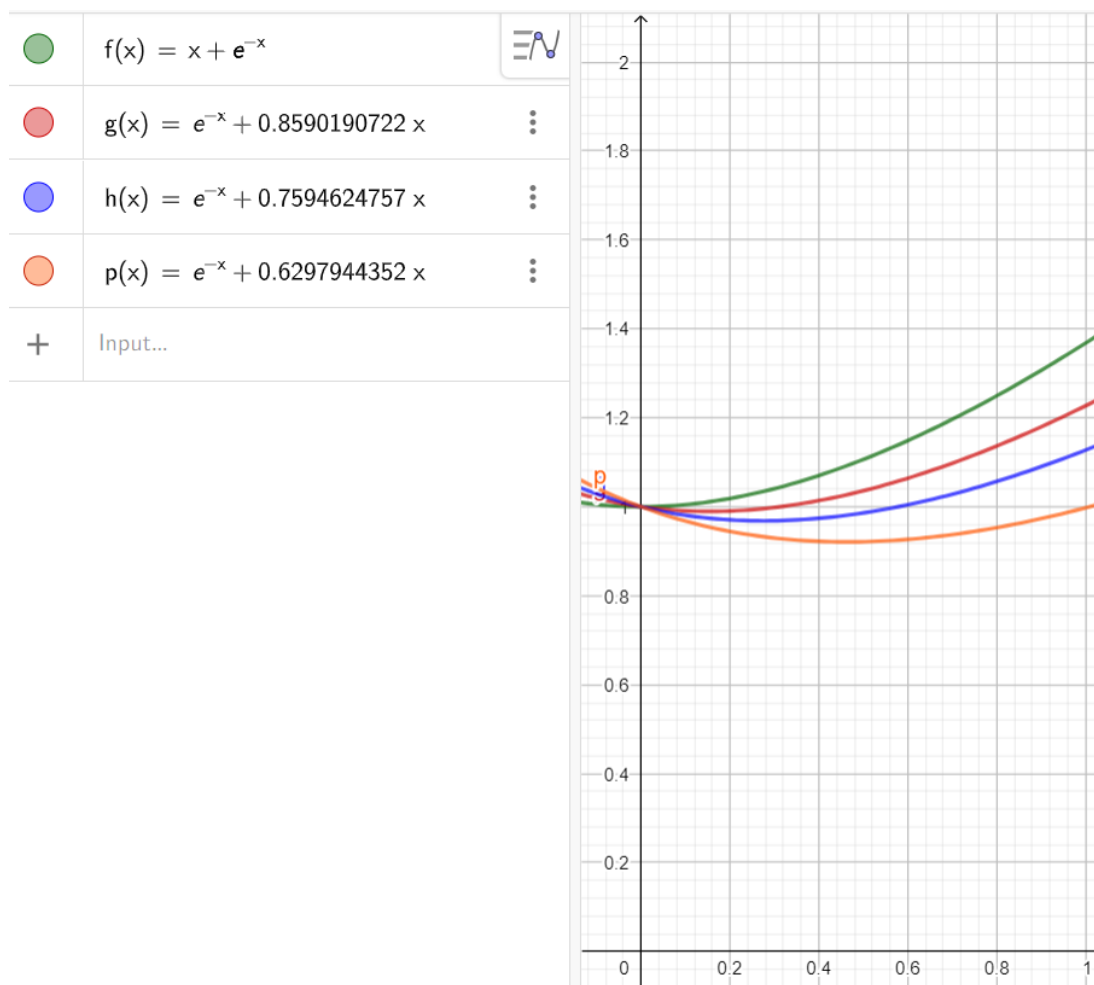


Рисунок 2.4

Розглянемо квадратурні формули трапецій. Для $n = 3$, тут $\lambda = \frac{1}{2}$, $a = 0$, $b = 1$, $K(x, y) = xe^y$, $h = \frac{b-a}{3} = \frac{1}{3}$; обираємо вузли $x_0 = \frac{1}{6}$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{5}{6}$ та обчислюємо значення $K(x, x_0) = xe^{\frac{1}{6}}$, $K(x, x_1) = xe^{\frac{1}{2}}$, $K(x, x_2) = xe^{\frac{5}{6}}$, далі знаходимо значення правих частин $f(x_0) = e^{-\frac{1}{6}}$, $f(x_1) = e^{-\frac{1}{2}}$, $f(x_2) = e^{-\frac{5}{6}}$.

Отримаємо систему (2.10) для даного випадку у вигляді:

$$\begin{cases} 0,984\tilde{\varphi}(x_0) - 0,046\tilde{\varphi}(x_1) - 0,032\tilde{\varphi}(x_2) = 0,847, \\ -0,049\tilde{\varphi}(x_0) + 0,931\tilde{\varphi}(x_1) - 0,096\tilde{\varphi}(x_2) = 0,607, \\ -0,082\tilde{\varphi}(x_0) - 0,229\tilde{\varphi}(x_1) - 0,84\tilde{\varphi}(x_2) = 0,435. \end{cases}$$

Маємо $\tilde{\varphi}(x_0) = 924$, $\tilde{\varphi}(x_1) = 0,785$, $\tilde{\varphi}(x_2) = 0,812$.

Розв'язуючи дану систему, отримаємо наближений розв'язок, записаний у вигляді:

$$\varphi^{(3)}(x) = e^{-x} + \frac{1}{12} \left(x e^{\frac{1}{6}} \cdot 0,923822 + x e^{\frac{5}{6}} \cdot 0,821299 \right) + \frac{1}{6} x e^{\frac{1}{2}} \cdot 0,784648$$

Розглянемо більш точно наближення для квадратурних формул трапецій. Для $n = 5$, тут маємо $\lambda = \frac{1}{2}$, $a = 0$, $b = 1$, $K(x, y) = x e^y$, $h = \frac{b-a}{5} = \frac{1}{5}$; обираємо вузли $x_0 = \frac{1}{10}$, $x_1 = \frac{3}{10}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{7}{10}$, $x_4 = \frac{9}{10}$, далі обчислюємо значення $K(x, x_0) = x e^{\frac{1}{10}}$, $K(x, x_1) = x e^{\frac{3}{10}}$, $K(x, x_2) = x e^{\frac{1}{2}}$, $K(x, x_3) = x e^{\frac{7}{10}}$, $K(x, x_4) = x e^{\frac{9}{10}}$, потім знаходимо значення правих частин $f(x_0) = e^{-\frac{1}{10}}$, $f(x_1) = e^{-\frac{3}{10}}$, $f(x_2) = e^{-\frac{1}{2}}$, $f(x_3) = e^{-\frac{7}{10}}$, $f(x_4) = e^{-\frac{9}{10}}$.

Отримаємо систему (2.10) для даного випадку у вигляді:

$$\begin{cases} 0,994\tilde{\varphi}(x_0) - 0,013\tilde{\varphi}(x_1) - 0,016\tilde{\varphi}(x_2) - 0,0201\tilde{\varphi}(x_3) - 0,012\tilde{\varphi}(x_4) = 0,905, \\ -0,017\tilde{\varphi}(x_0) + 0,980\tilde{\varphi}(x_1) - 0,049\tilde{\varphi}(x_2) - 0,0604\tilde{\varphi}(x_3) - 0,037\tilde{\varphi}(x_4) = 0,741, \\ -0,028\tilde{\varphi}(x_0) - 0,067\tilde{\varphi}(x_1) + 0,959\tilde{\varphi}(x_2) - 0,101\tilde{\varphi}(x_3) - 0,061\tilde{\varphi}(x_4) = 0,607, \\ -0,039\tilde{\varphi}(x_0) - 0,094\tilde{\varphi}(x_1) - 0,115\tilde{\varphi}(x_2) + 0,930\tilde{\varphi}(x_3) - 0,086\tilde{\varphi}(x_4) = 0,497, \\ -0,050\tilde{\varphi}(x_0) - 0,121\tilde{\varphi}(x_1) - 0,148\tilde{\varphi}(x_2) - 0,181\tilde{\varphi}(x_3) + 0,889\tilde{\varphi}(x_4) = 0,407. \end{cases}$$

Маємо $\tilde{\varphi}(x_0) = 0,966$, $\tilde{\varphi}(x_1) = 0,906$, $\tilde{\varphi}(x_2) = 0,876$, $\tilde{\varphi}(x_3) = 0,864$, $\tilde{\varphi}(x_4) = 0,957$.

Розв'язуючи дану систему, отримаємо наближений розв'язок, записаний у вигляді:

$$\varphi^{(5)}(x) = e^{-x} + \frac{1}{20} \left(x e^{\frac{1}{10}} \cdot 0,966026 + x e^{\frac{9}{10}} \cdot 0,957265 \right) + \frac{1}{10} x \sum_{i=1}^3 e^{\frac{2i+1}{10}} \tilde{\varphi}(x_i).$$

Розглянемо більш точне наближення для квадратурних формул трапецій. Для $n = 9$, тут маємо $\lambda = \frac{1}{2}$, $a = 0$, $b = 1$, $K(x, y) = x e^y$, $h = \frac{b-a}{9} = \frac{1}{9}$; обираємо дев'ять вузлів $x_0 = \frac{1}{18}$, $x_1 = \frac{1}{6}$, $x_2 = \frac{5}{18}$, $x_3 = \frac{7}{18}$, $x_4 = \frac{1}{2}$, $x_5 = \frac{11}{18}$, $x_6 = \frac{13}{18}$, $x_7 = \frac{5}{6}$, $x_8 = \frac{17}{18}$, далі обчислюємо значення $K(x, x_0) = x e^{\frac{1}{18}}$, $K(x, x_1) = x e^{\frac{1}{6}}$, $K(x, x_2) = x e^{\frac{5}{18}}$, $K(x, x_3) = x e^{\frac{7}{18}}$, $K(x, x_4) = x e^{\frac{1}{2}}$, $K(x, x_5) = x e^{\frac{11}{18}}$, $K(x, x_6) = x e^{\frac{13}{18}}$, $K(x, x_7) = x e^{\frac{5}{6}}$, $K(x, x_8) = x e^{\frac{17}{18}}$ та значення правих частин $f(x_0) = e^{-\frac{1}{18}}$, $f(x_1) = e^{-\frac{1}{6}}$, $f(x_2) = e^{-\frac{5}{18}}$, $f(x_3) = e^{-\frac{7}{18}}$, $f(x_4) = e^{-\frac{1}{2}}$, $f(x_5) = e^{-\frac{11}{18}}$, $f(x_6) = e^{-\frac{13}{18}}$, $f(x_7) = e^{-\frac{5}{6}}$, $f(x_8) = e^{-\frac{17}{18}}$.

Отримаємо систему (2.10) для даного випадку у вигляді:

$$\begin{cases} 0,998\tilde{\varphi}(x_0) - 0,004\tilde{\varphi}(x_1) - \dots - 0,007\tilde{\varphi}(x_7) - 0,004\tilde{\varphi}(x_8) = 0,946, \\ -0,005\tilde{\varphi}(x_0) + 0,995\tilde{\varphi}(x_1) - \dots - 0,021\tilde{\varphi}(x_7) - 0,012\tilde{\varphi}(x_8) = 0,846, \\ \dots \\ -0,025\tilde{\varphi}(x_0) - 0,055\tilde{\varphi}(x_1) - \dots + 0,947\tilde{\varphi}(x_7) - 0,060\tilde{\varphi}(x_8) = 0,435, \\ -0,028\tilde{\varphi}(x_0) - 0,062\tilde{\varphi}(x_1) - \dots - 0,121\tilde{\varphi}(x_7) + 0,933\tilde{\varphi}(x_8) = 0,389. \end{cases}$$

Маємо $\tilde{\varphi}(x_0) = 0,987$, $\tilde{\varphi}(x_1) = 0,966$, $\tilde{\varphi}(x_2) = 0,955$, $\tilde{\varphi}(x_3) = 0,953$, $\tilde{\varphi}(x_4) = 0,958$, $\tilde{\varphi}(x_5) = 0,969$, $\tilde{\varphi}(x_6) = 0,984$, $\tilde{\varphi}(x_7) = 1,003$, $\tilde{\varphi}(x_8) = 1,094$.

Розв'язуючи дану систему, отримаємо наближений розв'язок, записаний у вигляді:

$$\varphi^{(9)}(x) = e^{-x} + \frac{1}{36} \left(x e^{\frac{1}{18}} \cdot 0,987419 + x e^{\frac{17}{18}} \cdot 1,093714 \right) + \frac{1}{18} x \sum_{i=1}^7 e^{\frac{2i+1}{18}} \tilde{\varphi}(x_i)$$

Далі побудуємо графіки для кожного з отриманих розв'язків і порівняємо. На рисунку 2.5 зображено графік аналітичного розв'язку $f(x)$ та наближених розв'язків для $n = 3$, маємо $p(x)$; для $n = 5$, маємо $h(x)$; для $n = 9$, маємо $g(x)$. На цьому рисунку легко побачити, що чим більше значення n , тим точнішим буде розв'язок рівняння.

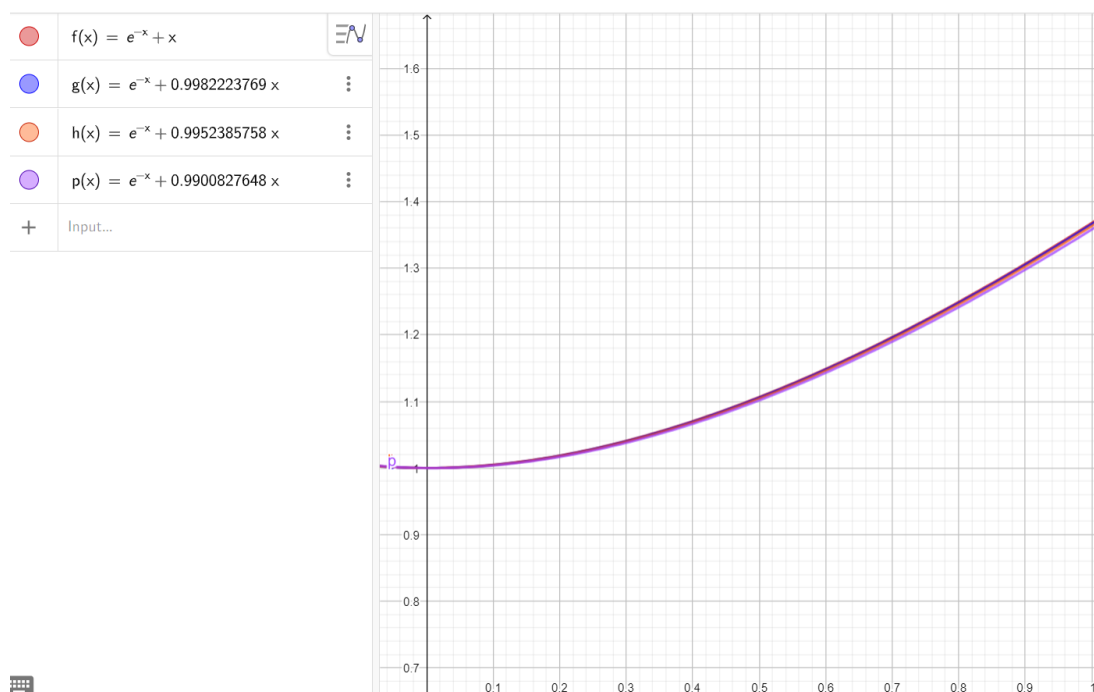


Рисунок 2.5

Розглянемо квадратурні формули Сімпсона. Для $m = 1$, тут маємо $\lambda = \frac{1}{2}$, $a = 0$, $b = 1$, $K(x, y) = xe^y$, $h = \frac{b-a}{2} = \frac{1}{2}$; обираємо вузли $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$, та отримуємо значення $K(x, x_0) = xe^0$, $K(x, x_1) = xe^{\frac{1}{2}}$, $K(x, x_2) = xe^1$, потім знаходимо значення правих частин $f(x_0) = e^0 = 1$, $f(x_1) = e^{-\frac{1}{2}}$, $f(x_2) = e^{-1}$.

Отримаємо систему (2.14) для даного випадку у вигляді:

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}(x_0) = 1, \\ -0,0417\tilde{\varphi}(x_0) + 0,725\tilde{\varphi}(x_1) - 0,113\tilde{\varphi}(x_2) = 0,607, \\ -0,083\tilde{\varphi}(x_0) - 0,549\tilde{\varphi}(x_1) - 0,773\tilde{\varphi}(x_2) = 0,368. \end{cases}$$

Маємо $\tilde{\varphi}(x_0) = 1$, $\tilde{\varphi}(x_1) = 1,108$, $\tilde{\varphi}(x_2) = 1,371$.

Розв'язуючи дану систему, отримаємо наближений розв'язок, записаний у вигляді:

$$\varphi^{(1)}(x) = e^{-x} + \frac{1}{12}x \left(1 + 4e^{\frac{1}{2}} \cdot 1,107844 + e \cdot 1,370507 \right)$$

Розглянемо більш точно наближення для квадратурних формул Сімпсона. Для $m = 2$, тут маємо $\lambda = \frac{1}{2}$, $a = 0$, $b = 1$, $K(x, y) = xe^y$, $h = \frac{b-a}{4} = \frac{1}{4}$; далі обираємо вузли $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{3}{4}$, $x_4 = 1$ та значення $K(x, x_0) = xe^0$, $K(x, x_1) = xe^{\frac{1}{4}}$, $K(x, x_2) = xe^{\frac{1}{2}}$, $K(x, x_3) = xe^{\frac{3}{4}}$, $K(x, x_4) = xe^1$, далі знаходимо значення правих частин $f(x_0) = e^0 = 1$, $f(x_1) = e^{-\frac{1}{4}}$, $f(x_2) = e^{-\frac{1}{2}}$, $f(x_3) = e^{-\frac{3}{4}}$, $f(x_4) = e^{-1}$.

Отримаємо систему (2.14) для даного випадку у вигляді:

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}(x_0) = 1, \\ -0,0104\tilde{\varphi}(x_0) + 0,946\tilde{\varphi}(x_1) - 0,034\tilde{\varphi}(x_2) - 0,088\tilde{\varphi}(x_3) - 0,028\tilde{\varphi}(x_4) = 0,779, \\ -0,021\tilde{\varphi}(x_0) - 0,107\tilde{\varphi}(x_1) - 0,931\tilde{\varphi}(x_2) - 0,176\tilde{\varphi}(x_3) - 0,057\tilde{\varphi}(x_4) = 0,607, \\ -0,031\tilde{\varphi}(x_0) - 0,161\tilde{\varphi}(x_1) - 0,103\tilde{\varphi}(x_2) + 0,735\tilde{\varphi}(x_3) - 0,085\tilde{\varphi}(x_4) = 0,472, \\ -0,042\tilde{\varphi}(x_0) - 0,214\tilde{\varphi}(x_1) - 0,137\tilde{\varphi}(x_2) - 0,353\tilde{\varphi}(x_3) + 0,887\tilde{\varphi}(x_4) = 0,368. \end{cases}$$

Маємо $\tilde{\varphi}(x_0) = 1$, $\tilde{\varphi}(x_1) = 1,029$, $\tilde{\varphi}(x_2) = 1,107$, $\tilde{\varphi}(x_3) = 1,222$, $\tilde{\varphi}(x_4) = 1,368$.

Розв'язуючи дану систему, отримаємо наближений розв'язок, записаний у вигляді:

$$\varphi(x) = e^{-x} + \frac{1}{24}x \sum_{i=1}^2 (K(x, x_{2i-2})\tilde{\varphi}(x_{2i-2}) + 4K(x, x_{2i-1})\tilde{\varphi}(x_{2i-1}) + K(x, x_{2i})\tilde{\varphi}(x_{2i}))$$

Розглянемо більш точне наближення для квадратурних формул Сімпсона. Для $m = 4$, тут маємо $\lambda = \frac{1}{2}$, $a = 0$, $b = 1$, $K(x, y) = xe^y$, $h = \frac{b-a}{8} = \frac{1}{8}$; обираємо дев'ять вузлів $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{8}$, $x_2 = \frac{1}{4}$, $x_3 = \frac{3}{8}$, $x_4 = \frac{1}{2}$, $x_5 = \frac{5}{8}$, $x_6 = \frac{3}{4}$, $x_7 = \frac{7}{8}$, $x_8 = 1$, далі знаходимо значення $K(x, x_0) = xe^0$, $K(x, x_1) = xe^{\frac{1}{8}}$, $K(x, x_2) = xe^{\frac{1}{4}}$, $K(x, x_3) = xe^{\frac{3}{8}}$, $K(x, x_4) = xe^{\frac{1}{2}}$, $K(x, x_5) = xe^{\frac{5}{8}}$, $K(x, x_6) = xe^{\frac{3}{4}}$, $K(x, x_7) = xe^{\frac{7}{8}}$, $K(x, x_8) = xe^1$, далі рахуємо значення правих частин $f(x_0) = e^0 = 1$, $f(x_1) = e^{-\frac{1}{8}}$, $f(x_2) = e^{-\frac{1}{4}}$, $f(x_3) = e^{-\frac{3}{8}}$, $f(x_4) = e^{-\frac{1}{2}}$, $f(x_5) = e^{-\frac{5}{8}}$, $f(x_6) = e^{-\frac{3}{4}}$, $f(x_7) = e^{-\frac{7}{8}}$, $f(x_8) = e^{-1}$.

Отримаємо систему (2.14) для даного випадку у вигляді:

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}(x_0) = 1, \\ -0.003\tilde{\varphi}(x_0) + 0.988\tilde{\varphi}(x_1) - \dots - 0.025\tilde{\varphi}(x_7) - 0.007\tilde{\varphi}(x_8) = 0.882, \\ \dots \\ -0.018\tilde{\varphi}(x_0) - 0.083\tilde{\varphi}(x_1) - \dots + 0.825\tilde{\varphi}(x_7) - 0.049\tilde{\varphi}(x_8) = 0.417, \\ -0.021\tilde{\varphi}(x_0) - 0.094\tilde{\varphi}(x_1) - \dots - 0.199\tilde{\varphi}(x_7) + 0.943\tilde{\varphi}(x_8) = 0.368. \end{cases}$$

Маємо $\tilde{\varphi}(x_0) = 1$, $\tilde{\varphi}(x_1) = 1,007$, $\tilde{\varphi}(x_2) = 1,029$, $\tilde{\varphi}(x_3) = 1,062$, $\tilde{\varphi}(x_4) = 1,107$, $\tilde{\varphi}(x_5) = 1,160$, $\tilde{\varphi}(x_6) = 1,222$, $\tilde{\varphi}(x_7) = 1,292$, $\tilde{\varphi}(x_8) = 1,368$.

Розв'язуючи дану систему, отримаємо наближений розв'язок, записаний у вигляді:

$$\varphi(x) = e^{-x} + \frac{1}{48}x \sum_{i=1}^4 (K(x, x_{2i-2})\tilde{\varphi}(x_{2i-2}) + 4K(x, x_{2i-1})\tilde{\varphi}(x_{2i-1}) + K(x, x_{2i})\tilde{\varphi}(x_{2i})).$$

Далі побудуємо графіки для кожного з отриманих розв'язків і порівняємо. На рисунку 2.6 зображено графік аналітичного розв'язку $f(x)$ та наближених розв'язків для $m = 2$, маємо $p(x)$; для $m = 4$, маємо $h(x)$; для

$m = 8$, маємо $g(x)$. На цьому рисунку легко побачити, що чим більше значення n , тим точнішим буде розв'язок рівняння.

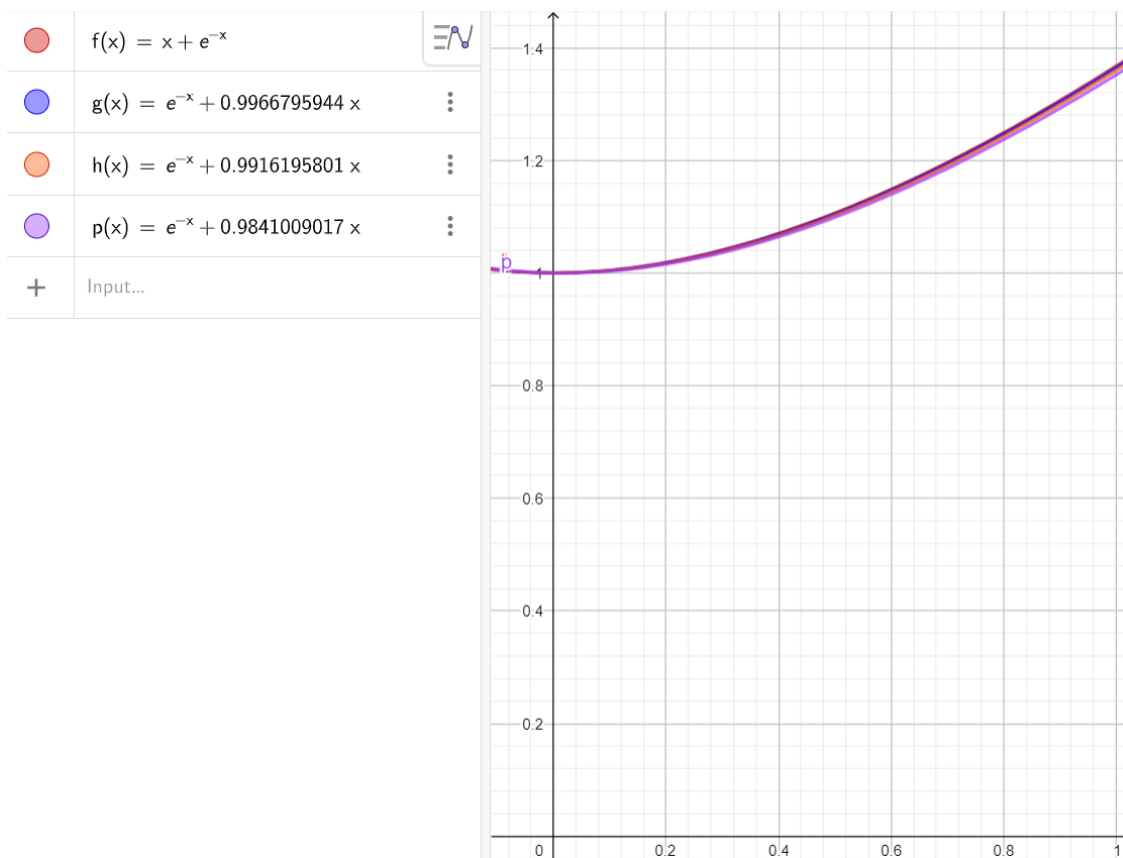


Рисунок 2.6

ВИСНОВКИ

У роботі наведено основні теоретичні відомості про інтегральні рівняння, їх класифікацію. Більш детально розглянуто інтегральні рівняння Фредгольма другого роду та методи їх розв'язання.

Детально описано основні співвідношення для квадратурного методу розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду. Розглянуто квадратурні формули, які дозволяють розв'язувати такі інтегральні рівняння, а саме квадратурні формули Гауса, Сімпсона, трапецій, прямокутників та їх властивості, наведено принцип Рунге оцінки практичної похибки квадратурних формул.

На основі квадратурного методу розроблено ітераційну процедуру уточнення розв'язків інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду із застосуванням принципу Рунге до обчислення інтегралів.

Наведені приклади розв'язання інтегральних рівнянь за допомогою розробленого підходу, проведено порівняння розв'язків для квадратурних формул лівих прямокутників, трапецій та Сімпсона. Проведено порівняння із відомими аналітичними розв'язками інтегральних рівнянь. Із аналізу цих прикладів можна зробити такі висновки: найбільш точні розв'язки отримуємо при застосуванні квадратурної формули Сімпсона, найменш точні – при застосуванні квадратурної формули лівих прямокутників; збіжність результатів до точного розв'язку спостерігається при збільшенні кількості відрізків розбиття інтегралу для всіх зазначених квадратурних формул.

Таким чином, у роботі показана важливість та ефективність застосування ітераційних процедур при розв'язанні інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду квадратурним методом.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие. Киев : Наукова думка, 1986. 544 с.
2. Гой Т. П., Махней О. В. Диференціальні та інтегральні рівняння. Івано-Франківськ : Сімик, 2012. 356 с.
3. Головач Г. П., Калайда О. Ф. Збірник задач з диференціальних та інтегральних рівнянь. Київ : Техніка, 1997. 288 с.
4. Давидов Н. А. Курс математичного аналізу: конспект лекцій. Київ : Вид-во "Вища школа", 1976. 378 с.
5. Дюкарев Ю. М., Літвінова О. Г. Диференціальні й інтегральні рівняння та варіаційне числення. Харків : ХНУ ім. В.Н. Каразіна, 2010. 138 с.
6. Кривошея С. А., Перестюк М. О., Бурим В. М. Диференціальні та інтегральні рівняння. Київ : Либідь, 2004. 408 с.
7. Манжиров А. В., Полянин А. Д. Справочник по интегральным уравнениям: Методы решения. Москва : Факториал Пресс, 2000. 384 с.
8. Федак І. В., Гой Т. П. Лінійні інтегральні рівняння. Івано-Франківськ : Голіней, 2011. 152 с.
9. Цегелик Г. Г. Наближені методи розв'язування крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними та інтегральних рівнянь. Львів : Видавничий центр ЛНУ ім. Івана Франка, 2008. 140 с.